СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Г. И. КРУЧКОВИЧ, Г. М. МОРДАСОВА, В. А. ПОДОЛЬСКИЙ,
Б. С. РИМСКИЙ-КОРСАКОВ, Х. Р. СУЛЕЙМАНОВА, И. А. ЧЕГИС

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Под общей редакцией
Г. И. КРУЧКОВИЧА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1970

517
УДК
510
С23

С23 Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Учебное пособие для втузов. М., «Высшая школа», 1970 г.

512 с илл.

Перед загл. авт.: Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Сулейманова Х. Р. и др.

Данный сборник включает в себя теоретические сведения, задачи и упражнения по следующим спецглавам курса высшей математики: «Матричное исчисление», «Скалярные и векторные поля», «Функции комплексного переменного», «Специальные функции», «Преобразование Фурье», «Операционное исчисление», «Уравнения математической физики», «Основы теории вероятностей».

Типовые задачи даны с подробными решениями и пояснениями. Приведены задачи для упражнений. К отдельным задачам даются методические указания.

Все задачи имеют ответы.

Предназначается для студентов втузов. Может быть использовано для самостоятельного изучения указанных глав математики, а также для слушателей курсов усовершенствования инженеров.

2—2—3
БЗ 35/10—70

517

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Матричное исчисление** 5

§ 1. Линейное пространство 5
§ 2. Алгебра матриц 15
§ 3. Линейные операторы 31
§ 4. Обратная матрица 43
§ 5. Ранг матрицы 57
§ 6. Характеристическое уравнение 62
§ 7. Подобие матриц. Преобразование координат 72
§ 8. Квадратичные формы 78
§ 9. Четырехполюсники и их матрицы 87
§ 10. Матричные функции 97

Глава II. **Скалярные и векторные поля** 114

§ 1. Криволинейные ортогональные координаты 114
§ 2. Скалярные поля 124
§ 3. Векторные поля. Их дифференциальные характеристики . . 132
§ 4. Интегральные характеристики векторного поля 144
§ 5. Потенциальные и соленоидальные векторные поля 161

Глава III. **Функции комплексного переменного** 170

§ 1. Комплексные функции 170
§ 2. Дифференцирование функций комплексного переменного . 182
§ 3. Конформные отображения 186
§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного . . . 205
§ 5. Комплексные ряды 209
§ 6. Вычеты и их приложения 221

Глава IV. **Специальные функции** 243

§ 1. Гамма-функция 243
§ 2. Интегральные функции 254
§ 3. Бесселевы функции 273
§ 4. Многочлены Лежандра 298
§ 5. Другие системы ортогональных многочленов 308

Глава V. **Преобразование Фурье** 317

§ 1. Непосредственное нахождение преобразований Фурье . . . 317
§ 2. Косинус-преобразование Фурье и синус-преобразование Фурье 321
§ 3. Некоторые приемы получения преобразований Фурье . . . 325
§ 4. Преобразования Фурье бесселевых функций 332
§ 5. Свойства преобразования Фурье 339

Глава VI. **Преобразование Лапласа** 346

§ 1. Основные свойства преобразования Лапласа 346
§ 2. Оригиналы рациональных изображений 373
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их системы 378

Глава VII. **Основы теории вероятностей** 386

§ 1. Алгебра событий 386
§ 2. Непосредственный подсчет вероятностей 390
§ 3. Алгебра вероятностей 396
§ 4. Дискретные случайные величины 406
§ 5. Непрерывные случайные величины 419
§ 6. Теоремы Муавра — Лапласа 427

Главе VIII. **Краевые задачи. Метод Фурье** 432

§ 1. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 432
§ 2. Собственные функции 437
§ 3. Метод Фурье 455
§ 4. Применение преобразования Фурье 475

Ответы 483

Приложения 504

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная наука и техника предъявляют очень высокие требования к математической подготовке инженера. Если еще сравнительно недавно инженерная практика могла обходиться не очень сложными математическими подсчетами, то возникающие теперь инженерные задачи требуют, как правило, знания и применения достаточно сильных и новых математических теорий. Разумеется, это не могло не отразиться на содержании втузовского курса высшей математики. За последние годы его программа неоднократно расширялась. Однако совершенно ясно, что, во-первых, эту программу нельзя увеличивать неограниченно, а во-вторых, и это главное, появились разделы математики, нужные для специальностей одного профиля и не столь необходимые для специальностей другого. В результате сначала в ведущих вузах, а затем и в других институтах в практику вошли специальные и факультативные курсы по тем или иным дополнительным главам высшей математики.

Предлагаемая книга представляет собой учебное пособие по практической части важных для инженерной подготовки разделов математики, выходящих частично или полностью за рамки обычного втузовского курса. В то же время книга имеет и другую не менее важную направленность. Она должна удовлетворить запросы тех инженеров, которые нуждаются в повышении своих математических познаний. Бо́льшая их часть учится на очных и заочных курсах и факультетах усовершенствования. Авторы настоящего издания имели в виду также и тех, кто желает самостоятельно изучить отдельные спецглавы высшей математики.

Основные особенности «Сборника задач» вытекают из следующих принципов, положенных авторами в основу своей работы.

1. «Сборник задач» представляет собой единое методическое руководство, включающее в себя краткие теоретические сведения по каждому отдельному пункту; задачи и упражнения с более или менее подробными решениями и пояснениями к этим решениям; задачи и упражнения, предлагаемые для самостоятельной работы, в нужных случаях снабженные краткими указаниями; ответы к последним задачам. Все задачи расположены в определенной последовательности, диктуемой избранной методикой изложения

материала. Нерешенные задачи подбирались так, чтобы всякий, кто овладел изложенными сведениями, мог вполне с ними справиться. Такая структура книги делает ее пригодной для самостоятельного овладения предметом при самой минимальной помощи со стороны преподавателя.

2. Предлагаемый задачник не предназначен для выборочного решения отдельных задач. Он предполагает систематическую работу с ним по избранному разделу. В соответствии с этим количество задач и упражнений ограничивалось так, чтобы обучающийся проработал по крайней мере большинство из них. Что касается качества задач, то, учитывая втузовскую направленность пособия, авторы по возможности избегали задач повышенной трудности, представляющих интерес чисто математический. Разумеется, это совсем не означает, что в задачнике нет сравнительно сложных задач.

3. Большинство из рассматриваемых разделов математики являются новыми для втузовского преподавания. Отсутствие установившихся традиций создавало определенные трудности при отборе материала, и поэтому из огромного запаса сведений, накопленных математикой по этим разделам, авторы стремились включить в задачник только те, которые по их мнению способствуют глубокому усвоению основных понятий по каждому разделу.

4. Сосредотачивая свое внимание, главным образом, на математической стороне предмета, авторы стремились показать геометрический, физический, а иногда и технический смысл рассматриваемых вопросов.

Труд по написанию настоящего пособия распределялся между авторами следующим образом: Г. И. Кручковичу принадлежит глава I, Г. М. Мордасовой — главы III и IV, В. А. Подольскому — глава VII, Б. С. Римский-Корсаков написал главы V и VI, Х. Р. Сулейманова — главу II, И. А. Чегис — главу VIII. В то же время при подготовке книги к изданию авторский коллектив выступал как единое целое.

Все члены авторского коллектива, работая на кафедре высшей математики Московского института радиотехники, электроники и автоматики, неоднократно читали лекции и вели занятия по спецглавам курса математики как со студентами института, так и с инженерами, обучающимися на факультете усовершенствования при МИРЭА. Из опыта этой работы и возник настоящий «Сборник задач».

Авторы выражают благодарность профессору В. В. Рыжкову и доценту Ю. И. Гроссбергу за весьма тщательное рецензирование рукописи книги. Сделанные ими замечания значительно способствовали улучшению ее текста. Понимая вместе с тем, что написанное пособие возможно и не лишено тех или иных недочетов, авторы с признательностью примут советы, направленные к их устранению.

ГЛАВА I

МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1. Определение линейного пространства. *Линейным (или векторным) пространством* называется всякая совокупность объектов, называемых векторами, над которыми определены два действия — сложение и умножение на число, подчиняющиеся следующим аксиомам:

I. $x+y=y+x$.

II. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

III. Существует нуль-вектор, для которого $x+0=x$ при любом векторе x.

IV. Для каждого вектора x существует противоположный вектор $-x$, такой, что $x+(-x)=0$.

V. $1x=x$.

VI. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

VII. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

VIII. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

Таким образом, сложение векторов коммутативно и ассоциативно, а из аксиом III и IV вытекает существование обратной операции — вычитания векторов. При этом разностью $x-y$ является вектор $x+(-y)$. Аксиомы умножения векторов на числа показывают, что число 1 играет роль единицы также и при этом умножении; имеет место распределительный закон как относительно сложения чисел, так и относительно сложения векторов и ассоциативный закон относительно произведения чисел. Из аксиом V — VIII, кроме того, получаются равенства:

$$0x=0, \quad \alpha 0=0, \quad -x=(-1)x.$$

1.1. Показать, что совокупность всех векторов обычного пространства, совокупность всех векторов любой плоскости и любой прямой являются линейными пространствами.

Решение. Пространственные векторы определяются обычно как направленные отрезки, складывающиеся по правилу параллелограмма. При умножении на число α вектор изменяет свою длину в $|\alpha|$ раз и направлен параллельно самому себе (с изменением направления на противоположное при $\alpha<0$). Нуль-вектором является здесь отрезок нулевой длины, т. е. точка. Противоположный вектор определяется как вектор, имеющий ту же

длину, что и данный, но направленный в противоположную сторону. Выполнение всех требований I — VIII доказывается во втузовском курсе аналитической геометрии. Из этого следует, что множество пространственных векторов (направленных отрезков) образует линейное пространство. Поскольку при сложении векторов, расположенных на данной плоскости (прямой), и умножении их на числа получаются векторы той же плоскости (прямой), то тем самым линейным пространством будет являться и совокупность векторов каждой прямой и плоскости.

1.2. Показать, что совокупность всех многочленов степени не выше n является линейным пространством.

Решение. При сложении двух многочленов степени, меньшей или равной n, и умножении их на числа снова получаются многочлены степени не выше n, а так как при этом все сводится к сложению и умножению на числа коэффициентов при соответствующих степенях x, то выполнимость всех аксиом I — VIII становится очевидной: коэффициенты — также числа, а для чисел законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности выполнены. Остается только заметить, что роль нуль-вектора в линейном пространстве многочленов степени, меньшей или равной n, играет нулевой многочлен, а противоположным для $P(x)$ является многочлен $-P(x)$.

1.3. Показать, что линейным пространством является множество всех решений однородного линейного дифференциального уравнения $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$.

Решение. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что сумма двух решений данного уравнения и результат умножения решения на число снова являются решениями того же уравнения. Решением является также нулевая функция, и вместе с $y(x)$ решением является противоположная функция $-y(x)$. Аксиомы I — VIII выполнены, поскольку при сложении функций и умножении их на числа складываются и умножаются на числа значения функций в каждой точке.

1.4. n-мерным вектором называется упорядоченная система из n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *. Показать, что совокупность n-мерных векторов образует линейное пространство, если их сложение и умножение на число определить правилами:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Решение. Проверка аксиом I — VIII не вызывает затруднений, так как здесь снова дело сводится к сложению и умно-

* Часто n-мерный вектор записывается не строчкой $(x_1, \ldots, x_n)$, а столбцом $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

жению чисел. Нуль-вектором является нулевой набор чисел (0, 0, ..., 0), а противоположным для $(x_1, \ldots, x_n)$ набор $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

1.5. Показать, что совокупность векторов (направленных отрезков) обычного пространства совпадает с линейным пространством трехмерных векторов.

Решение. Если в пространстве ввести какую-либо декартову систему координат, то каждый вектор будет взаимно однозначно определен тройкой чисел (x_1, x_2, x_3) — своих проекций на декартовы оси. Из аналитической геометрии следует, что при сложении векторов складываются их проекции, а при умножении на число умножается на это число каждая из проекций, т. е. выполняются те же правила действий, что и в задаче **1.4** при $n=3$. Следовательно, векторы пространства можно отождествить с трехмерными векторами (x_1, x_2, x_3) и не различать соответствующие линейные пространства.

1.6. Образует ли линейное пространство совокупность n-мерных векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ с неотрицательными значениями $x_1, \ldots, x_n$?

Ответ. Не образует, так как в этой совокупности не содержатся противоположные векторы $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

1.7. Будет ли линейным пространством совокупность всех многочленов степени ровно n?

Ответ. Нет, так как при сложении двух многочленов одинаковой степени может получиться многочлен низшей степени, например $(x^2+x+1)+(2-x^2)=x+3$.

1.8. Пусть $\boldsymbol{x}=(1, -4,3)$, $\boldsymbol{y}=(2,1, -3)$. Найти $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}$. Найти z, если известно, что $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{z}=2\boldsymbol{y}$.

1.9. Показать, что линейными пространствами являются: а) множество всех функций, непрерывных на данном отрезке; б) совокупность всех степенных рядов с бесконечным радиусом сходимости.

1.10. Образуют ли линейное пространство множество n-мерных векторов, удовлетворяющих условию: а) $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, б) $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$?

1.11. Показать, что совокупность векторов плоскости совпадает с совокупностью двумерных векторов (x_1, x_2).

1.12. Сопоставим каждому многочлену степени не выше n строку из $n+1$ его коэффициентов, начиная со свободного члена и кончая коэффициентом при x^n. Показать, что при этом линейное пространство многочленов можно отождествить с пространством $(n+1)$-мерных векторов. Что означают с точки зрения многочленов векторы $(\alpha, 0, \ldots, 0)$, $(\alpha, \beta, 0, \ldots, 0)$ и т. д.?

2. Линейная зависимость векторов. Вектор $\boldsymbol{x}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, если найдется такой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, что

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{a}_m.$$

Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае система векторов называется *линейно независимой*. Часто используют и другую эквивалентную форму этого определения: система векторов $a_1, \ldots, a_m$ называется линейно зависимой, если существует такой набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, где хотя бы одно из чисел α_i отличное от нуля, что имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = 0.$$

Если же это равенство выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то система векторов линейно независима.

Линейное пространство называется *n-мерным*, если в нем существует линейно независимая система из n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, такая, что всякий вектор x этого пространства представляется в виде линейной комбинации

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Система $e_1, \ldots, e_n$ при этом называется *базисом линейного пространства*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ — *координатами* вектора x относительно этого базиса. Можно показать, что в n-мерном линейном пространстве всякая система из $n+1$ вектора линейно зависима. Иными словами, в n-мерном пространстве линейно независимая система состоит самое большее из n векторов, причем всякая линейно независимая система из n векторов является базисом.

Линейное пространство называется *бесконечно мерным*, если в нем существуют линейно независимые системы из любого числа векторов.

1.13. Показать, что всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

Решение. Нуль-вектор всегда можно представить в виде линейной комбинации любых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$0 = 0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_m.$$

Поэтому по определению система $0, a_1, \ldots, a_m$ линейно зависима.

1.14. Показать, что всякая система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

Решение. Если в системе $a_1, a_2, \ldots, a_m$, например, $a_1 = a_2$, то система линейно зависима, так как вектор a_1 можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов:

$$a_1 = 1a_2 + 0a_3 + \ldots + 0a_m.$$

1.15. Показать, что система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, сама линейно зависима.

Решение. Если, к примеру, в системе $a_1, \ldots, a_m$ векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы, то один из них выражается через остальные:

$$a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3.$$

Но тогда a_1 есть линейная комбинация всех векторов системы:

$$a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3 + 0a_4 + \ldots + 0a_m.$$

Это значит, что данная система векторов линейно зависима.

1.16. Показать, что всякая подсистема линейно независимой системы векторов также линейно независима.

Указание. Это вытекает из утверждения задачи **1.15.**

1.17. В чем состоит геометрический смысл и каково условие линейной зависимости двух и трех векторов обычного пространства?

Решение. Определение линейной зависимости двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равносильно равенству $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}$, где α — некоторое число. По определению умножения числа на вектор это означает, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ расположены на одной или на параллельных прямых, т. е. коллинеарны. Обратно, коллинеарные векторы отличаются один от другого только числовым множителем, показывающим (по модулю) соотношение длин этих векторов, и поэтому такие векторы линейно зависимы. Известно, что необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ является равенство нулю их векторного произведения: $[\boldsymbol{ab}]=0$.

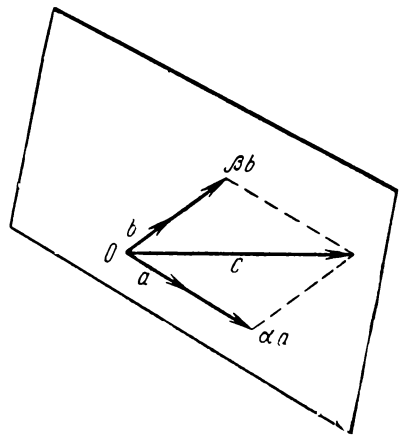


Рис. 1

Если система из трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима, то по определению один из них выражается через два других по формуле $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$. Геометрически это означает, что вектор $\boldsymbol{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$ (при условии, что все три вектора параллельно перенесены в общее начало 0). Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, т. е. расположены в одной или в параллельных плоскостях. Обратно, если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то будучи сведены в общее начало 0 они расположатся в одной плоскости, а тогда с помощью параллельных проекций один из них можно разложить по двум другим (рис. 1): $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$. Это значит, что такие три вектора линейно зависимы. Известно, что необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\boldsymbol{abc}=0$.

1.18. Показать, что любые четыре вектора обычного пространства линейно зависимы.

Решение. Если в системе $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ первые три вектора линейно зависимы, то и вся система линейно зависима (см. **1.15**). Допустим, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независимы. Тогда они некомпланарны (см. **1.17**), т. е. после приведения к общему началу не будут располагаться в одной плоскости. В этом случае с помощью параллельных проекций четвертый вектор $\boldsymbol{d}$ можно разложить по $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (рис. 2):

$$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}.$$

Это равенство означает, что система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ линейно зависима.

Заметим, что доказанное свойство равносильно трехмерности обычного пространства.

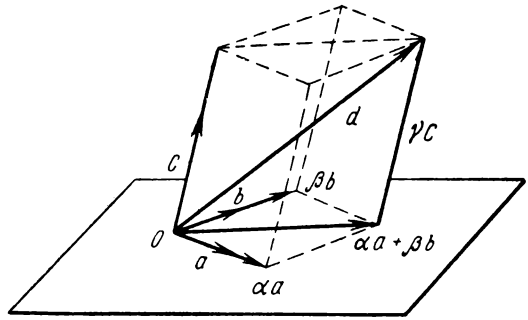


Рис. 2

1.19. Доказать, что если два вектора даны своими разложениями по ортам

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

то они линейно зависимы тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Указание. См. **1.17.** Напомним формулу векторного произведения

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

1.20. Будут ли линейно зависимы следующие системы векторов обычного пространства:

а) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;
б) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;
в) $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$, $4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$;
г) $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$?

Указание. См. **1.17** и **1.19.** Напомним, что смешанное произведение трех векторов равно определителю, строчки которого состоят из координат этих векторов.

1.21. Показать, что линейное пространство многочленов степени не выше n является $(n+1)$-мерным. Найти базис этого пространства.

Решение. В качестве базиса указанного пространства можно взять многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$. В самом деле, во-первых, они линейно независимы, так как тождественное равенство $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$ возможно только при нулевых значениях коэффициентов α_i, и поэтому ни одна из степеней x^k не может быть линейно выражена через остальные степени. Во-вторых, всякий многочлен есть линейная комбинация степеней x^k:

$$P(x) = \beta_0 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n x^n.$$

Поскольку базис состоит из $n+1$ многочлена, то рассматриваемое пространство $(n+1)$-мерное.

1.22. Показать, что линейное пространство всех решений линейного дифференциального уравнения $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ является n-мерным.

Решение. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что у всякого однородного линейного уравнения существует фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которая линейно независима и порождает общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Иными словами, всякое решение есть линейная комбинация функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с некоторыми числовыми коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Тем самым система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образует базис пространства всех решений, и это пространство является n-мерным.

Например, все решения уравнения $y'' + y = 0$ образуют двумерное линейное пространство с базисом $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Всякое решение имеет вид $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где постоянные C_1 и C_2 определяются начальными условиями.

1.23. Показать, что векторы

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

образуют базис линейного пространства всех n-мерных векторов (см. **1.4**).

1.24. Показать, что линейные пространства задачи **1.9** являются бесконечно мерными.

Указание. Эти пространства содержат все степени $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, любой набор которых линейно независим.

3. Евклидово пространство. Линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем задано *скалярное произведение векторов*, т. е. действие, сопоставляющее каждым двум векторам x и y некоторое число $\alpha = xy$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

IX. $xy = yx$;

X. $(x+y)z = xz + yz$;

XI. $(\alpha x)y = \alpha(xy)$;

XII. $x^2 = xx > 0$ при $x \neq 0$.

Таким образом, скалярное произведение коммутативно, дистрибутивно, числовой множитель выносится за знак скалярного произведения и скаляр-

ный квадрат каждого ненулевого вектора положителен. Кроме того, отсюда вытекает, что $0x = 0$.

С помощью скалярного произведения в линейном пространстве определяются понятия *ортогональности векторов* и *нормы вектора*: а) векторы x и y называются ортогональными, если их скалярное произведение xy равно нулю; б) нормой вектора x называется квадратный корень из его скалярного квадрата: $|x| = \sqrt{xx}$.

В обычной трехмерной геометрии скалярное произведение определяется равенством

$$xy = |x|\,|y| \cos\varphi, \tag{1.1}$$

где φ — угол между векторами x и y, $|x|$, $|y|$ — их длины. В курсе векторной алгебры показывается, что аксиомы IX—XII выполняются. Из определения (1.1) следует, что норма вектора x совпадает с его длиной, а из $xy = 0$ вытекает, что $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. x и y перпендикулярны.

В пространстве n-мерных векторов скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ задается равенством

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{1.2}$$

В линейных пространствах, элементами которых являются функции, заданные на отрезке $[a, b]$ (в частности, многочлены), скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяется по формуле

$$f\varphi = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{1.3}$$

или по более общей формуле

$$(f\varphi)_\rho = \int_a^b \rho(x)\,f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{1.4}$$

где $\rho(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная на $[a, b]$ функция, называемая весовой функцией скалярного произведения (1.4). Если в (1.4) интеграл равен нулю, то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)$.

Вектор евклидова пространства называется *единичным или ортом*, если его норма равна единице. Всякий ненулевой вектор можно превратить в единичный (пронормировать), умножив его на величину, обратную норме. В случае векторов обычного пространства (направленных отрезков) единичный вектор имеет длину, равную единице.

1.25 Показать, что определения (1.2), (1.3), (1.4) удовлетворяют аксиомам скалярного произведения IX—XII.

1.26. Показать, что для ортогональных векторов евклидова пространства соблюдается теорема Пифагора $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. Какой геометрический факт заключен в равенстве $|x+y| = |x-y|$, справедливом для ортогональных векторов?

1.27. Система, состоящая из попарно ортогональных ненулевых векторов, называется ортогональной. Если при этом все векторы системы единичные, то система называется *ортонормированной*. Показать, что относительно определения (1.2) базисные векторы $e_1(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2(0, 1, \ldots, 0) \ldots$, $e_n(0, 0, \ldots, 1)$ образуют ортонормированную систему.

1.28 Доказать, что всякая ортогональная система векторов линейно независима.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ ортогональная система из m векторов, т. е. $\boldsymbol{a}_i \neq 0$ и $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = 0$ при $i \neq j$. Допустим, что эта система линейно зависима. Тогда один из векторов, например $\boldsymbol{a}_1$, линейно выражается через остальные:

$$\boldsymbol{a}_1 = \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{a}_1$ и воспользуемся свойствами IX—XI скалярного произведения:

$$\boldsymbol{a}_1^2 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 = (\alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m)\,\boldsymbol{a}_1 = \\ = \alpha_2(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1) + \ldots + \alpha_m(\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{a}_1).$$

По условию $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 = \ldots = \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{a}_1 = 0$, и поэтому правая часть последнего равенства равна нулю. Однако левая часть вследствие аксиомы XII и условия $\boldsymbol{a}_1 \neq 0$ отлична от нуля. Полученное противоречие показывает, что данная система не может быть линейно зависимой, что и требовалось доказать.

1.29. Показать, что в n-мерном евклидовом пространстве ортогональная система не может содержать более n векторов.

Указание. Использовать утверждение задачи **1.28** и определение n-мерного пространства.

1.30. Показать, что от всякого базиса евклидова пространства можно перейти к ортогональному базису.

Решение. Такой переход можно осуществить неоднозначно. Ниже указывается один из способов перехода к ортогональному базису, называемый обычно процессом ортогонализации. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ какой-то базис n-мерного пространства. Построим новый набор из n векторов по формуле

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1,\\
&\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \lambda\boldsymbol{b}_1,\\
&\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \mu\boldsymbol{b}_2 - \nu\boldsymbol{b}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n - \tau\boldsymbol{b}_{n-1} - \ldots - \theta\boldsymbol{b}_1,
\end{aligned}$$

где λ, μ, ν, ..., θ — некоторые числа. Заметим, прежде всего, что ни один из векторов $\boldsymbol{b}_i$ не равен нулю. В самом деле, $\boldsymbol{b}_1 \neq 0$, так как $\boldsymbol{a}_1 \neq 0$ (базис не может содержать нуль-вектора, см. **1.13**). Если бы $\boldsymbol{b}_k = 0$ $(k > 1)$, то вектор $\boldsymbol{a}_k$ линейно выражался через векторы $\boldsymbol{a}_{k-1}, \ldots, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1$, т. е. система из первых k векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ была бы линейно зависимой (см. **1.15**), что противоречит условию. Значит, все $\boldsymbol{b}_i \neq 0$. Определим теперь числа λ, μ, ..., θ так, чтобы векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ были попарно ортогональны. Для этого сначала подберем λ так, чтобы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ были ортогональны:

$$0 = \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{a}_2 - \lambda\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \lambda\boldsymbol{a}_1^2, \text{ т. е. } \lambda = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1^2}.$$

Теперь требуем, чтобы $\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_3=0$ и $\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3=0$, откуда получаем:

$$\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_3-\nu\boldsymbol{b}_1^2=0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_3-\mu\boldsymbol{b}_2^2=0, \text{ т. е.}$$

$$\nu=\frac{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{b}_1^2}, \qquad \mu=\frac{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{b}_2^2}.$$

Далее, из условия ортогональности $\boldsymbol{b}_4$ первым трем уже найденным векторам, находим коэффициенты в четвертой строке и т. д., пока не дойдем до последней строки. Заметим, что делить при этом всегда приходится на квадрат ненулевого вектора, т. е. на отличное от нуля число, так что искомые коэффициенты всегда существуют.

В результате построена ортогональная система из n ненулевых векторов. Вследствие утверждения задачи **1.28** она линейно независима и поэтому образует новый, ортогональный базис.

1.31. С помощью скалярного произведения (1.3) перейти от базиса $1, x, x^2$ в пространстве многочленов степени не выше второй на отрезке $[-1,1]$ к ортогональному базису.

Решение. Проводя процесс ортогонализации, строим новые многочлены вместо данных: $f_1=1$, $f_2=x-\lambda f_1=x-\lambda$, $f_3=x^2-\mu f_2-\nu f_1$. Потребуем сначала, чтобы f_1 и f_2 были ортогональны:

$$0=f_1f_2=\int_{-1}^{1}1\cdot(x-\lambda)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\lambda x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\lambda-\frac{1}{2}-\lambda=-2\lambda.$$

Следовательно, $\lambda=0$. Вычислим скалярные квадраты:

$$f_1f_1=\int_{-1}^{1}1^2\cdot dx=2;$$

$$f_2f_2=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{x}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Находим теперь числа μ и ν из условий $f_1f_3=0$, $f_2f_3=0$:

$$0=f_1f_3=f_1x^2-\nu f_1f_1=\int_{-1}^{1}1\cdot x^2\,dx-\nu 2=\frac{2}{3}-2\nu,$$

$$0=f_2f_3=f_2x^2-\mu f_2f_2=\int_{-1}^{1}xx^2\,dx-\mu\frac{2}{3}=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{3}\mu=-\frac{2}{3}\mu.$$

Следовательно, $\nu=\frac{1}{3}$, $\mu=0$. Таким образом, новый ортогональный базис многочленов следующий:

$$f_1=1,\ f_2=x,\ f_3=x^2-\frac{1}{3}.$$

1.32. Показать, что $a_1 = i + j$, $a_2 = 3i - j + k$, $a_3 = 4j - k$ образуют базис векторов обычного пространства. Процессом ортогонализации получить из него ортогональный базис и пронормировать его векторы.

1.33. С помощью скалярного произведения (1.3) перейти от базиса $1, x, x^2$ в пространстве многочленов степени не выше второй на отрезке $[0,1]$ к ортогональному и затем к ортонормированному базису.

1.34. Найти многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, ортогональный на отрезке $[0,1]$ в смысле произведения (1.3) всем многочленам низшей степени (в том числе и нулевой степени). Показать, что такой многочлен определяется однозначно.

1.35. Используя скалярное произведение (1.2), перейти от базиса $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ в пространстве четырехмерных векторов к ортонормированному базису.

1.36. Показать, что тригонометрическая система

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

ортогональна на отрезке $[-l, l]$ в смысле произведения (1.3).

§ 2. АЛГЕБРА МАТРИЦ

1. Матрицы. Линейные действия с ними. Матрицей называется прямоугольная таблица из mn чисел, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*, индекс i означает номер строки, а индекс j — номер столбца, в которых стоит этот элемент. Числа $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} \ldots$ образуют *главную диагональ матрицы*. Размеры прямоугольной матрицы обозначаются $(m \times n)$. В частности, строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть пример $(1 \times n)$-матрицы, а столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ — пример $(m \times 1)$-матрицы. В большинстве случаев ограничиваются рассмотрением только *квадратных матриц*, когда $m = n$. В этом случае говорят просто о матрице *порядка* n.

Две $(m \times n)$-матрицы называются *равными*, если на всех соответствующих местах у них стоят одинаковые числа, т. е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$. Матрицы разных размеров *не сравниваются*.

Линейными операциями над матрицами называются сложение матриц и умножение их на числа. Сложение определяется только для матриц оди-

наковых размеров поэлементно:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число производится также поэлементно:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.37. Показать, что сложение матриц данного размера и умножение их на числа удовлетворяют аксиомам I—VIII линейного пространства (§ 1, п. 1), т. е. совокупность всех $(m \times n)$-матриц образует линейное пространство. Какова его размерность? Указать базис этого пространства.

Решение. Поскольку сложение матриц и умножение их на число сводятся к поэлементному сложению и умножению чисел, то аксиомы I, II, V—VIII вытекают из соответствующих свойств умножения и сложения чисел. Роль нулевой $(m \times n)$-матрицы, как легко проверить, играет матрица, состоящая из нулей:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нее $A + 0 = A$, какова бы ни была $(m \times n)$-матрица A. Противоположной является матрица $-A = (-a_{ij})$, так как для нее $A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = 0$. Следовательно, и аксиомы III, IV выполнены, так что множество $(m \times n)$-матриц образует линейное пространство.

Обозначим E_{ij}-матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а на остальных местах стоят нули. Например, в случае квадратных матриц второго порядка

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы линейно независимы, так как ни одна из них не может представляться в виде линейной комбинации трех других. В самом деле, линейная комбинация, например трех последних,

$$\alpha E_{12} + \beta E_{21} + \gamma E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

имеет в левом верхнем углу 0 и поэтому при любом выборе чисел α, β, γ не может совпасть с E_{11}, у которой на этом месте

стоит 1. С другой стороны, произвольная матрица второго порядка линейно выражается через E_{ij}:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}=$$
$$=\alpha E_{11}+\beta E_{12}+\gamma E_{21}+\delta E_{22}.$$

Подобным же образом и для матриц размера $(m\times n)$доказывается, что E_{ij} линейно независимы и произвольная матрица A по ним раскладывается так:

$$A=(a_{ij})=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+\ldots+a_{mn}E_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}.$$

Следовательно, матрицы E_{ij} образуют базис в линейном пространстве $(m\times n)$-матриц, размерность этого пространства равна числу матриц E_{ij}, т. е. равна mn.

В частности, линейное пространство $(1\times n)$-матриц совпадает, по существу, с пространством n-мерных векторов, а линейное пространство $(m\times 1)$-матриц-столбцов — с пространством m-мерных векторов. Поэтому в этих случаях вместо матриц говорят о векторах-строках и векторах-столбцах.

1.38. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти $A+B$, $A-B$, $3A+2B$.

1.39. Найти матрицу T, для которой $A+2T=3B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

1.40. Выписать разложение матрицы A предыдущей задачи по базисным матрицам E_{ij} (**1.37**).

2. Умножение матриц. *Произведение матрицы A на матрицу B* определяется следующим образом: для того чтобы получить элемент c_{ij} матрицы $C=AB$, надо элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и результаты сложить:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{is}b_{sj}. \tag{2.1}$$

Из этого определения вытекает, что произведение возможно осуществить лишь тогда, когда *число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B*. Схематически размеры сомножителей и произведения можно представить формулой

$$\boxed{m\times s}\cdot\boxed{s\times n}=\boxed{m\times n}. \tag{2.2}$$

ЗАВОТ
КОМИТЕТ

Квадратные матрицы можно перемножать друг на друга только тогда, когда они имеют одинаковый порядок, т. е. $m = s = n$. В результате получится снова квадратная матрица того же порядка.

Умножение матриц обладает следующими свойствами *:

I. $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность).

II. $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$ (дистрибутивность).

III. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, где α — любое число.

IV. $AO = OA = O$, где O — нулевая матрица.

V. $AI = IA = A$, где I — единичная матрица, т. е. квадратная матрица, определяемая равенством

$$I = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.3}$$

VI. $|AB| = |A||B|$, т. е. определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

Важно отметить, что умножение матриц некоммутативно, т. е. в общем случае $AB \neq BA$. Поэтому при перемножении матриц во избежание ошибок следует строго придерживаться заданного порядка следования множителей.

1.41. В каком случае вектор-строку можно умножать на вектор-столбец? Записать результат такого умножения.

Решение. Вектор-строка как матрица имеет размер $(1 \times n)$, а вектор-столбец — $(m \times 1)$. Умножение строки на столбец возможно только при $n = m$, т. е. при одинаковой их длине. В этом случае по формуле (2.2) получится

$$\boxed{1 \times n} \cdot \boxed{n \times 1} = \boxed{1 \times 1}\text{-матрица},$$

т. е. просто число, а именно,

$$(a_1 a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = c.$$

1.42. На изготовление некоторого изделия требуется 5 деталей типа A, 6 деталей типа B и 2 детали типа C. Это можно коротко записать строкой (5, 6, 2). Прейскурант цен в рублях на детали этих типов указан в столбце $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$. Какой смысл имеет произведение строки деталей на столбец цен?

---

* Предполагается, что размеры матриц таковы, что и левая, и правая части написанных равенств имеют смысл. Например, если это матрицы квадратные одного и того же порядка.

Решение.

$$(562)\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}3\\1{,}2\end{pmatrix}=5\cdot 0{,}5+6\cdot 0{,}3+2\cdot 1{,}2=2{,}5+1{,}8+2{,}4=6{,}7.$$

В результате получается стоимость всего изделия.

1.43. Четыре покупателя (обозначим их условно номерами) купили следующее количество фруктов, записанное в столбцах матрицы

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}5\\1{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1{,}5\\0{,}5 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ кг\text{ яблок}\\ кг\text{ груш}\\ кг\text{ слив.}\end{matrix}$$

Пусть $t=(0{,}6\ \ 1{,}0\ \ 0{,}8)$ — строка цен в рублях за эти фрукты, а e — столбец из четырех единиц. Найти произведения tA, Ae, tAe и объяснить их смысл.

Решение. При умножении строки t на матрицу A должна получиться снова строка из четырех чисел. Первое из них s_1 равно произведению строки t на первый столбец матрицы A и означает стоимость фруктов, приобретенных покупателем № 1:

$$s_1=(0{,}6\ \ 1{,}0\ \ 0{,}8)\begin{pmatrix}1\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}=0{,}6\cdot 1+1\cdot 1{,}5+0{,}8\cdot 0{,}5=2{,}5\ \text{руб.}$$

Аналогично,

$$s_2=(0{,}6\ \ 1{,}0\ \ 0{,}8)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=2\ \text{руб.},\quad s_3=0{,}8\ \text{руб.},\quad s_4=3{,}2\ \text{руб.}$$

Таким образом, $tA=(2{,}5\ \ 2{,}0\ \ 0{,}8\ \ 3{,}2)$ — строка стоимостей четырех покупок.

При умножении матрицы A на единичный столбец e складываются каждый раз элементы строк матрицы A. Поэтому

$$Ae=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}5\\1{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1{,}5\\0{,}5 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$$

— столбец, показывающий количество яблок, груш и слив, проданных всем четырем покупателям.

Произведение tAe можно найти двумя способами:

$$tAe = t(Ae) = (0{,}6 \;\; 1{,}0 \;\; 0{,}8)\begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}6 \cdot 5 + 1 \cdot 3{,}5 + 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 8{,}5,$$

$$tAe = (tA)e = (2{,}5 \;\; 2 \;\; 0{,}8 \;\; 3{,}2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2{,}5 + 2 + 0{,}8 + 3{,}2 = 8{,}5.$$

В обоих случаях, разумеется, получается одно и то же, а именно суммарная стоимость всех покупок.

1.44. Найти произведения AB и BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. A есть (2×3)-матрица, а B имеет размер (3×2), поэтому по формуле (2.2) AB есть квадратная матрица порядка 2, а BA — квадратная матрица порядка 3. Находим произведение AB. Возьмем первую строку матрицы A и умножим ее на первый столбец матрицы B. Получим элемент c_{11} произведения AB:

$$c_{11} = (1 \;\; 4 \;\; -1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + (-1)(-1) = 3.$$

Если теперь взять второй столбец из B, то найдем

$$c_{12} = (1 \;\; 4 \;\; -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 11.$$

Аналогично, умножая вторую строку из A на столбцы B, получим:

$$c_{21} = (2 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(-2) + 0 \cdot 1 + 1(-1) = -5,$$

$$c_{22} = (2 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 1.$$

Итак, $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

При некоторой тренировке строки и столбцы перемножаемых матриц можно не выписывать, а только, мысленно приставляя

строку к столбцу, записывать результаты перемножений, которые затем сложить. Так получено ниже произведение BA:

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0 & -8+0 & 2+0\\ 1+6 & 4+0 & -1+3\\ -1+2 & -4+0 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -8 & 2\\ 7 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

1.45. Для каких матриц имеют смысл оба произведения AB и BA? Для каких матриц возможно равенство $AB=BA$?

Решение. Если A имеет размер $(m\times n)$, а B — $(s\times t)$, то AB определено при $n=s$, а BA — при $t=m$. Следовательно, оба произведения определены только в том случае, если A — $(m\times n)$-матрица, а B — $(n\times m)$-матрица. Согласно формуле (2.2) AB — квадратная матрица порядка m, а BA — квадратная порядка n. Отсюда ясно, что равенство $AB=BA$ возможно лишь при $m=n$, когда A и B — квадратные матрицы одинакового порядка. Если выполнено равенство $AB=BA$, то матрицы A и B называются перестановочными.

1.46. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Найти все матрицы X, перестановочные с A, т. е. для которых $AX=XA$.

Решение. Из результата задачи **1.45** вытекает, что матрица X так же, как и A, должна быть квадратной второго порядка. Пусть $X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, тогда

$$AX=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad XA=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}.$$

Из равенства $AX=XA$ получаем теперь, что $\gamma=0$, $\alpha=\delta$. Следовательно, всякая матрица, перестановочная с данной матрицей A, имеет вид $X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$.

1.47. Матрица $S=\lambda I$, где I — единичная матрица порядка n, а λ — число, называется скалярной. Показать, что скалярная матрица перестановочна со всеми матрицами порядка n.

Решение. Используя свойство единичной матрицы, получаем:

$$SA=(\lambda I)\,A=\lambda\,(IA)=\lambda A,$$
$$AS=A\,(\lambda I)=\lambda\,(AI)=\lambda A,$$

т. е. $SA=AS$ для любой матрицы n-го порядка A.

1.48. Каковы матрицы, перестановочные со всеми матрицами второго порядка?

Решение. Пусть $X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перестановочна с любой матрицей второго порядка. В частности, она перестановочна и с базисными матрицами E_{ij} (см. **1.37**). Возьмем из них матрицы E_{11} и

E_{12} и умножим их на X справа и слева:

$$XE_{11}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix},\quad E_{11}X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$XE_{12}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & \gamma\end{pmatrix},\quad E_{12}X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

По условию $XE_{11}=E_{11}X$, что выполняется только при $\beta=0$ и $\gamma=0$. Из равенства $XE_{12}=E_{12}X$ получим $\alpha=\delta$. Следовательно,

$$X=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\alpha I$$

— скалярная матрица второго порядка (см. **1.47**).

1.49. Доказать утверждение: для того чтобы матрица X была перестановочна со всеми матрицами одного с ней порядка, необходимо и достаточно, чтобы X была скалярной матрицей.

Указание. Использовать результаты задач **1.47, 1.48.**

1.50. Показать, что всякий вектор-столбец можно умножить на любую вектор-строку. Записать результат такого умножения (сравнить с **1.41**).

1.51. Коммутатором $[AB]$ квадратных матриц порядка n называется матрица $[AB]=AB-BA$.

Показать, что коммутатор обладает следующими свойствами:

1) $[AB]=-[BA]$ (антикоммутативность).

2) $[[AB]C]+[[BC]A]+[[CA]B]=0$ (тождество Якоби).

3) $[AB]=0$ тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

1.52. Найти произведения AB, BA и коммутатор $[AB]$ матриц:

$$\text{а)}\ A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & -4\end{pmatrix},$$

$$\text{б)}\ A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1.53. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти произведения AC, ACD, BD, BC, $BCDA$.

1.54. Показать, что матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}$$

перестановочны. Найти их произведение.

1.55. Найти все матрицы, перестановочные с данными матрицами

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

1.56. Пусть E_{ij} — квадратная матрица, заполненная нулями, кроме одного места на пересечении i-й строки и j-го столбца, где стоит единица (см. **1.37**). Доказать, что матрицы E_{ij} перемножаются по закону

$$E_{ij}E_{jk}=E_{ik},\quad E_{ij}E_{mk}=0\qquad (m\neq j). \tag{2.4}$$

1.57. Всякая квадратная матрица $A=(a_{ij})$ раскладывается по матрицам E_{ij} (см. **1.37**):

$$A=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Показать сначала для $n=2$, а затем и для общего случая, что, зная закон перемножения (2.4) базисных матриц, можно восстановить формулу (2.1) произведения матриц A и B.

Указание. В общем случае записать $B=\sum\limits_{m,\,k=1}^{n} b_{mk}E_{mk}$, и затем, перемножая A и B, воспользоваться равенством (2.4).

1.58. Найти все квадратные матрицы B, для которых $AB=0$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

1.59. Найти общий вид матрицы B третьего порядка, для которой

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}B=0.$$

3. Степени матриц. Многочлены от матриц. Умножать матрицу A на себя можно только в том случае, если это квадратная матрица. Поэтому везде, где речь идет о степенях и многочленах от матриц, рассматриваются только квадратные матрицы данного порядка n. По определению p-й степени матрицы,

$$A^p=\underbrace{AA\ldots A}_{p\text{ раз}},\quad A^0=I\qquad\text{(единичная матрица)}.$$

Имеет место равенство

$$A^pA^q=A^qA^p=A^{p+q}.$$

Матрица A называется *нильпотентной*, если в некоторой степени l $A^l=0$. Наименьшее из чисел l, удовлетворяющих этому условию, называется *показателем нильпотентности*.

Матрица A называется *инволютивной*, если $A^2=I$, и *идемпотентной*, если $A^2=A$.

Пусть дан многочлен $P(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_k x^k$.
Значением этого многочлена при $x=A$, где A — квадратная матрица, называется следующая матрица:

$$P(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_k A^k.$$

Все действия, связанные со сложением и умножением многочленов, полностью переносятся на их матричные значения. Например, если $R(x)=P(x)\,Q(x)$, то $R(A)=P(A)\,Q(A)$. Всякие два многочлена от одной и той же матрицы перестановочны

$$P(A)\,Q(A)=Q(A)\,P(A).$$

Если $P(A)=0$ (нулевая матрица), то матрица A называется *корнем многочлена* $P(x)$.

1.60. Найти куб матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 2 & -5\end{pmatrix}.$$

1.61. Найти все степени матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A^4=0$$

Все следующие степени матрицы A также равны нулю. Таким образом, данная матрица является нильпотентной с показателем нильпотентности $l=4$.

1.62. Пусть

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Показать, что $J^2=-I$. Показать, что матрицы вида $Z=\alpha I+\beta J=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ складываются и перемножаются так же, как комплексные числа

$$Z=\alpha+\beta i.$$

Решение.

$$J^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I.$$

Пусть $Z_1=\alpha_1 I+\beta_1 J$, $Z_2=\alpha_2 I+\beta_2 J$, тогда

$$Z_1+Z_2=(\alpha_1+\alpha_2)\,I+(\beta_1+\beta_2)\,J,$$

$$Z_1Z_2=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\,I+(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)\,J.$$

Эти формулы совершенно аналогичны формулам сложения и умножения комплексных чисел $Z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ и $Z_2=\alpha_2+\beta_2 i$. Следовательно, матрицы вида $Z=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ с точки зрения алгебраических операций можно отождествить с комплексными числами $Z=\alpha+\beta i$.

1.63. Найти все инволютивные матрицы второго порядка.

Решение. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

тогда

$$A^2=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2\end{pmatrix}.$$

По условию инволютивности

$$A^2=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\alpha^2+\beta\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\delta=0,\ \alpha\gamma+\gamma\delta=0,$$

$$\beta\gamma+\delta^2=1.$$

Возможны два случая:

а) $\alpha+\delta\neq 0$, тогда из полученных уравнений следует $\beta=0$, $\gamma=0$, $\alpha=\delta=\pm 1$, т. е. искомыми являются в этом случае матрицы

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ и }-I=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

б) $\alpha+\delta=0$, тогда четыре написанных выше уравнения сведутся к одному условию $\alpha^2+\beta\gamma=1$. Поэтому инволютивными будут все матрицы вида $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha^2+\beta\gamma=1$. Например,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

1.64. Дан многочлен

$$P(x)=x^2-5x+6$$

и матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти $P(A)$.

Решение. Вычислим сначала A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P(A)=A^2-5A+6I=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ -6 & 8\end{pmatrix}.$$

Можно вычисление провести и по другому. Поскольку $P(x)=$ $=(x-2)(x-3)$, то

$$P(A)=(A-2I)(A-3I)=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ -6 & 8\end{pmatrix}.$$

1.65. Диагональной называется матрица, у которой все места вне главной диагонали заняты нулями. Доказать, что если D — диагональная матрица с $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали, то для любого многочлена $P(x)$ матрица $P(D)$ также диагональная с числами $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ на главной диагонали.

Решение. Ограничимся для простоты случаем $n=3$. Пусть

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},$$

тогда легко проверить, что

$$D^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^2\end{pmatrix},\quad D^3=\begin{pmatrix}\lambda_1^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^3\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad D^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^k & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^k\end{pmatrix}.$$

Поэтому если

$$P(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_kx^k,$$

то

$$P(D)=\alpha_0I+\alpha_1D+\ldots+\alpha_kD^k=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_1\lambda_3\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}\alpha_k\lambda_1^k & 0 & 0\\ 0 & \alpha_k\lambda_2^k & 0\\ 0 & 0 & \alpha_k\lambda_3^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\ldots+\alpha_k\lambda_1^k & 0 & 0\\ 0 & \alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\ldots+\alpha_k\lambda_2^k & 0\\ 0 & 0 & \alpha_0+\alpha_1\lambda_3+\ldots+\alpha_k\lambda_3^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}P(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & P(\lambda_3)\end{pmatrix}.$$

1.66. Доказать, что $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ является корнем многочлена $P(x)=x^2-2x+2$.

Решение.

$$P(A)=A^2-2A+2I=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0.$$

1.67. Вычислить указанные степени матриц

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^5,\quad \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}^p,\quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^3.$$

1.68. Пусть

$$T=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}.$$

Показать, что

$$T^2=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}2\varphi & \operatorname{sh}2\varphi\\ \operatorname{sh}2\varphi & \operatorname{ch}2\varphi\end{pmatrix}.$$

1.69. Пусть

$$T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Показать, что

$$T^m=\begin{pmatrix}\cos m\varphi & -\sin m\varphi\\ \sin m\varphi & \cos m\varphi\end{pmatrix}.$$

1.70. Показать, что если матрицы A и B перестановочны, то $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

1.71. Квадратная матрица V_{ik} $(i\neq k)$ образуется из единичной матрицы I и базисных матриц E_{ij} (см. **1.37**) по формуле

$$V_{ik}=I-E_{kk}+E_{ik}+E_{ki}.$$

Показать, что при любом выборе индексов i, k матрица V_{ik} является инволютивной, т. е. $V_{ik}^2=I$. Найти определитель этой матрицы.

Указание. Воспользоваться результатом задачи **1.56**.

1.72. В матрице A третьего порядка $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{12}=a_{23}=a_{31}$, $a_{13}=a_{21}=a_{32}$. Записать общий вид такой матрицы. Показать, что любая ее степень A^p и любой многочлен $P(A)$ имеют тот же вид.

1.73. Найти общий вид матрицы второго порядка, для которой $A^2=0$.

1.74. Найти общий вид идемпотентной матрицы ($A^2 = A$) второго порядка.

1.75. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что $A^p = 2^{p-1}A$.

1.76. Пусть $P(x) = x^3 - 3x$. Найти $P(A)$ и $P(B)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.77. Доказать, что данная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

является корнем многочлена $P(x = x^3 - 6x^2 + 8x - 9$.

1.78. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ есть корень многочлена

$$P(x) = x^2 - (\alpha + \delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma).$$

4. Транспонирование матриц. Операция над матрицей, при которой ее строки становятся столбцами, а столбцы строками, называется *транспонированием.* Транспонирование обозначается штрихом, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что при этом $(m \times n)$-матрица A переходит в $(n \times m)$-матрицу A'. В частности, вектор-столбец после транспонирования становится вектором-строкой. Если A — квадратная матрица порядка n, то и A' — квадратная того же порядка.

Транспонирование обладает следующими свойствами:

I. $(A')' = A$,

II. $(A \pm B)' = A' \pm B'$,

III. $(\lambda A)' = \lambda A'$,

IV. $(AB)' = B'A'$,

V. $|A| = |A'|$,

т. е. определитель квадратной матрицы при транспонировании не меняется.

Квадратная матрица называется *симметрической*, если $A' = A$, и *кососимметрической*, если $A' = -A$*. Следовательно, у симметрической матрицы $a_{ij} = a_{ji}$, т.е. элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой. У кососимметрической матрицы $a_{ij} = -a_{ji}$, откуда следует, что элементы главной диагонали равны нулю, а элементы, симметричные относительно этой диагонали, отличаются друг от друга знаком (или также равны нулю).

---

* Для неквадратных матриц равенства $A' = A$, $A' = -A$ невозможны ввиду несовпадения размеров матриц A и A'.

1.79. Проверить свойство IV транспонирования для матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. $AB=\begin{pmatrix}11 & 6\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $(AB)'=\begin{pmatrix}11 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$,

$$B'A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $(AB)'=B'A'$. При использовании этого свойства следует обратить внимание на то, что порядок сомножителей меняется.

1.80. Доказать, что $(A^p)'=(A')^p$.

Решение. Положим в свойстве IV $A=B$, тогда $(AA)'=A'A'$, т. е. $(A^2)'=(A')^2$, и при $p=2$ утверждение доказано. Предположим по индукции, что утверждение верно для степени $p-1$, и докажем его справедливость и для степени p. Полагая в том же свойстве IV $B=A^{p-1}$, получим $(A^p)'=(A^{p-1})'A'$. По предположению индукции $(A^{p-1})'=(A')^{p-1}$, поэтому $(A^p)'=(A')^{p-1}A'=(A')^p$, что и требовалось доказать.

1.81. Доказать, что всякую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Решение. Обозначим $P=\frac{1}{2}(A+A')$, $Q=\frac{1}{2}(A-A')$. Имеет место очевидное равенство

$$A=P+Q.$$

Осталось показать, что P — симметрическая, а Q — кососимметрическая матрицы. В самом деле, используя свойства транспонирования, получим

$$P'=\left[\frac{1}{2}(A+A')\right]'=\frac{1}{2}[A'+(A')']=\frac{1}{2}(A'+A)=P,$$

$$Q'=\left[\frac{1}{2}(A-A')\right]'=\frac{1}{2}[A'-(A')']=\frac{1}{2}(A'-A)=-Q.$$

1.82. Применить операцию транспонирования к базисным матрицам E_{ij} (**1.37**). Считая, что E_{ij} — квадратные матрицы, показать, что $S_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$ симметрическая, а $C_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ кососимметрическая матрицы.

Решение. По определению в матрице E_{ij} все элементы равны нулю, кроме единицы на пересечении i-й строки и j-го столбца. После транспонирования эта единица перейдет на пересечение j-й строки и i-го столбца, а на остальных местах будут только нули. Следовательно, получится матрица E_{ji}:

$$(E_{ij})'=E_{ji}.$$

Используя это равенство, получим

$$(S_{ij})' = (E_{ij} + E_{ji})' = (E_{ij})' + (E_{ji})' = E_{ji} + E_{ij} = S_{ij},$$
$$(C_{ij})' = (E_{ij} - E_{ji})' = E_{ji} - E_{ij} = -C_{ij}.$$

Значит, S_{ij} — симметрическая, а C_{ij} — кососимметрическая матрица.

1.83. Показать, что совокупность всех симметрических матриц порядка n образует линейное пространство размерности $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Пусть A и B — симметрические матрицы, т. е. $A' = A$, $B' = B$, тогда

$$(\lambda A)' = \lambda A' = \lambda A, \quad (A + B)' = A' + B' = A + B.$$

Следовательно, λA и $A + B$ — также симметрические матрицы. Это значит, что совокупность симметрических матриц замкнута относительно сложения матриц и умножения на число. Что касается аксиом линейного пространства, то они выполняются для всех вообще матриц и поэтому будут выполнены и для симметрических матриц. Таким образом, множество симметрических матриц образует линейное пространство (подпространство в множестве всех матриц данного порядка).

Поскольку симметрическая матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяет условию $a_{ij} = a_{ji}$, то из ее разложения по матрицам E_{ij} (см. **1.37** и **1.57**) получим:

$$A = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) =$$
$$= a_{11}E_{11} + \ldots + a_{nn}E_{nn} + a_{12}(E_{12} + E_{21}) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1n}(E_{n-1n} + E_{nn-1}).$$

Следовательно, всякая симметрическая матрица может быть разложена по матрицам E_{ii} и $S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ $(i < j)$ (см. **1.82**), которые сами являются симметрическими и в совокупности, как нетрудно проверить, линейно независимы. Вследствие этого матрицы E_{ij}, S_{ij} $(i < j)$ образуют базис в пространстве симметрических матриц. Размерность N равна числу базисных матриц. Это число можно подсчитать так: матриц вида E_{ii} всего n, матриц вида E_{1j} $(j > 1)$ ровно $(n-1)$, матриц вида E_{2j} $(j > 2)$ — $(n-2)$ и т. д. В результате

$$N = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.84. Написать транспонированные матрицы для матриц

$$(101), \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.85. Проверить выполнимость свойств транспонирования на примере матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 2\end{pmatrix}.$$

1.86. Представить матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Указание. См. **1.81.**

1.87. Выписать общий вид симметрических матриц второго и третьего порядка. Вычислить их определители.

1.88. Выписать общий вид кососимметрических матриц второго и третьего порядка. Вычислить их определители.

1.89. Показать, что совокупность кососимметрических матриц порядка n образует линейное пространство размерности

$$N=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Доказать, что матрицы C_{ij} (**1.82**) составляют базис этого пространства.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Линейный оператор и его матрица. Геометрический смысл квадратной матрицы выясняется с помощью понятия *линейного оператора*. Говорят, что в n-мерном векторном пространстве задан линейный оператор $\boldsymbol{A}$, если установлено соответствие, сопоставляющее каждому вектору $\boldsymbol{x}$ некоторый вполне определенный вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ того же пространства и подчиняющееся условиям линейности:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay},\quad \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{Ax}. \tag{3.1}$$

Выберем и зафиксируем некоторый базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейного пространства. Каждый вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в этом базисе координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — коэффициенты разложения $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$. Мы будем сейчас записывать эти координаты в столбец, т. е. считать, что в данном базисе

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Всякая матрица $A=(a_{ij})$ определяет линейный оператор $\boldsymbol{A}$ по формуле

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Иными словами, чтобы получить координаты преобразованного вектора $\boldsymbol{y}$, надо матрицу A умножить на столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$. В подробной

записи:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Обратно, в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$ каждому линейному оператору A вполне однозначно отвечает матрица $A = (a_{ij})$, и действие оператора осуществляется по формуле (3.2) или, что то же, по формуле (3.3). Чтобы найти матрицу линейного оператора, надо: 1) подвергнуть его действию базисные векторы e_i, 2) полученные векторы Ae_i разложить по базису:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n-1}e_n, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{3.4}$$

3) коэффициенты разложения (3.4) записать в виде матрицы A, помещая коэффициенты из строчек разложения (3.4) в соответствующие столбцы матрицы $A = (a_{ij})$.

Таким образом, *между совокупностью всех линейных операторов n-мерного линейного пространства и множеством всех квадратных матриц порядка n при выборе фиксированного базиса e_i устанавливается взаимно однозначное соответствие.* Это соответствие предопределяет ту важную роль, которую матрицы играют в разного рода приложениях.

1.90. Какой линейный оператор отвечает единичной матрице I и нулевой матрице 0?

Решение. Умножение на единичную матрицу столбца из координат вектора x по определению единичной матрицы не

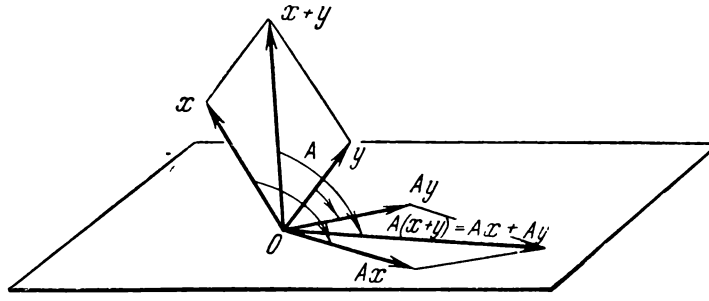


Рис. 3

меняет этого столбца. Поэтому $y = Ix = x$. Иными словами, единичная матрица определяет оператор, не меняющий ни одного вектора. Такой оператор называется *тождественным*. Он будет обозначаться I.

Для нулевой матрицы после ее умножения на столбец x получится нулевой столбец (нуль-вектор). Значит, соответствующий оператор обращает в нуль всякий вектор x. Такой оператор называется нулевым и обозначается 0.

1.91. В чем состоит геометрический смысл условий линейности (3.1) для операторов обычного трехмерного пространства?

Решение. Пусть под действием A векторы x и y переходят в Ax и Ay (рис. 3). Тогда первое условие из (3.1) требует, чтобы диагональ параллелограмма, построенного на векторах x и y, перешла в диагональ параллелограмма, построенного на Ax и Ay. Второе из условий линейности означает, что при изменении длины вектора x в сколько-то раз в столько же раз изменяется и длина вектора Ax (рис. 4). При $\alpha < 0$ как вектор αx, так и соответствующий ему вектор $A(\alpha x$ изменяют свое направление на противоположное.

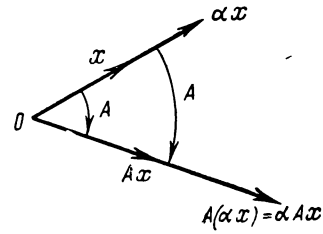


Рис. 4

1.92. Показать, что на плоскости xOy оператор T поворота всех векторов вокруг начала O на угол φ является линейным.

Найти его матрицу.

Решение. Чтобы доказать линейность оператора поворота T, обратимся к геометрическому смыслу условий (3.1) (см. **1.91**). При повороте на угол φ всякий параллелограмм передвигается как единое целое. Ясно, что при этом сохраняется диагональ, и первое из условий (3.1) выполнено. Второе вытекает из того факта, что длины векторов при повороте не меняются, и поэтому сохраняется коэффициент изменения длин α (рис. 5). Следовательно, оператор T линейный. Найдем его матрицу. Для этого подвергнем повороту базисные векторы i и j (рис. 6) и затем разложим по ним векторы Ti и Tj:

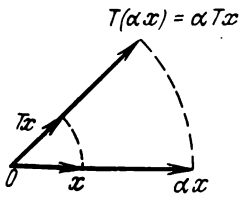


Рис. 5

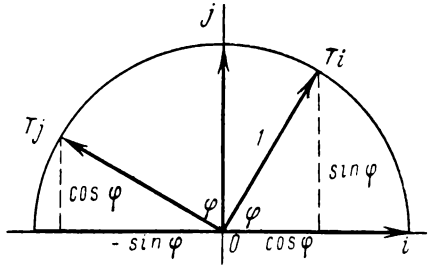


Рис. 6

$$Ti = \cos\varphi i + \sin\varphi j,$$
$$Tj = -\sin\varphi i + \cos\varphi j.$$

Записывая коэффициенты этого разложения из строчек в столбцы, найдем матрицу поворота на угол φ:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

1.93. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Какой линейный оператор она определяет на плоскости xOy?

Решение. Пусть $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ — произвольный вектор плоскости. Чтобы задать оператор, надо указать, каков будет преобразованный вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. По формуле (3.2)

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}=b\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}.$$

Следовательно, оператор $\boldsymbol{A}$ меняет местами координаты каждого вектора. Как видно из рис. 7, вектор $\boldsymbol{x}$ при этом претерпевает зеркальное отражение относительно биссектрисы 1-го координатного угла. Итак, данная матрица A является матрицей зеркального отражения относительно биссектрисы $x=y$.

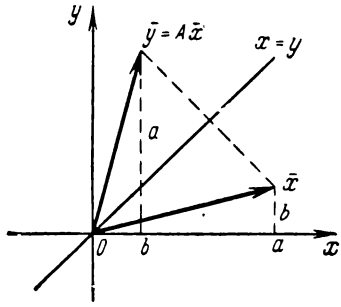


Рис. 7

1.94. Матрица

$$H=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}$$

определяет на плоскости xOy так называемый гиперболический поворот. Показать, что при этом повороте векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ скользят своими концами по ветвям гипербол $x^2-y^2=\pm 1$ навстречу друг другу при $\varphi>0$ и в противоположные стороны при $\varphi<0$.

Решение. Орт $\boldsymbol{i}$ имеет координаты (1,0), так что

$$H\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi\end{pmatrix}=\operatorname{ch}\varphi\boldsymbol{i}+\operatorname{sh}\varphi\boldsymbol{j}.$$

Поскольку $\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=1$, то конец вектора расположен на гиперболе $x^2-y^2=1$ (рис. 8 при $\varphi>0$). Аналогично, $H\boldsymbol{j}=\operatorname{sh}\varphi\boldsymbol{i}+\operatorname{ch}\varphi\boldsymbol{j}$ оканчивается на гиперболе $x^2-y^2=-1$ симметрично вектору $H\boldsymbol{i}$ относительно биссектрисы $x=y$. Если φ менять от нуля в положительную сторону (рис. 8), то $H\boldsymbol{i}$ и $H\boldsymbol{j}$ будут, скользя по ветвям гипербол, приближаться навстречу друг другу. Можно показать при этом, что значение гиперболического угла φ равно суммарной площади, заметенной обоими векторами $H\boldsymbol{i}$ и $H\boldsymbol{j}$ (заштрихованной на рис. 8). При отрицательном значении φ $\operatorname{ch}\varphi>0$, $\operatorname{sh}\varphi<0$, поэтому вектор $H\boldsymbol{i}$ будет скользить вниз по гиперболе $x^2-y^2=1$, а вектор $H\boldsymbol{j}$ — влево по гиперболе $x^2-y^2=-1$, т. е. они будут удаляться друг от друга.

1.95. Пусть $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ — фиксированный вектор обычного пространства. Сопоставим каждому вектору $\boldsymbol{x}$ векторное произведение $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{ax}]$ (рис. 9). Показать, что соответствие между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ есть линейный оператор $\boldsymbol{W}$. Найти его матрицу.

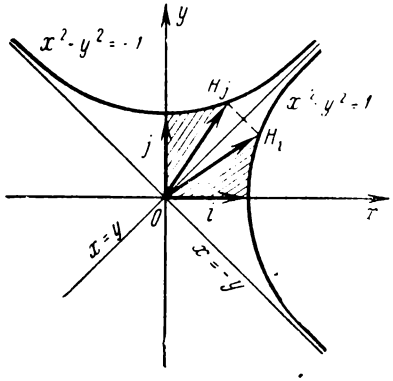


Рис. 8

Решение. Как известно из курса векторной алгебры,

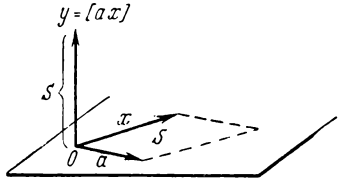


Рис. 9

векторное произведение обладает линейными свойствами

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})]=[\boldsymbol{ax}]+[\boldsymbol{ay}] \text{ и } [\boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{x})]=\alpha[\boldsymbol{ax}].$$

По определению оператора $\boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{Wx}=[\boldsymbol{ax}]$. Поэтому те же равенства можно записать еще так:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{Wx}+\boldsymbol{Wy},\quad \boldsymbol{W}(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{Wx},$$

а это и означает линейность оператора $\boldsymbol{W}$. Для отыскания его матрицы вычислим векторы $\boldsymbol{Wi}$, $\boldsymbol{Wj}$, $\boldsymbol{Wk}$:

$$\boldsymbol{Wi}=[\boldsymbol{ai}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\boldsymbol{i}+a_3\boldsymbol{j}-a_2\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{Wj}=[\boldsymbol{aj}]=-a_3\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+a_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{Wk}=[\boldsymbol{ak}]=a_2\boldsymbol{i}-a_1\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}.$$

Записывая коэффициенты разложения этих векторов по ортам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ из строчек в столбцы, получим искомую матрицу

$$W=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}.$$

1.96. Твердое тело V вращается вокруг неподвижной точки O. Показать, что вектор $\boldsymbol{g}$ момента количества движения тела получается из вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости с помощью некоторого линейного оператора $\boldsymbol{J}$. Указать его матрицу.

Решение. Пусть точка M определяется радиусом-вектором $r=OM$ (рис. 10). Как известно из механики, ее линейная скорость равна $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega r}]$. Следовательно, количество движения элемента массы dm, окружающего точку M, равно $\boldsymbol{v}dm=[\boldsymbol{\omega r}]\,dm$, а момент количества движения этого элемента —

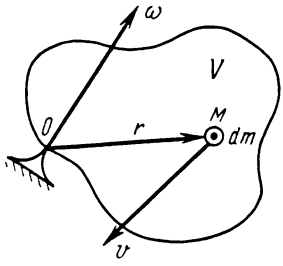


Рис. 10

$$d\boldsymbol{g}=[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}dm]=[\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{\omega r}]]\,dm.$$

Интегрируя по всему объему V элементарные моменты $d\boldsymbol{g}$, найдем весь момент количества движения тела V:

$$\boldsymbol{g}=\iiint\limits_V [\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{\omega r}]]\,dm. \qquad (3.5)$$

По этой формуле вектору мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ сопоставляется вектор момента количества движения $\boldsymbol{g}$, так что $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{J\omega}$, где $\boldsymbol{J}$ — некоторый оператор. Его линейность вытекает из линейности векторного произведения, применяемого здесь дважды, и из линейности тройного интеграла.

В механике линейный оператор $\boldsymbol{J}$ называют тензором моментов инерции. Чтобы раскрыть причину такого названия, найдем матрицу оператора $\boldsymbol{J}$. Для этого введем декартову систему координат с центром в точке O и положим в формуле (3.5) $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{i}$. Несложный подсчет показывает, что

$$[\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{ir}]]=(y^2+z^2)\,\boldsymbol{i}-xy\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k},$$

где (x, y, z) — координаты точки M. Поэтому из (3.5) получим

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{Ji}=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dm\boldsymbol{i}-\iiint\limits_V xydm\boldsymbol{j}-\iiint\limits_V xzdm\boldsymbol{k}=$$
$$=J_x\boldsymbol{i}-J_{xy}\boldsymbol{j}-J_{xz}\boldsymbol{k},$$

где $J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dm$ — момент инерции тела V относительно оси Ox, а J_{xy} и J_{xz} — центробежные моменты инерции (моменты девиации) относительно осей Ox, Oy и Oz. Аналогично подсчитывается, что

$$\boldsymbol{Jj}=-J_{xy}\boldsymbol{i}+J_y\boldsymbol{j}-J_{yz}\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{Jk}=-J_{xz}\boldsymbol{i}-J_{yz}\boldsymbol{j}+J_z\boldsymbol{k}.$$

Чтобы получить матрицу оператора $\boldsymbol{J}$, надо коэффициенты разложения $\boldsymbol{Ji}$, $\boldsymbol{Jj}$, $\boldsymbol{Jk}$ по ортам записать в столбцы:

$$J=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}.$$

Это и есть матрица тензора моментов инерции.

1.97. Матрица A третьего порядка определяет линейный оператор в обычном пространстве $Oxyz$. Какой геометрический смысл имеет определитель $|A|$ этой матрицы?

Решение. Пусть $\boldsymbol{r}_m = x_m\boldsymbol{i} + y_m\boldsymbol{j} + z_m\boldsymbol{k}$ $(m = 1, 2, 3)$ — три некомпланарных, т. е. не лежащих в одной плоскости, радиуса-вектора. Под действием оператора $\boldsymbol{A}$ эти векторы перейдут в новое положение $\boldsymbol{Ar}_m = x'_m\boldsymbol{i} + y'_m\boldsymbol{j} + z'_m\boldsymbol{k}$ $(m = 1, 2, 3)$, где (см. формулу (3.2))

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \\ z'_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \qquad 3.6)$$

Эти три формулы можно записать в виде одного матричного равенства

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

В самом деле, чтобы получить первый столбец матрицы, написанной здесь слева, надо по правилу умножения матриц все строки A множить на первый столбец матрицы справа, а это равносильно первой из формул (3.6 . Аналогично получаются и две другие.

Возьмем теперь определитель правой и левой частей формулы (3.7) и воспользуемся тем, что определитель произведения равен произведению определителей:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Так как определитель из координат трех векторов равен их смешанному произведению, то окончательно получим, что

$$(\boldsymbol{Ar}_1\boldsymbol{Ar}_2\boldsymbol{Ar}_3) = |A|(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3). \qquad (3.8)$$

Известно, что модуль смешанного произведения трех векторов равен объему построенного на них параллелепипеда. Пусть v — объем параллелепипеда, построенного на $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3$, а v' — на $\boldsymbol{Ar}_1$, $\boldsymbol{Ar}_2$, $\boldsymbol{Ar}_3$, тогда из (3.8) получаем

$$\operatorname{mod}|A| = \frac{v'}{v},$$

т. е. модуль определителя матрицы линейного оператора в обычном пространстве есть коэффициент искажения объемов под действием этого оператора.

Выясним теперь, какой смысл имеет знак определителя $|A|$. Если $|A| > 0$, то из (3.8) следует, что $(\boldsymbol{Ar}_1\boldsymbol{Ar}_2\boldsymbol{Ar}_3)$ и $(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)$ имеют одинаковые знаки, т. е. тройки векторов $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{Ar}_1$.

$\boldsymbol{Ar_2}$, $\boldsymbol{Ar_3}$ имеют одинаковые ориентации: либо обе правые, либо обе левые. В таком случае говорят, что оператор $\boldsymbol{A}$ сохраняет ориентацию пространства. При $|A|<0$ оператор A меняет ориентацию пространства, т. е. каждую правую тройку векторов переводит в левую, а левую — в правую.

Наконец, если $|A|=0$, то равенство (3.8) показывает, что $(\boldsymbol{Ar_1Ar_2Ar_3})=0$, т. е. эти три вектора компланарны. Значит, в этом случае под действием $\boldsymbol{A}$ всякий параллелепипед превращается в плоскую фигуру. Матрицы и соответствующие операторы, у которых $|A|=0$, называют поэтому *вырожденными*.

1.98. Оператор $\boldsymbol{\Pi}$ умножает всякий вектор $\boldsymbol{x}$ на число α. Показать, что это линейный оператор и найти его матрицу.

1.99. Показать, что матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

определяют на плоскости xOy операторы проектирования на оси Ox и Oy.

1.100. Показать, что матрица

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

определяет в пространстве $Oxyz$ оператор проектирования на плоскость xOy с зеркальным отражением относительно начала O.

1.101. Найти матрицу оператора проектирования векторов плоскости xOy на биссектрису $x=y$.

1.102. Записать матрицы зеркального отражения векторов плоскости xOy относительно прямых $y=-x$ и $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

1.103. Показать, что при гиперболическом повороте (см. **1.94**) векторы, идущие вдоль прямых $x=y$ и $x=-y$, остаются на этих прямых.

1.104. Найти матрицу оператора поворота пространства $Oxyz$ вокруг оси Ox на угол φ.

1.105. Оператор $\boldsymbol{W}$ определяется как векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ на все векторы $\boldsymbol{x}$ обычного пространства. Найти матрицу этого оператора.

1.106. В пространстве n-мерных векторов каждому вектору $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сопоставляется вектор $y=\boldsymbol{Ax}=(x_1, 0, \ldots, 0)$. Показать, что оператор $\boldsymbol{A}$ линейный и в случае плоскости ($n=2$) или обычного пространства ($n=3$) совпадает с оператором проектирования на первую координатную ось.

1.107. Матрица A второго порядка определяет линейный оператор $\boldsymbol{A}$ на плоскости xOy. Доказать, что модуль определителя $|A|$ есть коэффициент искажения площадей под действием $\boldsymbol{A}$.

Указание. См. **1.97.**

2. Действия с линейными операторами. Сложение операторов и умножение их на число определяются равенствами

$$(A+B)\,x = Ax + Bx, \quad (\alpha A)\,x = \alpha Ax. \tag{3.9}$$

При этом сумме операторов $A+B$ отвечает матрица $A+B$, а оператору αA – матрица αA.

Произведение операторов определяется как их последовательное применение

$$(AB)\,x = A\,(Bx), \tag{3.10}$$

т. е. сначала на вектор x действует оператор B, а затем к полученному вектору Bx применяется оператор A. Произведение матриц определено именно так, что оператору AB отвечает произведение соответствующих матриц AB.

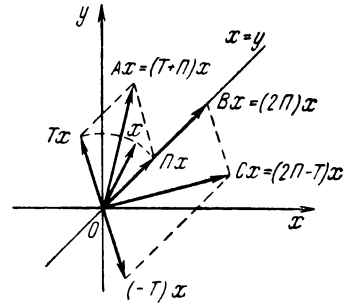


Рис. 11

1.108. Оператор Π проектирует все векторы плоскости xOy на прямую $x=y$, а оператор T поворачивает их вокруг начала O на угол $\frac{\pi}{4}$. Как действуют на вектор x операторы $A=\Pi+T$, $B=2\Pi$, $C=2\Pi-T$?

Решение. На рис. 11 показано, как по данному вектору x построить векторы Ax, Bx и Cx. При этом использовалось определение (3.9). Чтобы решить задачу аналитически, надо записать матрицы (см. **1.101** и **1.92**)

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

и вычислить

$$A = \Pi + T = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = 2\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = 2\Pi - T = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты векторов Ax, Bx, Cx, надо умножить матрицы A, B, C на столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из координат вектора x. Напри-

мер, если $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, то

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+3\sqrt{2}\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}=(1+3\sqrt{2})\,\boldsymbol{i}+(1+\sqrt{2})\,\boldsymbol{j},$$

и аналогично,

$$\boldsymbol{Bx}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{Cx}=(2-3\sqrt{2})\,\boldsymbol{i}+(2-\sqrt{2})\,\boldsymbol{j}.$$

1.109. Решить задачу **1.69** геометрическим путем.

Решение. Матрица

$$T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

определяет поворот векторов плоскости xOy на угол φ (см. **1.92**). Возвести эту матрицу в степень m означает повторить поворот m раз. Общий поворот, следовательно, совершится на угол $m\varphi$, так что

$$T^m=\begin{pmatrix}\cos m\varphi & -\sin m\varphi\\ \sin m\varphi & \cos m\varphi\end{pmatrix}.$$

1.110. Показать, что матрица $K=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$ определяет линейный оператор, состоящий из поворота всех векторов плоскости xOy на угол $\frac{\pi}{2}$ и из умножения их на число a.

Решение. Данную матрицу можно представить в виде произведения матриц

$$A=aI=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Первая из них определяет оператор умножения на число a:

$$\boldsymbol{Ax}=(aI)\,\boldsymbol{x}=aI\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x},$$

вторая есть матрица поворота на угол $\frac{\pi}{2}$, так как получается из матрицы T предыдущей задачи при $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\boldsymbol{Kx}=(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{Bx})$, что и требовалось показать.

1.111. Поворот пространственной системы координат из положения $Oxyz$ в новое положение $OXYZ$ можно осуществить в три шага:

1. Поворот на угол φ вокруг оси Oz. При этом ось Ox перейдет в так называемую линию узлов Ox_1 (рис. 12), а ось Oy — в положение Oy_1.

2. Поворот на угол θ вокруг линии узлов, в результате которого ссь Oz совпадает с OZ, а Oy_1 — с Oy_2.

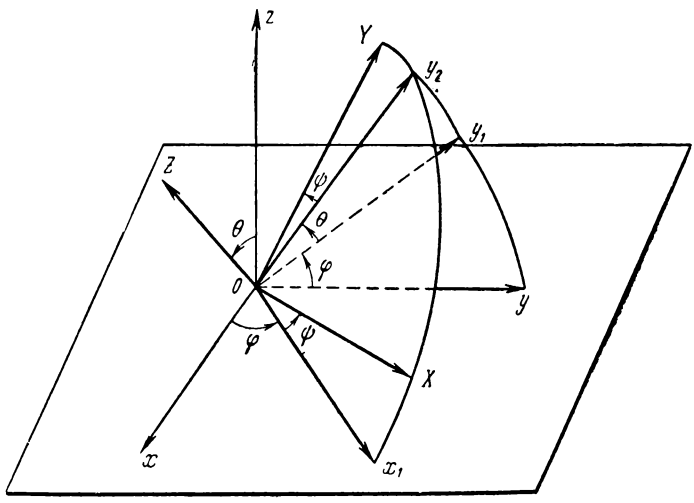


Рис. 12

3. Поворот на угол ψ вокруг оси OZ, после которого прежняя ось Ox попадает в положение OX, а Oy — в OY.

Углы φ, ψ, θ, определяющие указанный переход, называются углами Эйлера. Написать формулы преобразования координат при повороте осей.

Решение. Пусть (x, y, z) — координаты некоторой точки M в старой, а (X, Y, Z) — в новой системах координат. Переход от одной из них к другой можно представить как последовательное выполнение указанных трех поворотов T_1, T_2, T_3. Следовательно, по формулам (3.2) и (3.10) преобразование координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = T_3 T_2 T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где $T = T_3 T_2 T_1$ — произведение матриц данных поворотов. Обратите внимание на порядок множителей. Сначала делается поворот T_1, поэтому первой на столбец старых координат умножается именно матрица T_1, а затем уже T_2 и T_3.

Матрица первого поворота на угол φ вокруг оси Oz имеет вид (см. **1.104**)

$$T_1=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Оператор T_2 вращает векторы на угол θ вокруг оси Ox_1, и поэтому (в системе координат Ox_1y_1z)

$$T_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Наконец, T_3 определяет поворот на угол ψ вокруг оси OZ, и поэтому (в системе Ox_1y_2Z):

$$T_3=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Подсчитав произведение матриц $T_3T_2T_1$, получим искомую формулу преобразования координат в виде

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$ где матрица T выражается так:

$$T=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi\\ \cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi\\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

1.112. Пусть T — оператор поворота плоскости xOy вокруг начала O на угол $\frac{\pi}{6}$, а Π — проектирование векторов на ось Ox. Как действуют операторы ΠT, $T\Pi$, $\Pi+T$? Сделать чертеж. Найти матрицы этих операторов.

1.113. Оператор A на плоскости состоит в зеркальном отражении векторов относительно оси Oy и растяжении их в два раза. Записать матрицу этого оператора. Дан вектор $x=2i-3j$. Найти Ax.

1.114. Под действием оператора A в пространстве $Oxyz$ вектор x поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oz, а затем на него векторно умножается вектор $a=i+j+k$. Найти матрицу A. Выразить координаты вектора Ax через координаты вектора x.

§ 4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

1. Определение и непосредственное вычисление обратной матрицы. В этом параграфе, как и в предыдущем, рассматриваются только квадратные матрицы. Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

Можно показать, что обратная матрица (если она существует) определяется по данной матрице однозначно.

Теорема. *Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной,* т. е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Пусть A — невырожденная матрица и $|A|\neq 0$ — ее определитель. Обозначим A_{ij} *алгебраическое дополнение* * элемента a_{ij} и расположим алгебраические дополнения всех элементов в виде матрицы

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется присоединенной для матрицы A. Подчеркнем, что *алгебраические дополнения строк матрицы A ставятся в столбцы присоединенной матрицы A^**. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*. \tag{4.1}$$

Свойства обратной матрицы:

I. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

II. $|A^{-1}|=|A|^{-1}$,

III. $(A^{-1})^{-1}=A$,

IV. $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

Если матрица A определяет линейный оператор A в n-мерном линейном пространстве, переводящий вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$, то обратная матрица A^{-1} определяет обратный оператор, переводящий каждый вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ в вектор $\boldsymbol{x}$.

1.115. Найти обратную для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала определитель этой матрицы, раскрывая его разложением по первой строке:

$$|A|=3A_{11}+2A_{12}-A_{13}=3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+2\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot 1+2(-1)-0=1.$$

---

* Напомним, что $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, где минор M_{ij} есть определитель на единицу низшего порядка, который получается из данного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Обратная матрица A^{-1} существует, так как $|A| \neq 0$. Строим присоединенную матрицу A^*. Алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы A уже найдены в процессе вычисления определителя, остальные подсчитываются аналогично:

$$A_{11}=1, \quad A_{12}=-1, \quad A_{13}=0,$$
$$A_{21}=-12, \quad A_{22}=17, \quad A_{23}=-2,$$
$$A_{31}=5, \quad A_{32}=-7, \quad A_{33}=1.$$

Ставя алгебраические дополнения из строк в столбцы, запишем присоединенную матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в данном случае $|A|=1$, то A^{-1} совпадает с A^* (см. (4.1)). Для проверки правильности вычисления матрицы A^{-1} перемножим A и A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3-2 & -36+34+2 & 15-14-1 \\ 1-1 & -12+17-4 & 5-7+2 \\ 2-2 & -24+34-10 & 10-14+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

Получилась, как и должно быть, единичная матрица I.

1.116. Найти обратную для матрицы второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Решение. Для существования обратной матрицы надо потребовать, чтобы $|A|=\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$. Алгебраические дополнения равны $A_{11}=\delta$, $A_{12}=-\gamma$, $A_{21}=-\beta$, $A_{22}=\alpha$. Поэтому

$$A^*=\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы найти обратную для матрицы второго порядка, надо переставить местами элементы главной диагонали, изменить знаки у элементов второй диагонали и все полученные числа разделить на определитель.

Это правило удобно запомнить, чтобы сразу писать обратные для матриц второго порядка. Например, если $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

то $|A|=2$, и по указанному правилу

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2{,}5\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

1.117. Пусть $A^3=0$. Показать тогда, что

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2.$$

Решение. Перемножим матрицы $I-A$ и $1+A+A^2$. Если они взаимно обратные, то должна получиться единичная матрица:

$$(I-A)(I+A+A^2)=I-A+A-A^2+A^2-A^3=I-A^3=I,$$

так как по условию $A^3=0$.

1.118. Показать, что $(A^p)^{-1}=(A^{-1})^p$.

Решение. Пусть, например, $p=2$. Тогда

$$A^2(A^{-1})^2=AAA^{-1}A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I.$$

Следовательно, $(A^{-1})^2$ есть обратная матрица для A^2, т. е. $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$. Случай $p>2$ рассматривается совершенно так же.

1.119. Показать, что инволютивная матрица сама себе обратная.

Решение. По определению инволютивной матрицы $A^2=I$, т. е. $AA=I$. Так что определение (4.1) обратной матрицы выполнено, если считать $A=A^{-1}$.

1.120. Предполагая, что A — невырожденная матрица, решить матричные уравнения $AX=B$ и $YA=B$.

Решение. Умножим обе части первого уравнения слева на A^{-1} и проделаем соответствующие алгебраические действия:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,\quad IX=A^{-1}B,\quad X=A^{-1}B.$$

Умножая уравнение $YA=B$ на A^{-1} справа, получим аналогично $Y=BA^{-1}$.

Заметим, что если A^{-1} и B не перестановочны, то $X\neq Y$, и поэтому нельзя в общем случае говорить о делении матриц — символа $\frac{B}{A}$ для матриц не существует. Иногда говорят о правом частном X и о левом частном Y.

1.121. Решить уравнения предыдущей задачи для

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A|=1,\quad A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & -11\end{pmatrix},$$

$$Y=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 11\\ 2 & -7\end{pmatrix}.$$

1.122. Найти обратную для матрицы поворота на угол φ (см. **1.92**).

Решение.

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Этот результат легко получается по правилу задачи **1.116** либо прямо из геометрического смысла матрицы T: обратный поворот осуществляется на угол $(-\varphi)$, и при этом $\cos\varphi$ не меняется, а $\sin\varphi$ меняет знак.

1.123. Оператор $\boldsymbol{A}$ в пространстве $Oxyz$ состоит в последовательном выполнении поворота $\boldsymbol{T}_1$ вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{4}$, растяжения Π вдоль осей Ox и Oz в 2 раза, поворота $\boldsymbol{T}_2$ вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{2}$. Найти матрицу обратного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Решение. Выпишем матрицы указанных операторов (проверьте!):

$$T_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Pi=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

По определению данного оператора $\boldsymbol{A}$ его матрица равна $A=T_2\Pi T_1$, поэтому по свойству I обратной матрицы

$$A^{-1}=T_1^{-1}\Pi^{-1}T_2^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

1.124. Найти обратные для матриц второго порядка

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

1.125. При каких значениях α и β существует обратная у матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 2\beta & \alpha\\ 2\beta & 0 & -\alpha\\ \alpha & \alpha & 0\end{pmatrix}.$$

Найти A^{-1}.

1.126. Найти обратные для матриц третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.127. Показать, что $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{l-1}$, если $A^l = 0$.

Указание. См. **1.117.**

1.128. Отрицательные степени невырожденной матрицы A определяются равенством $A^{-p} = (A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ (см. **1.118**). Показать, что для отрицательных степеней сохраняется правило сложения показателей $A^p A^q = A^{p+q}$ (см. § 2, п. 3).

1.129. Оператор $\boldsymbol{A}$ плоскости xOy состоит в последовательном применении поворота $\boldsymbol{T}_1$ вокруг начала O на угол $\frac{\pi}{6}$, растяжения длин векторов $\mathbf{\Pi}$ в 2 раза вдоль оси Ox и в 4 раза вдоль оси Oy, зеркального отражения $\boldsymbol{З}$ относительно биссектрисы $x = y$, поворота $\boldsymbol{T}_2$ на угол $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Найти матрицы A и A^{-1}.

1.130. Решить матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ -5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.131. Доказать, что если A и B перестановочны, то перестановочны и обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}.

Указание. Использовать свойство I обратной матрицы.

1.132. Пусть A и B — невырожденные квадратные матрицы порядков m и n соответственно*. Показать, что уравнение

$$AXB = C$$

разрешимо только в случае, когда матрица C имеет размер $m \times n$. Записать выражение для X. Каковы размеры матрицы X? Решить данное уравнение, если

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Элементарные преобразования и их использование для нахождения обратной матрицы. *Элементарными преобразованиями первого рода* матрицы A называются:

---

* Не исключено, что $m = n$.

1) перестановка двух строк,

2) умножение какой-либо строки на число $\lambda \neq 0$,

3) добавление к элементам одной строки соответственных элементов другой строки, умноженных на число λ.

Элементарными преобразованиями второго рода называются аналогичные действия со столбцами матрицы A.

Всякое элементарное преобразование первого рода можно представить как умножение некоторой вполне определенной матрицы Q с л е в а на матрицу A, а элементарное преобразование второго рода — как умножение с п р а в а матрицы P на A. *Конечным числом элементарных преобразований первого рода (второго рода) можно привести всякую невырожденную матрицу A к единичному виду I.* Иными словами, всегда можно подобрать такие матрицы элементарных преобразований $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ и $P_1, P_2, \ldots, P_s$, что

$$Q_N \ldots Q_2 Q_1 A = I \quad \text{и} \quad A P_1 P_2 \ldots P_s = I.$$

Это обстоятельство позволяет использовать элементарные преобразования для решения матричных уравнений $AX = B$ и $YA = B$, где A — невырожденная матрица. Умножая поочередно первое уравнение слева на матрицы $Q_1, \ldots, Q_N$, а второе уравнение — справа на $P_1, \ldots, P_s$, придем к тому, что на месте A будет стоять единичная матрица и, следовательно,

$$X = Q_N \ldots Q_2 Q_1 B, \quad Y = B P_1 P_2 \ldots P_s.$$

На практике матрицы Q_i и P_j обычно не ищут, а просто проделывают нужные элементарные преобразования одновременно с матрицами A и B. Когда матрица A приведется к единичному виду, в правой части равенства будет стоять искомая матрица X или Y. Этот метод вполне пригоден также для отыскания обратной матрицы A^{-1}, так как здесь дело сводится к решению уравнений $AX = I$ или $YA = I$. В первом случае используют элементарные преобразования первого рода, во втором — преобразования второго рода.

1.133. Показать, что при умножении матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

слева на матрицу A третьего порядка меняются местами первые две строки матрицы A, а при умножении справа — первые два столбца.

1.134. Показать, что при умножении матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

слева на матрицу A 2-я ее строка умножается на λ, а при умножении справа — 2-й столбец умножается на λ.

1.135. Показать, что при умножении матрицы A на

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

слева к 1-й строке матрицы A добавляется 3-я строка, умноженная на число λ. При правом умножении Q на A к 1-му столбцу A добавляется 3-й, умноженный на λ.

1.136. Выписать все матрицы элементарных преобразований для матриц второго порядка. Указать матрицы элементарных преобразований для матриц n-го порядка.

1.137. С помощью элементарных преобразований найти обратную для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем уравнение $AA^{-1}=I$, где A^{-1} пока неизвестна:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Используем элементарные преобразования первого рода, с помощью которых приводим матрицу A к виду I. Это можно сделать по-разному. Сейчас будет указан один из возможных способов. В обеих частях равенства $AA^{-1}=I$ в матрице A и в матрице I из 1-й строки вычтем 2-ю:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Теперь из 2-й строки вычитаем 3-ю, а из 3-й — 4-ю:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Так как слева стоит единичная матрица I, то правая часть равна матрице A^{-1}.

1.138. С помощью элементарных преобразований найти обратную для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&1\\5&2&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицу A^{-1} мы будем находить из уравнения $AA^{-1}=I$ с помощью элементарных преобразований первого рода. При решении предыдущей задачи было отмечено, что это можно осуществить разными способами, и тот путь решения, который там был применен, существенно использовал специальное строение матрицы A. В данной задаче мы укажем некоторый общий путь приведения матрицы A к виду I. Однако надо иметь в виду, во-первых, что и этот путь имеет варианты, и, во-вторых, он не всегда является наилучшим. В отдельных случаях можно найти более быстрый путь перехода от A к I. Отмеченный общий путь условно можно разбить на два этапа. После выполнения первого этапа преобразований на месте A получается матрица с единицами на главной диагонали и с нулями выше ее. На втором этапе элементы ниже главной диагонали также обращаются в нули, и в результате вместо A появляется единичная матрица I. Те же преобразования, проделываемые над единичной матрицей I, приведут ее к искомой матрице A^{-1}.

Переходим к осуществлению первого этапа элементарных преобразований первого рода для уравнения $AA^{-1}=I$ данной задачи:

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Прежде всего сделаем так, чтобы на месте a_{33} в матрице A стояла единица. В данном случае этого можно добиться, например, вычитая из 3-й строки 2-ю. Разумеется, то же самое проделывается и с единичной матрицей справа:

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Теперь обращаем в нуль элементы, стоящие над a_{33}. Для этого как в левой, так и в правой матрицах из 1-й и 2-й строк вычитаем 3-ю:

$$\begin{pmatrix}0 & 5 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

При дальнейших преобразованиях надо следить за тем, чтобы 3-й столбец матрицы слева больше не менялся. Обратимся к элементу a_{22} и постараемся сделать его равным единице. Для этого можно, например, разделить 2-ю строку на 4, но можно поступить и по-другому, а именно, изменить знак во 2-й строке и добавить

к ней 1-ю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее из первой строки вычитаем 2-ю, умноженную на 5, после чего умножаем 1-ю строку на $-\frac{1}{5}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на месте матрицы A стоит теперь матрица с единицами на главной диагонали и нулями выше нее, и первый этап преобразований окончен. Второй этап осуществляется уже очень просто. Добавляя к 3-й строке 2-ю и вычитая учетверенную 1-ю, получим на местах a_{13} и a_{23} нули. Затем, вычтя из 2-й строки 1-ю, получим нуль и на месте a_{12}. Напомним, что те же действия проделываются и с матрицей справа. В результате на месте матрицы A окажется I и, значит,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{11}{5} & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.139. Решая уравнение $YA = I$, найдите матрицу $Y = A^{-1}$ для матрицы A предыдущей задачи с помощью элементарных преобразований второго рода.

1.140. С помощью элементарных преобразований вычислить обратные для матриц

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.141. С помощью элементарных преобразований решить уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \\ 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Решение системы линейных уравнений с определителем, отличным от нуля. Всякую систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

можно записать коротко в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$Ax = b, \tag{4.3}$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица системы, x — столбец из неизвестных, а b — столбец свободных членов. Если определитель системы $|A|$ отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1} и, умножая равенство (4.3) слева на A^{-1}, получим решение системы в виде

$$x = A^{-1}b. \tag{4.4}$$

Таким образом, *если* $|A| \neq 0$, *то система (4.2) имеет решение и притом единственное, которое можно найти умножив матрицу* A^{-1} *на столбец свободных членов.* Разумеется, легкость такого решения только кажущаяся, так как вся трудность заключается здесь в нахождении матрицы A^{-1}. Если это сделать затруднительно, то используют и другие методы решения, например известные *формулы Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{4.5}$$

где $\Delta = |A|$ — определитель системы, а Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов. Удобен для решения системы также *метод элементарных преобразований первого рода*, называемый также *методом Гаусса* или *методом исключения неизвестных.* Преобразования применяются при этом к матрице A и к столбцу свободных членов b. Когда матрица A приведется к единичному виду I, справа в (4.3) будет стоять искомый столбец x. На практике, однако, ограничиваются приведением матрицы A к треугольному виду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

т. е. осуществляют только первый этап преобразований (см. **1.138**). После этого система $\tilde{A}x = b$ решается путем последовательного нахождения неизвестных, начиная с x_1. Подчеркнем, что при переходе от A к I существенно используется предположение о невырожденности матрицы A.

1.142. Решить с помощью формулы (4.4) систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу A и находим обратную матрицу A^{-1} (см. **1.115**)

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

По формуле (4.4)

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ 12\\ 1\end{pmatrix},$$

т. е. $x_1=-8$, $x_2=12$, $x_3=-1$.

1.143. Найти решение системы

$$\begin{cases}5x_1-3x_2=4,\\ 7x_1-5x_2=-8.\end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы и по правилу задачи **1.116** находим обратную:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 7 & -5\end{pmatrix},\ |A|=-4,\ A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -7 & 5\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -8\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-44\\ -68\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ 17\end{pmatrix},$$

$x_1=11$, $x_2=17$.

1.144. Из формулы (4.4) вывести правило Крамера (4.5).

Решение. Подставляя в (4.4) выражение обратной матрицы (4.1), получим

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}A^{*}b=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n\\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \vdots\\ \Delta_n\end{pmatrix},$$

что равносильно формулам Крамера (4.5). Равенства

$$A_{1i}b_1+A_{2i}b_2+\dots+A_{ni}b_n=\Delta_i$$

получаются путем разложения определителя Δ_i по i-му столбцу. Так как остальные столбцы у Δ и Δ_i одинаковые, то и алгебраические дополнения те же самые.

1.145. Применить метод элементарных преобразований для решения системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего запишем систему в матричной форме (4.3):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Добьемся, чтобы в правом нижнем углу стояла 1, для этого можно, например, к 4-й строке добавить 3-ю. Те же действия проделываются и со столбцом свободных членов:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Сделаем нули над полученной единицей в 4-м столбце, добавляя к 1-й строке 4-ю, из 2-й вычитая учетверенную 4-ю, а из 3-й — утроенную:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 & 0 \\ -31 & 1 & -2 & 0 \\ -21 & 2 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -37 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Изменяем знак в 3-й строке, после чего вычитаем ее трижды из 1-й строки и прибавляем дважды ко 2-й:

$$\begin{pmatrix} -53 & 5 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & 0 & 0 \\ 21 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ 17 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Добавляем ко 2-й строке 1-ю и делим ее на 2:

$$\begin{pmatrix} -53 & 5 & 0 & 0 \\ -21 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ -23 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Наконец, вычитаем из 1-й строки 5 раз 2-ю и сокращаем ее на 52:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -23 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A приведена к треугольному виду (4.6) *, а данная система — к эквивалентной форме

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ -21x_1 + x_2 = -23, \\ 21x_1 - 2x_2 + x_3 = 27, \\ 8x_1 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

1.146. С помощью формулы (4.4) решить системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 7x_1 + 6x_2 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 = -14. \end{cases}$

1.147. Решить данную систему по формуле (4.4) и по формулам Крамера (4.5):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = -4. \end{cases}$$

1.148. Решить данную систему методом элементарных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

4. Ортогональные матрицы. Квадратная матрица T называется *ортогональной*, если транспонированная матрица T' совпадает с обратной матрицей T^{-1}:

$$T' = T^{-1}. \tag{4.7}$$

Определитель ортогональной матрицы равен 1 или —1.

---

* Заметим, что в данном примере мы не проверяли заранее, что определитель системы отличен от нуля. Но это следует уже из самого факта возможности приведения матрицы A к виду (4.6). В случае $|A| = 0$ при таком приведении на диагонали обязательно должен появиться хотя бы один нуль. Таким образом, сам метод избавляет нас от необходимости предварительного вычисления определителя $|A|$.

Для того чтобы матрица T была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы ее векторы-столбцы (или строки) образовывали ортонормированный базис в евклидовом пространстве n-мерных векторов (см. § 1, п. 3). Геометрически ортогональной матрице отвечает *ортогональный оператор*, который всякий ортонормированный базис переводит снова в ортонормированный базис. Ортогональный оператор можно определить и как линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение векторов в форме (1.2). В обычном пространстве это оператор, сохраняющий длины векторов и углы между ними.

1.149. Проверить ортогональность данной матрицы

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем транспонированную матрицу T' и найдем произведение TT':

$$TT'=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $TT'=I$, и поэтому T' есть обратная для матрицы T, так что требование (4.7) выполнено.

1.150. Показать, что произведение ортогональных матриц и обратная к ортогональной матрице сами являются ортогональными.

Решение. Пусть T_1 и T_2 удовлетворяют определению (4.7). Тогда по свойствам транспонирования произведения и матрицы, обратной от произведения, получим

$$(T_1T_2)'=T_2'T_1'=T_2^{-1}T_1^{-1}=(T_1T_2)^{-1},$$

т. е. T_1T_2 также удовлетворяет равенству (4.7) и поэтому является ортогональной. Далее, если T ортогональная, то

$$(T^{-1})'=(T')^{-1}=(T^{-1})^{-1},$$

т. е. T^{-1} также удовлетворяет определению (4.7) и является поэтому ортогональной.

Доказанное вытекает и просто из геометрических соображений. Ведь если ортогональные операторы каждый ортонормированный базис переводят снова в ортонормированный базис, то тем же свойством будет обладать и последовательное применение ортогональных операторов и оператор, обратный к ортогональному.

1.151. Написать общий вид ортогональной матрицы второго порядка с определителем, равным 1. Как действует соответствующий оператор на плоскости xOy?

Решение. Пусть

$$T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

и

$$|T|=1,$$

тогда

$$T'=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}.$$

Из равенства (4.7) получаем $\alpha=\delta$, $\beta=-\gamma$, а из $|T|=\alpha\delta-\beta\gamma=1$: $\delta^2+\gamma^2=1$. Значит, δ и γ можно принять за косинус и синус некоторого угла φ.

Итак, $\alpha=\delta=\cos\varphi$, $\gamma=\sin\varphi$, $\beta=-\sin\varphi$ и

$$T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Это и есть общий вид ортогональной матрицы второго порядка с определителем 1. Как было показано в задаче **1.92**, эта матрица определяет поворот на плоскости xOy на угол φ вокруг начала O.

1.152. Найти общий вид ортогональной матрицы второго порядка с определителем -1. Как действует соответствующий оператор на плоскости xOy?

1.153. Показать, что матрица поворота осей в пространстве $Oxyz$ является ортогональной.

Указание. Использовать вид этой матрицы, полученный в задаче **1.111**.

1.154. Показать, что операторы зеркального отражения относительно начала O и осей Ox, Oy, Oz в пространстве являются ортогональными. Выписать их матрицы и подсчитать определители.

§ 5. РАНГ МАТРИЦЫ

1. Ранг матрицы и его вычисление. Столбцы и строки прямоугольной матрицы A размера $(m\times n)$ можно рассматривать как m-мерные и n-мерные векторы. Имеет место теорема:

Максимальное число линейно независимых векторов-столбцов матрицы A равно максимальному числу линейно независимых векторов-строк этой матрицы. Это число называется *рангом матрицы*. Ранг матрицы равен также *максимальному порядку отличных от нуля миноров* матрицы A. Например, если все определители-миноры матрицы A четвертого порядка

равны нулю, а среди миноров третьего порядка есть ненулевые, то ранг матрицы A равен 3. Это свойство ранга матрицы позволяет вычислять его последовательным нахождением миноров, начиная с максимальных. Однако удобнее использовать другое свойство ранга: ранг матрицы не меняется при любых элементарных преобразованиях этой матрицы. С помощью элементарных преобразований как 1-го, так и 2-го рода матрицу A приводят к специальному виду

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и тогда ранг матрицы будет равен числу единиц, стоящих на главной диагонали.

Ранг матрицы A обозначается r_A. Укажем следующие его свойства:

1) $r_{A+B} \leqslant r_A + r_B$;

2) $r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant r_A, r_B$ (неравенство Сильвестра), здесь n — число столбцов матрицы;

3) если A — невырожденная матрица, то $r_{AB} = r_{BA} = r_B$;

4) ранг невырожденной квадратной матрицы равен ее порядку.

Пусть дана система из m n-мерных векторов

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), \quad k = 1, \dots, m,$$

составим из их координат $(m \times n)$-матрицу $A = (a_{kj})$, $k = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Если ранг этой матрицы равен m, то данная система векторов линейно независима, если же $r_A \leqslant m$, то система линейно зависима, но при этом в ней содержится ровно r_A линейно независимых векторов. Таким образом, вычисление ранга матрицы дает возможность установить линейную зависимость системы векторов-строк этой матрицы. Разумеется, то же самое относится и к ее столбцам.

1.155. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся методом элементарных преобразований. В левом верхнем углу стоит единица *. С ее помощью обращаем в нуль элементы первого столбца ниже главной диа-

* Если бы здесь стояла не единица, то мы ее сделали бы, переставив сначала какие-либо две строки или два столбца с таким расчетом, чтобы на месте a_{11} был отличный от нуля элемент. Затем останется только разделить на него 1-ю строку.

гонали, вычитая из 3-й и 4-й строк удвоенную 1-ю. При этом ранг матрицы не изменится. После этого вычитаем из всех столбцов 1-й столбец, умноженный на такие числа, чтобы на остальных местах в первой строке также стояли нули. Символом «$\sim$» мы связываем две матрицы с одинаковым рангом. В результате будем иметь:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из 3-й строки последней полученной матрицы 2-ю, а к 4-й добавляем 2-ю. Затем на остальных местах во 2-й строке делаем нули, используя 2-й столбец:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг матрицы A равен 2. Поскольку в процессе вычисления перестановок строк и столбцов не было, то наличие единиц в первых двух строках (столбцах) последней полученной матрицы означает, что в матрице A первые две строки (столбца) линейно независимы, а остальные через них линейно выражаются. Таким образом, метод элементарных преобразований позволяет не только довольно просто вычислить ранг матрицы, но и дает возможность узнать, какие из ее строк и столбцов линейно независимы.

1.156. Дана система векторов

$$\boldsymbol{a}_1 = (0,\ 2-2,\ 4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2,\ 3,\ -4,\ 6), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-4,\ 0,\ 2,\ 0).$$

Будет ли она линейно зависимой? Если да, то сколько она содержит линейно независимых векторов?

Решение. Запишем матрицу из координат данных векторов, располагая их в строки. Переставив первые два столбца в ней и разделив 1-ю строку на 2, получим на месте a_{11} единицу. Дальнейшие преобразования проводятся по схеме предыдущей задачи:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $r_A = 2$. Следовательно, данная система векторов линейно зависима. Расположение единиц в последней матрице показывает, что первые два вектора данной системы линейно независимы (перестановок строк не было!).

1.157. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_2 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1b_2 \dots b_n).$$

Решение. Ранг этой матрицы равен 1, так как любые две ее строки пропорциональны и, значит, всякие два вектора-строки линейно зависимы. Тот же результат легко получить и с помощью миноров: все миноры 2-го порядка данной матрицы равны нулю вследствие пропорциональности строк. Значит, $r_A < 2$, т. е. либо $r_A = 1$, либо $r_A = 0$, но последнее возможно только у нулевой матрицы, когда все числа a_i или b_j равны нулю.

1.158. Вычислить ранги матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.159. Какие из данных систем векторов линейно зависимы? Сколько в них содержится линейно независимых векторов и какие?

а) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_2 = 4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -3, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5, 0, -2, 5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2, 1, -1, 2)$.

1.160. Проверить неравенство Сильвестра для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Решение общей системы линейных уравнений. С помощью понятия ранга матрицы устанавливается критерий совместности произвольной линейной системы из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.1}$$

Теорема Кронекера—Капелли. *Для того чтобы система* (5.1) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A из коэффициентов при неизвестных был равен рангу расширенной матрицы $B=(A, b)$, полученной из A приписыванием столбца b свободных членов.*

Практически эту теорему удобно применять следующим образом. Выписать расширенную матрицу $B=(A, b)$ и, производя над ней элементарные преобразования только 1-го рода (над строками), привести ее к треугольному виду

$$\tilde{B}=(\tilde{A}, \tilde{b})=\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

При этом допускаются также перестановки столбцов матрицы A, которые равносильны просто перенумерации неизвестных x_i.

Если в матрице (5.2) окажется, что $\tilde{b}_{r+1}\neq 0$, то данная система несовместна, так как тогда $r_A\neq r_B$ ($r_A=r$, $r_B=r+1$). Если же $\tilde{b}_{r+1}=0$, то система совместна, и ее решение можно легко найти из треугольной системы $\tilde{A}x=\tilde{b}$. При этом надо только учесть, что перестановка столбцов матрицы A, если она производилась, повлечет за собой соответствующую перестановку неизвестных в столбце x.

1.161. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно проверить, что определитель $|A|$ этой системы равен нулю, так что обратную матрицу A^{-1} здесь нельзя использовать: ее не существует. Выписываем расширенную матрицу B, отделяя чертой столбец свободных членов; затем применяем элементарные преобразования 1-го рода: переставляем первые две строки, делаем нули в 1-м столбце, вычитаем из 3-й строки удвоенную 2-ю и делим после этого 2-ю строку на -3:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\tilde{B}.$$

Полученная матрица $\tilde{B}$ имеет вид (5.2) при $r=2$. Так как $b_3=0$, то данная система совместна. Записываем эквивалентную

систему с матрицей $\tilde{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_2 + \frac{1}{3} x_3 = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Отсюда $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} x_3$, $x_1 = \frac{11}{3} - \frac{8}{3} x_3$, где x_3 — произвольное число.

Это решение является общим. При конкретных значениях x_3 будут получаться частные решения системы. Например, при $x_3 = 1$ получим $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

1.162. Выяснить, совместны ли следующие системы. Для совместных систем найти их общие решения:

а) $\begin{cases} 7x_1 - x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$

§ 6. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Характеристические числа и собственные векторы. В этом параграфе мы опять ограничимся рассмотрением только квадратных матриц. Пусть A — квадратная матрица порядка n, а I — единичная матрица того же порядка. Характеристической матрицей называется матрица

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где λ — независимая переменная.

Определитель этой матрицы в раскрытом виде представляет собой многочлен от λ степени n:

$$|A - \lambda I| = (-1)^n (\lambda^n + \psi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \psi_{n-1} \lambda + \psi_n). \tag{6.2}$$

Он называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Коэффициенты ψ_i определенным образом выражаются через элементы матрицы A. В частности,

$$\psi_1 = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}), \tag{6.3}$$

$$\psi_n = (-1)^n |A|.$$

Уравнение $|A-\lambda I|=0$, или, что то же,

$$\lambda^n+\psi_1\lambda^{n-1}+\ldots+\psi_{n-1}\lambda+\psi_n=0 \tag{6.4}$$

называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами матрицы*. Иногда их называют также собственными значениями или просто корнями матрицы A.

Ненулевой вектор x n-мерного линейного пространства называется собственным вектором матрицы A, если соответствующий этой матрице линейный оператор A (см. § 3), действуя на вектор x, умножает его на некоторое число λ, т. е.

$$Ax=\lambda x. \tag{6.5}$$

В обычном пространстве это означает, что под действием A вектор x сохраняет свое направление, только удлиняясь или укорачиваясь в $|\lambda|$ раз; при $\lambda<0$ направление меняется на противоположное. Всякое число λ, удовлетворяющее равенству (6.5), является характеристическим числом матрицы A.

Пусть λ — какой-либо из корней характеристического уравнения (6.4). Соответствующие ему собственные векторы x определяются путем решения системы линейных уравнений $(A-\lambda I)x=0$ или в подробной записи

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases} \tag{6.6}$$

Решать эту систему можно, например, методом элементарных преобразований. Следует заметить, что корни уравнения (6.4) могут быть комплексными, а тогда и соответствующие собственные векторы будут иметь комплексные координаты. С точки зрения вещественного линейного пространства комплексному корню λ не отвечает никакого собственного вектора.

1.163. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристический многочлен и раскрываем его разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -3 & 2\\ 6 & -4-\lambda & 4\\ 4 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda & 4\\ -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}+$$

$$+3\begin{vmatrix}6 & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}6 & -4-\lambda\\ 4 & -4\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-4)+$$

$$+3(-6\lambda+14)+2(4\lambda-8)=-\lambda^3+6\lambda-11\lambda+6.$$

Следовательно, характеристическое уравнение данной матрицы имеет вид $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$. Один из корней λ_1 этого уравнения равен 1, так как сумма коэффициентов равна нулю. Остальные корни $\lambda_2=2$ и $\lambda_3=3$ легко находятся из равенства

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6).$$

Чтобы найти собственные векторы, решаем уравнения (6.6) при $\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Пусть $\lambda=\lambda_1=1$, тогда

$$(A-\lambda_1 I)\,x=(A-I)\,x=0,$$

или подробно,

$$\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 6 & -5 & 4\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Применяя метод элементарных преобразований 1-го рода, вычитаем в матрице слева из 2-й строки 3-ю, а из 1-й — половину 3-й, затем 3-ю сокращаем на 4 и из 1-й строки вычитаем 2-ю. Нулевой столбец справа при всех этих действиях так и останется нулевым. В результате получим равносильное уравнение

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

или в раскрытом виде $2x_1-x_2=0$, $x_1-x_2+x_3=0$. Полагая $x_1=\alpha$, найдем отсюда $x_2=2\alpha_1$, $x_3=\alpha$. Следовательно, собственные векторы, отвечающие корню λ_1, имеют вид

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{i}+2\alpha\boldsymbol{j}+\alpha\boldsymbol{k}=\alpha\,(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

Все они направлены по прямой, определяемой вектором $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. Так как вообще собственные векторы определяются с точностью до произвольного множителя α, то в дальнейшем мы этот множитель указывать не будем, полагая его равным 1.

Собственные векторы, отвечающие корням λ_2 и λ_3, найдите самостоятельно.

1.164. Доказать, что всякие два собственных вектора $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ матрицы A, отвечающие разным корням характеристического уравнения λ_1, λ_2, линейно независимы.

Решение. Допустим от противного, что $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ линейно зависимы, т. е. $\boldsymbol{x}_2=\alpha\boldsymbol{x}_1$. Подвергнем обе части этого равенства действию линейного оператора A:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}_1)=\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,$$

так как по условию $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$, то отсюда получим $\lambda_2\boldsymbol{x}_2=\alpha\lambda_1\boldsymbol{x}_1$. Вычитая почленно из последнего равенства равенство $\boldsymbol{x}_2=\alpha\boldsymbol{x}_1$, умноженное на λ_1, будем иметь:

$$(\lambda_2-\lambda_1)\,\boldsymbol{x}_2=0.$$

Но по условию $\lambda_1\neq\lambda_2$, а $\boldsymbol{x}_2\neq 0$ как собственный вектор. Получено противоречие, которое показывает, что допущение о линей-

ной зависимости векторов x_1 и x_2 неверно, т. е. они линейно независимы.

1.165. Доказать, что всякая система m собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, отвечающих разным характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, линейно независима.

Решение. Доказательство проводится методом математической индукции. При $m=2$ утверждение верно (**1.164**). Допустим, что оно верно для системы из $m-1$ вектора, и докажем, что тогда утверждение справедливо и для всей системы из m векторов.

Если бы вопреки утверждению система $x_1, x_2, \ldots, x_m$ была линейно зависима, то один из ее векторов, например x_1, линейно выражался бы через остальные:

$$x_1 = \alpha x_2 + \ldots + \nu x_{m-1} + \tau x_m.$$

Подвергнем это равенство действию оператора A, учитывая, что

$$Ax_i = \lambda_i x_i:$$

$$\lambda_1 x_1 = \alpha\lambda_2 x_2 + \ldots + \nu\lambda_{m-1} x_{m-1} + \tau\lambda_m x_m.$$

Вычтем отсюда первое равенство, умноженное на λ_m:

$$(\lambda_1 - \lambda_m)\, x_1 = \alpha\,(\lambda_2 - \lambda_m)\, x_2 + \ldots + \nu\,(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\, x_{m-1}.$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_m$, то вектор x_1 линейно выражается через $x_2, \ldots, x_{m-1}$, т. е. система из $m-1$ вектора $x_1, \ldots, x_{m-1}$ линейно зависима вопреки предположению индукции. Следовательно, допущение о линейной зависимости системы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ неверно, т. е. эта система линейно независима, что и требовалось доказать.

1.166. Матрица A 2-го порядка имеет два различных не равных нулю характеристических числа λ_1 и λ_2. Охарактеризовать действие соответствующего оператора A на плоскости xOy.

Решение. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ — характеристические числа матрицы A, а x_1, x_2 — отвечающие им собственные векторы. Согласно задаче **1.164** они линейно независимы, так что их можно принять за базисные векторы плоскости. Любой вектор x однозначно по ним раскладывается:

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

Подействуем на x оператором A:

$$y = Ax = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha\lambda_1 x_1 + \beta\lambda_2 x_2,$$

т. е. преобразованный вектор y имеет проекцию $\alpha\lambda_1$ на x_1 и проекцию $\beta\lambda_2$ на x_2 (см. рис. 13, где взято $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$). Следовательно, действие оператора A состоит в растяжении в $|\lambda_1|$ раз вдоль направления собственного вектора x_1 и в $|\lambda_2|$ раз — вдоль x_2. Надо иметь в виду, конечно, что если λ_1 или λ_2 по модулю

меньше 1, то вместо растяжения следует говорить о сжатии вдоль соответствующего вектора. Кроме того, при отрицательных значениях λ_1 или λ_2 происходит перепрокидывание параллелограмма с диагональю y в противоположную сторону относительно x_1 или x_2 (см. рис. 14, где $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$).

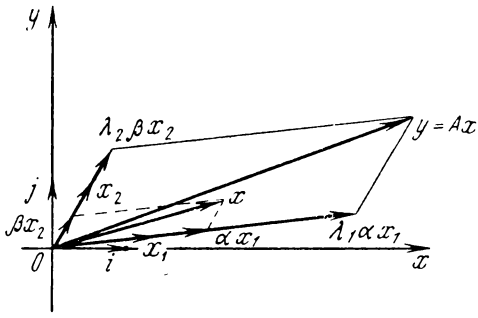


Рис. 13

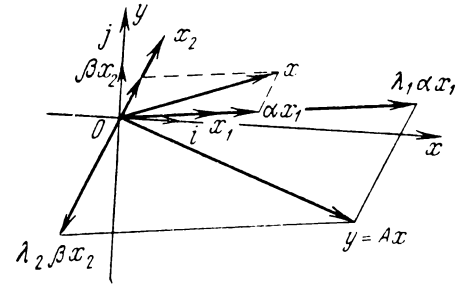


Рис. 14

1.167. Пусть матрица A n-го порядка имеет простой комплексный характеристический корень $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$. Показать, что в n-мерном линейном пространстве этому корню отвечает двумерная плоскость, инвариантная относительно оператора A.

Решение. Пусть $z = x_1 + ix_2$ — комплексный собственный вектор — решение системы (6.6) при $\lambda = \alpha + i\beta$. Для этого вектора

$$Az = \bar{\lambda} z. \qquad (6.7)$$

Поскольку элементы матрицы A предполагаются вещественными числами, то, беря сопряженные, из (6.7) получим, что

$$A\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z},$$

т. е. матрица A имеет наряду с $\lambda = \alpha + i\beta$ комплексно сопряженное характеристическое число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, которому отвечает сопряженный собственный вектор $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Так как $\lambda \neq \bar{\lambda}$, то z и $\bar{z}$ — линейно независимые векторы (см. **1.164**). Докажем, что векторы x_1 и x_2 — вещественная и мнимая части комплексного вектора z — также линейно независимы. В противном случае $x_2 = \tau x_1$, а тогда

$$z = (1 + i\tau)\, x_1, \quad \bar{z} = (1 - i\tau)\, x_1,$$

т. е.

$$z = C\bar{z}, \quad C = \frac{1 + i\tau}{1 - i\tau},$$

но это невозможно ввиду линейной независимости z и $\bar{z}$.

Два линейно независимых вектора определяют в линейном пространстве некоторую плоскость π (рис. 15). Пусть $x = \gamma_1 x_1 +$

$+\gamma_2 x_2$ — произвольный вектор этой плоскости. Чтобы доказать инвариантность плоскости π относительно оператора A, надо обнаружить, что под действием A вектор x перейдет в вектор y, лежащий в той же плоскости π. Так как в силу линейности оператора A

$$y = Ax = \gamma_1 Ax_1 + \gamma_2 Ax_2,$$

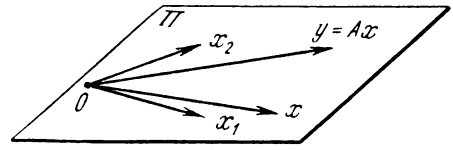


Рис. 15

то для этого достаточно показать, что под действием A в плоскости π останутся векторы Ax_1 и Ax_2. Выделяя в равенстве (6.7) вещественные и мнимые части, получим:

$$A(x_1 + ix_2) = (\alpha + i\beta)(x_1 + ix_2)$$

$$Ax_1 + iAx_2 = \alpha x_1 - \beta x_2 + i(\beta x_1 + \alpha x_2).$$

Отсюда

$$Ax_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad Ax_2 = \beta x_1 + \alpha x_2. \tag{6.8}$$

Таким образом, Ax_1 и Ax_2 раскладываются по x_1 и x_2, т. е. принадлежат плоскости π, что и требовалось доказать.

1.168. Доказать, что если x — собственный вектор матрицы A, отвечающий характеристическому числу λ, то он же будет собственным для матрицы A^2 с характеристическим числом λ^2 и для матрицы A^{-1} с характеристическим числом $\frac{1}{\lambda}$ (последнее, если A — невырожденная матрица).

Решение. Если

$$Ax = \lambda x,$$

то

$$A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x,$$

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x.$$

Следовательно, $A^2x = \lambda^2 x$, $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$, что и доказывает утверждение.

1.169. Доказать, что характеристические числа ортогональной матрицы равны либо ± 1, либо $e^{i\varphi}$.

Решение. Пусть T — ортогональная матрица. Запишем равенство, определяющее собственные векторы:

$$Tx = \lambda x.$$

Так как ортогональный оператор сохраняет длины векторов, то $|Tx| = |x|$, а тогда из предыдущего равенства следует, что $|\lambda| = 1$. Следовательно, если λ — вещественное число, то $\lambda = \pm 1$. Если же λ — комплексное, то, записав его в показательной форме, получим $\lambda = e^{i\varphi}$.

1.170. Написать матрицу третьего порядка, имеющую наперед заданное характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \psi_1\lambda^2 + \psi_2\lambda + \psi_3 = 0.$$

Решение. Рассмотрим следующую матрицу:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\psi_3 & -\psi_2 & -\psi_1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее характеристический многочлен разложением по 1-й строке:

$$(\Phi - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \\ 0 & -\lambda & 1 & \\ -\psi_3 & -\psi_2 & -\psi_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \psi_1\lambda + \psi_2) - \psi_3 =$$

$$= -(\lambda^3 + \psi_1\lambda^2 + \psi_2\lambda + \psi_3).$$

Приравняв нулю этот многочлен, получим заданное характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \psi_1\lambda^2 + \psi_2\lambda + \psi_3 = 0.$$

Выписанная выше матрица Φ называется *матрицей Фробениуса.*

1.171. Показать, что матрица Фробениуса n-го порядка

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\psi_n & -\psi_{n-1} & -\psi_{n-2} & & -\psi_1 \end{pmatrix}$$

имеет наперед заданное уравнение (6.4) своим характеристическим уравнением.

Указание. Доказательство провести по индукции, используя тот факт, что при $n = 3$ утверждение доказано в предыдущей задаче. Определитель $|\Phi - \lambda I|$ раскладывать по 1-й строке.

1.172. Найти характеристические числа и собственные векторы матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.173. Матрица A второго порядка имеет характеристические числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Каково действие соответствующего линейного оператора на плоскости xOy?

1.174. Пусть векторы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ задачи **1.167** ортогональные и единичные. Показать, что действие оператора $\boldsymbol{A}$ этой задачи на

плоскости π состоит в повороте всех векторов плоскости π на некоторый угол φ и в растяжении их длин в $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ раз.

Указание. В формулах (6.8) положить $\alpha = \rho\cos\varphi$, $\beta = \rho\sin\varphi$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Воспользоваться результатами задач **1.92** и **1.98**.

1.175. Найти характеристические числа и собственные векторы данной матрицы A. Как действует соответствующий оператор $\boldsymbol{A}$?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

1.176. Найти характеристические числа и собственные векторы матриц третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.177. Каким свойством должна обладать матрица A, имеющая собственный вектор $\boldsymbol{x} = (1, 1, \ldots, 1)$?

1.178. Показать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

имеет одно нулевое и два чисто мнимых характеристических числа при любых значениях α, β, γ, не обращающихся одновременно в нуль.

1.179. Матрица A имеет характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Показать, что при любом целом p матрица A^p имеет характеристические числа $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_m^p$.

Указание. См. **1.168**.

1.180. Показать, что всякая вырожденная матрица A имеет нулевое характеристическое число и, обратно, если среди характеристических чисел матрицы A имеется нулевое, то матрица A вырожденная.

Указание. Использовать вторую из формул (6.3).

1.181. Показать, что у матрицы A и у транспонированной матрицы A' одинаковые характеристические числа.

Указание. Использовать тот факт, что при транспонировании определитель не меняется.

2. Теорема Гамильтона—Кэли и ее применение. *Всякая матрица A является корнем своего характеристического уравнения* (6.4):

$$A^n + \psi_1 A^{n-1} + \ldots + \psi_{n-1} A + \psi_n I = 0. \qquad (6.9)$$

Если матрица A невырожденная, то согласно (6.3) $\psi_n \neq 0$. Умножая тогда равенство (6.9) на A^{-1} и деля на ψ_n, получим следующую формулу для нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\psi_n}(A^{n-1} + \psi_1 A^{n-2} + \ldots + \psi_{n-1} I). \tag{6.10}$$

При использовании этой формулы коэффициенты ψ_i характеристического уравнения удобно находить последовательно из равенств:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -S_1, \\
\psi_2 &= -\frac{1}{2}(\psi_1 S_1 + S_2), \\
\psi_3 &= -\frac{1}{3}(\psi_2 S_1 + \psi_1 S_2 + S_3), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_n &= -\frac{1}{n}(\psi_{n-1} S_1 + \psi_{n-2} S_2 + \ldots + \psi_1 S_{n-1} + S_n),
\end{aligned} \tag{6.11}$$

где S_1 обозначает след матрицы A, S_2 – след матрицы A^2 и вообще S_p — след матрицы A^p. *Следом матрицы* называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали,

Заметим, что формула (6.10) не содержит A^n, а в (6.11) входит только ее след S_n. Поэтому полностью A^n вычислять для нахождения обратной матрицы не надо. Достаточно получить диагональные элементы в A^n.

1.182. Проверить теорему Гамильтона — Кэли для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \\ = \lambda^2 - \lambda - 3 = 0.$$

Подставляем в него матрицу A:

$$A^2 - A - 3I = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $A^2 - A - 3I = 0$, т. е. матрица A — корень своего характеристического уравнения.

1.183. Найти обратную для матрицы четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим обратную матрицу A^{-1} по формулам (6.10) и (6.11). Для этого надо подсчитать сначала степени мат-

рицы A, причем для A^4 ограничиваемся подсчетом только диагональных элементов:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 4 \\ -7 & 6 & -10 & -7 \\ 5 & -4 & 8 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 12 & * & * & * \\ * & 16 & * & * \\ * & * & 18 & * \\ * & * & * & 8 \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем следы матриц A, A^2, A^3, A^4, складывая их диагональные элементы:

$$S_1=2, \quad S_2=6, \quad S_3=23, \quad S_4=54.$$

По формулам (6.11):

$$\psi_1=-S_1=-2,$$
$$\psi_2=-\frac{1}{2}(\psi_1 S_1+S_2)=-1,$$
$$\psi_3=-\frac{1}{3}(\psi_2 S_1+\psi_1 S_2+S_3)=-3,$$
$$\psi_4=-\frac{1}{4}(\psi_3 S_1+\psi_2 S_2+\psi_1 S_3+S_4)=1.$$

Теперь по формуле (6.10) можно найти обратную матрицу

$$A^{-1}=-\frac{1}{\psi_4}(A^3+\psi_1 A^2+\psi_2 A+\psi_3 I)=-A^3+2A^2+A+3I=$$

$$=-\begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 4 \\ -7 & 6 & -10 & -7 \\ 5 & -4 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.184. Найти обратную матрицу с помощью формул (6.10) и (6.11) для матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.185. С помощью формул (6.11) написать характеристические уравнения и найти характеристические числа матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 7. ПОДОБИЕ МАТРИЦ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

1. Подобные матрицы. Две квадратные матрицы одного порядка n называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица T, что

$$B = T^{-1}AT.$$

Матрица T называется *преобразующей* (A в B). Подобие матриц обладает следующими свойствами:

а) всякая матрица подобна себе;

б) если A подобна B, то и B подобна A;

в) если A подобна B, а B подобна C, то A подобна C.

Вследствие этих свойств все квадратные матрицы данного порядка распределяются на классы подобных друг другу матриц, причем каждая матрица попадает только в один такой класс *.

Равенство (7.1) может быть записано в другом эквивалентном виде, получаемом из (7.1) умножением слева на T:

$$TB = AT. \tag{7.2}$$

Необходимый признак подобия: *У подобных матриц все коэффициенты характеристического уравнения одни и те же.* Отсюда следует, в частности, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические числа, одинаковые следы и определители. Поэтому если у двух матриц указанные числа разные, то они не могут быть подобными. Следует иметь в виду, что сформулированный признак не является достаточным: существуют и неподобные матрицы с одинаковыми характеристическими многочленами.

1.186. Доказать свойства а), б), в) подобия.

Р е ш е н и е. Поскольку $I^{-1} = I$, то единичная матрица преобразует любую матрицу A в себя: $A = I^{-1}AI$, а это и доказывает первое свойство.

Умножим равенство (7.1) слева на T и справа на T^{-1}:

$$TBT^{-1} = TT^{-1}ATT^{-1} = IAI = A.$$

---

* Обычно из каждого класса подобных матриц выбирают по одной наиболее просто устроенной и называют ее канонической или нормальной формой матриц данного класса. Приведение матриц к нормальной форме, а также общие критерии подобия выходят за рамки настоящего пособия.

Обозначим $T^{-1}=S$, тогда предыдущее равенство запишется в виде $A=S^{-1}BS$, т. е. B подобна A, что и доказывает свойство б). Преобразующей матрицей здесь будет $S=T^{-1}$.

Допустим, что A подобна B, а B подобна C, т. е. существуют такие невырожденные матрицы T и S, что $B=T^{-1}AT$, $C=S^{-1}BS$. В таком случае

$$C=S^{-1}T^{-1}ATS=(TS)^{-1}A(TS)=Q^{-1}AQ,$$

так как $S^{-1}T^{-1}=(TS)^{-1}$. Значит A подобна C с преобразующей матрицей $Q=TS$, и свойство в) доказано.

1.187. Показать, что если в матрице A переставить местами 1-ю и 2-ю строки и одновременно 1-й и 2-й столбцы, то получится матрица B, подобная A.

Решение. Рассмотрим для простоты матрицу второго порядка $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. После перестановки строк и столбцов получится матрица $B=\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$. Возьмем матрицу $T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Легко проверить, что она невырожденная и $T^{-1}=T$. Преобразуем матрицу A с помощью T:

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=B.$$

Таким образом, A и B подобны, что и требовалось доказать. Для матриц порядка $n>2$ доказательство аналогично. В качестве преобразующей надо взять матрицу

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & 0\\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}.$$

1.188. Показать, что одновременная перестановка в матрице i-й и j-й строк и i-го и j-го столбцов приводит к подобной матрице.

Указание. В качестве преобразующей взять матрицу $T=(t_{pq})$, у которой $t_{11}=t_{22}=\ldots=t_{nn}=1$, кроме $t_{ii}=0$ и $t_{jj}=0$, $t_{ij}=t_{ji}=1$, а остальные элементы t_{pq} равны нулю.

1.189. Показать, что следующие матрицы подобны:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Первая матрица переходит во вторую, если переставить сразу 1-ю и 2-ю строки и 1-й и 2-й столбцы, и переходит в третью перестановкой 1-х и 3-х строк и столбцов. Следовательно, согласно задаче **1.188** эти матрицы подобны.

1.190. Показать, что матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

не подобны.

Решение. У первой матрицы характеристические числа равны $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, а у второй $\lambda_1=\lambda_2=0$. Так как наборы этих чисел разные, то матрицы A и B не подобны. Можно также непосредственным умножением обнаружить, что равенство (7.2) выполняется только для вырожденной матрицы T.

1.191. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

По формуле (7.1) найти матрицу B, подобную матрице A. Выписав характеристические уравнения матриц A и B, показать их совпадение.

1.192. Доказать, что нулевая и единичная матрицы подобны только самим себе.

1.193. Доказать, что скалярная матрица $S=\lambda I$ подобна только самой себе.

1.194. Пусть A — невырожденная матрица, а B — любая другая матрица. Показать, что матрицы AB и BA подобны.

Указание. В качестве преобразующей взять A.

1.195. Показать, что следующие матрицы подобны друг другу:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Указание. См. **1.188.**

1.196. Показать, что данные матрицы A и B подобны:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Указание. Из равенства (7.2) найти невырожденную матрицу T.

2. Преобразование координат. Приведение к диагональной форме. До сих пор мы рассматривали координаты векторов линейного пространства и матрицы линейных операторов относительно некоторого фиксированного

базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Допустим теперь, что имеется другой «новый» базис $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n$, и пусть

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{x}_n\tilde{e}_n$$

— разложение вектора x по старому и новому базису. Между старыми и новыми координатами вектора x имеет место следующая зависимость:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

или коротко $x = T\tilde{x}$, где x и $\tilde{x}$ — столбцы из старых и новых координат, а T — матрица перехода, которая должна быть невырожденной. Обратный переход от старых координат к новым осуществляется с помощью обратной матрицы T^{-1}: $\tilde{x} = T^{-1}x$. Заметим, что столбцы матрицы T являются координатами новых базисных векторов $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ относительно старого базиса. В этом нетрудно убедиться, применив формулу (7.3) к новым координатам векторов $\tilde{e}_i$:

$$\tilde{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \tilde{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \tilde{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Следовательно, чтобы построить матрицу перехода T, надо координаты новых базисных векторов в старой системе координат записать в столбцы матрицы T.

Рассмотрим далее линейный оператор A. Пусть относительно базиса e_i ему соответствует матрица A, а относительно базиса $\tilde{e}_i$ — матрица $\tilde{A}$. Между этими матрицами осуществляется связь

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \tag{7.4}$$

где T — матрица перехода та же, что и в формуле (7.3). Верно и обратное утверждение: *всякие две подобные матрицы определяют один и тот же линейный оператор в разных базисах.*

У подобных матриц одинаковые характеристические многочлены и одинаковые характеристические числа. Эти величины являются поэтому *инвариантами линейного оператора*, так как не зависят от выбора базиса. В частности, в каких бы базисах ни записывать линейный оператор, след его матрицы и определитель будут одинаковыми.

1.197. Показать, что если характеристическое уравнение матрицы A имеет простые корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то A подобна диагональной матрице D, у которой на диагонали стоят корни λ_i (а на остальных местах — нули). Найти преобразующую матрицу T.

Решение. Пусть $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ — собственные векторы матрицы A, отвечающие характеристическим числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Так как эти числа разные, то векторы $\tilde{e}_i$ линейно независимы (см. **1.165**) и, следовательно, могут быть приняты за новый базис. По определению собственных векторов

$$A\tilde{e}_1 = \lambda_1\tilde{e}_1, \ldots, A\tilde{e} = \lambda_n\tilde{e}_n.$$

Поэтому в новом базисе $\tilde{e}_i$ оператору A отвечает матрица

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(см. определение матрицы линейного оператора в § 3). Поскольку A и D определяют один и тот же линейный оператор A в разных базисах, эти матрицы подобны. Столбцы матрицы T, преобразующей A в D, состоят из координат собственных векторов $\tilde{e}_i$ в старом базисе.

1.198. Показать, что данная матрица A приводится к диагональной форме. Сделать такое приведение

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет разные характеристические числа $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ (см. **1.163**) и собственные векторы

$$\tilde{e}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\quad \tilde{e}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\quad \tilde{e}_3=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

Располагая их координаты в столбцы, получим преобразующую матрицу T. Подсчитав для нее обратную, преобразуем подобно матрицу A:

$$D=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A подобна диагональной матрице D.

1.199. Привести к диагональной форме матрицу $A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -5\end{pmatrix}$.

Решение. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид $\lambda^2+\lambda-6=0$. Его корни $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$ различные, так что приведение к диагональной форме возможно. Находим собственные векторы (см. метод в § 6):

$$\tilde{e}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \tilde{e}_2=7\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}.$$

Поэтому

$$T=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad T^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{7}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

и

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{21}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.200. В базисе i, j на плоскости xOy матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ задает оператор зеркального отражения относительно прямой $x = y$. Записать матрицу того же оператора относительно базиса $\tilde{e}_1 = 2i - j$, $\tilde{e}_2 = -3i + 2j$.

Решение. Выписывая координаты векторов в столбцы, найдем преобразующую матрицу T. Подсчитав T^{-1}, получим:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Как и должно быть, у A и $\tilde{A}$ одинаковые определители $|A| = |\tilde{A}| = -1$ и одинаковые следы $S_A = S_{\tilde{A}} = 0$.

1.201. В базисе i, j, k пространства $Oxyz$ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

определяет оператор поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси Ox. Выписать матрицу A того же оператора в новом базисе

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j), \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j), \quad \tilde{e}_3 = k.$$

Проверить совпадение характеристических уравнений матриц A и $\tilde{A}$. Как расположен новый базис относительно старого?

1.202. Оператор A на плоскости xOy состоит в проектировании векторов на ось Oy и затем в зеркальном отражении относительно прямой $x = y$. Записать его матрицы в базисах

$$i, j \text{ и } \tilde{e}_1 = 5i + 3j, \quad \tilde{e}_2 = 3i + 2j.$$

1.203. Оператор A на плоскости xOy зеркально отражает все векторы относительно оси Oy. Записать его матрицы в базисах

i, j и $\tilde{e}_1 = i + j$, $\tilde{e}_2 = i - j$. Как преобразуются координаты векторов при переходе от одного из этих базисов к другому?

1.204. Привести к диагональной форме подобным преобразованием матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ -11 & -8 & -9 \end{pmatrix}.$$

§ 8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1. Квадратичная форма и ее приведение к каноническому виду. *Квадратичной формой* называется соответствие, сопоставляющее каждому вектору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства число $\varphi(x)$ по формуле

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{8.1}$$

или в раскрытом виде

$$\varphi(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2.$$

Квадратичная форма определяется заданием симметрической матрицы $A = (a_{ij})$. Заметим, что на место элемента a_{ij} при $i \neq j$ в эту матрицу ставится половина коэффициента при произведении x_ix_j, а на место a_{ii} — весь коэффициент при x_i^2.

Квадратичную форму можно записать в матричном виде, если обозначить через X столбец из координат вектора x. Тогда X' — строка из координат и

$$\varphi(x) = X'AX. \tag{8.2}$$

При переходе к новым координатам по формуле (7.3) квадратичная форма (8.2) примет вид $\varphi = \tilde{X}'\tilde{A}\tilde{X}$, где

$$\tilde{A} = T'AT. \tag{8.3}$$

Такие две матрицы A и $\tilde{A}$ называются конгруэнтными. Следовательно, конгруэнтные матрицы определяют одну и ту же квадратичную форму $\varphi(x)$ в разных базисах.

Среди конгруэнтных данной симметрической матрице A всегда найдется диагональная матрица D. Поэтому за счет преобразования координат квадратичную форму можно привести к каноническому виду

$$\varphi = b_1y_1^2 + \ldots + b_py_p^2 - b_{p+1}y_{p+1}^2 - \ldots - b_ry_r^2, \tag{8.4}$$

где все числа b_i положительны. Координаты y_i называются также каноническими для данной формы φ. Число r в (8.4) не зависит от способа приведения квадратичной формы φ к каноническому виду и называется рангом формы. Ранг формы $\varphi(x)$ совпадает с рангом матрицы A. Число p в (8.4) называется положительным индексом, а число $r - p$ — отрицательным индексом квадратичной формы φ. Их разность $r - 2p$ называют сигнатурой формы φ. Все эти числа также инвариантны относительно преобразования координат. Заметим, что сами числа b_i в (8.4) неинвариантны, так как их можно произвольно менять, умножая координаты y_i на отличные от нуля

числа. В частности, обозначая $z_i = \sqrt{b_i}\, y_i$, приведем форму φ к нормальному виду

$$\varphi = z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2. \qquad (8.5)$$

Практически приведение формы φ к каноническому виду (8.4) осуществляют обычно методом Лагранжа, который состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов. Этот метод мы проиллюстрируем на примерах.

1.205. Привести к каноническому виду форму

$$\varphi(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. Собираем вместе члены, содержащие x_1, и выносим коэффициент при x_1^2 за скобку. Затем выделяем полный квадрат обычным приемом:

$$4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 = 4\left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3\right) =$$

$$= 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2.$$

После такого преобразования данная форма $\varphi(x)$ примет вид

$$\varphi(x) = 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Теперь выделяем члены с x_2 и дополняем их до полного квадрата, вынося за скобку коэффициент при x_2^2:

$$\varphi(x) = 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Обозначая

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3, \quad y_2 = x_2 + x_3, \quad y_3 = x_3,$$

получим в новых координатах канонический вид формы φ:

$$\varphi = 4y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,$$

где $z_1 = 2y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = \sqrt{2}\, y_3$. Таким образом, ранг формы $r = 3$, положительный индекс $p = 1$, отрицательный индекс равен 2, сигнатура равна -1.

Сделанное преобразование координат можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица перехода T (см. формулу (7.3)) равна

$$T=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$T'AT=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=D.$$

Диагональная матрица D как раз и определяет канонический вид данной формы φ.

1.206. Привести к каноническому виду форму

$$\varphi(\boldsymbol{x})=2x_1x_2-4x_1x_4+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

Решение. Здесь коэффициент при x_1^2 равен нулю, поэтому сначала надо сделать дополнительное преобразование

$$x_1=t_1+t_2,\quad x_2=t_1-t_2,\quad x_3=t_3,\quad x_4=t_4,$$

в результате которого появится член с t_1^2. Дальнейшие действия такие же, как в предыдущей задаче:

$$\varphi=2t_1^2-2t_2^2-2t_1t_4-6t_2t_4+2t_3t_4=2\left(t_1^2-t_1t_4+\frac{1}{4}t_4^2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}t_4^2-2\left(t_2^2+3t_2t_4+\frac{9}{4}t_4^2\right)+\frac{9}{4}t_4^2+2t_3t_4=2\left(t_1-\frac{1}{2}t_4\right)^2-$$

$$-2\left(t_2+\frac{3}{2}t_4\right)^2+\frac{9}{2}\left(t_4+\frac{2}{9}t_3\right)^2-\frac{2}{9}t_3^2.$$

Обозначая

$$y_1=t_1-\frac{1}{2}t_4,\quad y_2=t_4+\frac{2}{9}t_3,\quad y_3=t_2+\frac{3}{2}t_4,\quad y_4=t_3,$$

приведем данную квадратичную форму к каноническому виду

$$\varphi=2y_1^2+2y_2^2-2y_3^2-\frac{2}{9}y_4^2=z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_4^2,$$

где

$$z_1=\sqrt{2}\,y_1,\quad z_2=\sqrt{2}\,y_2,\quad z_3=\sqrt{2}\,y_3,\quad z_4=\frac{\sqrt{2}}{3}y_4.$$

Ранг формы $r=4$, сигнатура равна нулю.

1.207. Привести к каноническому виду данные квадратичные формы, указать их ранги и сигнатуры. Выписать матрицу A формы φ и матрицу T перехода от новых координат к старым.

Проверить, что в формуле (8.3) матрица A диагональная:

а) $\varphi(x) = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 10x_2^2$;

б) $\varphi(x) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 8x_3^2$;

в) $\varphi(x) = x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4$;

г) $\varphi(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$.

1.208. Доказать, используя определение (8.3), что две матрицы, конгруэнтные третьей, конгруэнтны друг другу.

2. Приведение квадратичной формы к главным осям. Матрица T, приводящая по формуле (8.3) симметрическую матрицу A к диагональной форме, а квадратичную форму $\varphi(x)$ к каноническому виду (8.4), определяется неоднозначно. *Среди всех таких матриц всегда можно выбрать ортогональную,* для которой вследствие $T' = T^{-1}$ соотношение конгруэнтности превращается в соотношение подобия. Но у подобных матриц характеристические числа одни и те же, а у диагональной матрицы D характеристические числа стоят на главной диагонали. Поэтому, зная характеристические числа матрицы A $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, можно сразу записать канонический вид квадратичной формы $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{8.6}$$

Причем здесь используется тот факт, что у симметрической матрицы все корни характеристического уравнения вещественные.

Если надо знать не только канонический вид, но и ортогональное преобразование $X = TY$, приводящее форму φ к этому виду, то среди собственных векторов выбирают ортонормированный базис (§ 1, п. 3), что всегда осуществимо, и, располагая координаты этих векторов в столбцы, получают искомую матрицу T. Геометрически такой выбор матрицы T означает переход к новой декартовой системе координат, определяемой ортонормированным базисом собственных векторов матрицы A. Новые оси координат называют в этом случае главными осями матрицы A и соответствующей квадратичной формы $\varphi(x)$.

Ортонормированный базис собственных векторов симметрической матрицы A находят так. Если λ — простой корень характеристического уравнения, то ему отвечает с точностью до множителя один собственный вектор. Множитель тогда выбирают так, чтобы этот вектор стал единичным (нормируют собственный вектор). Если λ корень кратности m, то ему отвечают m линейно независимых собственных векторов. Подвергая их процессу ортогонализации и нормировки (§ 1, п. 3), получают m взаимно ортогональных единичных векторов, отвечающих числу λ. Так как собственные векторы, отвечающие разным характеристическим числам, ортогональны, то, собирая вместе полученные векторы, будем иметь ортонормированный базис собственных векторов.

Приведению квадратичной формы $\varphi(x)$ к главным осям можно придать следующую геометрическую формулировку: в евклидовом пространстве уравнение $\varphi(x) = C$ определяет некоторую поверхность второго порядка. Ортогональное преобразование $X = TY$, приводящее форму к виду (8.6), означает поворот декартовых осей, который осуществляет преобразование уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = C.$$

По виду этого уравнения легко узнать тип данной поверхности второго порядка.

1.209. Привести к главным осям квадратичную форму

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. Выписываем матрицу A и находим ее характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = -(\lambda - 9)^2(\lambda + 9) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ — характеристические числа матрицы A. По формуле (8.6) получим теперь канонический вид данной квадратичной формы

$$\varphi = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2.$$

Найдем ортогональную матрицу T, приводящую форму φ к этому виду. Собственные векторы, отвечающие корню $\lambda = 9$, определяются из уравнения $(A - 9I)\,\boldsymbol{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все строчки матрицы $(A - 9T)$ пропорциональны, то здесь имеется только одно независимое уравнение

$$-8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \text{ или } x_2 = -2x_1 - 2x_3.$$

Полагая $x_1 = 1$; $x_3 = 0$ и $x_1 = 0$; $x_3 = 1$, получим два линейно независимых собственных вектора $\boldsymbol{a} = (1, -2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, -2, 1)$, отвечающих значению $\lambda = 9$. Подвергая их процессу ортогонализации (§ 1, п. 3), найдем два ортогональных собственных вектора

$$\boldsymbol{a} = (1, -2, 0), \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \tfrac{5}{4}\boldsymbol{b} = \left(1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{5}{4}\right).$$

Нормируя эти векторы, получим два орта

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \quad \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Собственный вектор, отвечающий простому корню $\lambda = -9$, находится из уравнения $(A + 9I)\,\boldsymbol{x} = 0$. С точностью до множителя он равен (2, 1, 2). Соответствующий орт

$$\boldsymbol{e}_3 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Таким образом, найдена ортонормированная система собственных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Столбцы искомой ортогональной матрицы T

составлены из координат этих векторов:

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Рекомендуется проверить самостоятельно, что $\tilde{A}=T'AT$ есть диагональная матрица с числами 9, 9, -9 на главной диагонали.

Замечание. После того как найдены векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, третий вектор $\boldsymbol{e}_3$ ортонормированного базиса в трехмерном пространстве можно найти без использования характеристического уравнения как векторное произведение

$$\boldsymbol{e}_3=[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{vmatrix}=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}.$$

1.210. Найти тип и каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$x_1^2+2x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2+2x_2x_3+x_3^2=6.$$

Решение. Выписываем матрицу A левой части уравнения и находим ее характеристические числа:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad |A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+7\lambda^2-36=-(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Следовательно, $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$, и поэтому канонический вид данного уравнения следующий:

$$-2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2=6,\text{ или }\frac{y_3^2}{1}+\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_1^2}{3}=1.$$

Это уравнение определяет однополостный гиперболоид с полуосями $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$.

1.211. Привести к главным осям следующие квадратичные формы. Найти ортогональную матрицу T, осуществляющую

переход к каноническому виду:

а) $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$;

б) $\varphi(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$;

в) $\psi(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$;

г) $\varphi(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2$.

1.212. Определить тип и найти каноническое уравнение поверхностей второго порядка:

а) $2x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 3$;

б) $7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 = 18$;

в) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 6$.

3. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Квадратичная форма $\varphi(x)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для любого ненулевого вектора x ее значение $\varphi(x) > 0$ ($\varphi(x) < 0$). В каноническом виде положительно определенная форма $\varphi(x)$ имеет n положительных, а отрицательно определенная — n отрицательных квадратов. Ранг таких форм равен n. Чтобы установить, является ли данная форма положительно (отрицательно) определенной, не обязательно приводить ее к каноническому виду. Можно воспользоваться следующим критерием:

Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа ее матрицы A были положительны (отрицательны).

Существует и другой, более удобный критерий, не требующий разыскания характеристических чисел. Назовем *главными минорами* симметрической матрицы A числа

$$D_1 = a_{11},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n = |A|.$$

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы форма $\varphi(x)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры $D_1, D_2, \ldots, D_n$ были положительны. Для того чтобы $\varphi(x)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, $\ldots, D_n(-1)^n > 0$.*

1.213. Показать, что необходимым и достаточным условием положительной определенности формы $\varphi(x)$ является конгруэнтность ее матрицы A единичной матрице I.

Решение. Если форма $\varphi(x)$ положительно определена, то преобразованием координат $X = TZ$ она приводится к нормальному виду $\varphi = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$, которому отвечает матрица I. Поэтому по формуле (8.3) $T'AT = I$, т. е. A и I конгруэнтны. Обратно, если это условие выполнено, то преобразование $X = TZ$ приведет форму $\varphi(x)$ к сумме квадратов всех новых переменных Z, что равносильно ее положительной определенности.

1.214. Доказать, что форма $\varphi(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда ее матрица A представляется в виде $A = C'C$, где C — некоторая невырожденная матрица.

Решение. Если $A = C'C$, где $|C| \neq 0$, то, обозначив $T = C^{-1}$, получим

$$T'AT = (C^{-1})'C'CC^{-1} = C'^{-1}C'CC^{-1} = II = I,$$

т. е. A конгруэнтна единичной матрице I и поэтому форма $\varphi(\boldsymbol{x})$ положительно определена (см. 1.213). Обратно, если $\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$, то $T'AT = I$. Обозначая $C = T^{-1}$ и умножая предыдущее равенство справа на C и слева на C', получим

$$C'C = C'IC = C'T'ATC = C'(C')^{-1}AC^{-1}C = IAI = A,$$

что и требовалось доказать.

1.215. При каких значениях α следующая форма положительно определена:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2.$$

Решение. Выпишем матрицу этой формы и найдем ее главные миноры D_i:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \alpha^2, \quad D_3 = |A| = -5\alpha^2 - 4\alpha.$$

Условия положительной определенности $D_i > 0$ выполнены, если $\alpha^2 < 1$, $5\alpha^2 + 4\alpha < 0$. Решая эти неравенства, получим те значения α, при которых $\varphi(\boldsymbol{x}) > 0$:

$$-\frac{4}{5} < \alpha < 0.$$

1.216. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от n аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0$$

значения вторых частных производных в некоторой точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Поскольку эти производные непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования, так что $a_{ij} = a_{ji}$, и можно рассмотреть квадратичную форму

$$\varphi(\Delta\boldsymbol{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j, \tag{8.7}$$

где $\Delta\boldsymbol{x}$ — вектор смещения из точки M_0 в точку

$$M(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n).$$

Пусть M_0 — стационарная точка функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Показать, что положительная определенность формы (8.7) есть доста-

точное условие минимума в этой точке, а отрицательная определенность формы (8.7) — достаточное условие максимума в M_0.

Решение. Заметим прежде всего, что

$$\varphi(\Delta x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot\Delta x_i\Delta x_j=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_0\Delta x_i\Delta x_j=(d^2f)_0$$

— значение второго дифференциала функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке M_0. Значение же первого дифференциала $(df)_0=0$, так как по условию M_0 — стационарная точка. Поэтому, записывая формулу Тейлора, получим

$$f(M)=f(M_0)+(df)_0+\frac{1}{2}(d^2f)_0+\varepsilon=f(M_0)+\frac{1}{2}\varphi(\Delta x)+\varepsilon,$$

где ε — величина бесконечно малая при $\Delta x_i\to 0$, причем высшего порядка малости по сравнению с $(d^2f)_0$ или, что то же, по сравнению с $\varphi(\Delta x)$. Из этой формулы получим

$$f(M)-f(M_0)=\frac{1}{2}\varphi(\Delta x)+\varepsilon.$$

При малых ΔX_i, т. е. в малой окрестности точки M_0, величина ε не влияет на знак разности слева, который полностью определяется, следовательно, знаком $\varphi(\Delta x)$.

Если форма (8.7) положительно (отрицательно) определенная, то при любом ненулевом наборе приращений $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ всегда $\varphi(\Delta x)>0$ (соответственно, $\varphi(\Delta x)<0$), так что и $f(M)-f(M_0)>0$ (соответственно, $f(M)-f(M_0)<0$), т. е. в окрестности M_0 $f(M)>f(M_0)$ (соответственно, $f(M)<f(M_0)$). Это означает, что M_0 есть точка минимума (соответственно, максимума) функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1.217. Исследовать на экстремум функцию

$$f=x^2+y^2+z^2-xy+2z-3x.$$

Решение. Находим сначала стационарные точки, решая систему

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y-3=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z+2=0.$$

В данном случае стационарная точка одна: $M_0(2,1,-1)$. Запишем далее второй дифференциал в этой точке:

$$(d^2f)_0=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\Delta x^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0\Delta x\Delta y+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)_0\Delta x\,\Delta z+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\Delta y^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)_0\Delta y\,\Delta z+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0\Delta z^2=2\Delta x^2-$$

$$-2\Delta x\,\Delta y+2\Delta y^2+2\Delta z^2.$$

Матрица A полученной квадратичной формы имеет главные миноры:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad D_1=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3,\quad D_3=|A|=6.$$

Поскольку $D_i>0$, то форма $\varphi(\Delta\boldsymbol{x})$ положительно определена, и значит, в точке $M_0(2,1,-1)$ функция f достигает минимума (см. **1.216.**).

1.218. Выписать условия положительной и отрицательной определенности формы

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\alpha x_1^2+2\beta x_1x_2+\gamma x_2^2.$$

1.219. Выяснить, при каких значениях параметра α данные квадратичные формы положительно или отрицательно определены:

а) $\varphi(\boldsymbol{x})=2x_1^2+2x_1x_2+2\alpha x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+\alpha x_3^2$;

б) $\varphi(\boldsymbol{x})=-x_1^2+2\alpha x_1x_2-x_2^2+2\alpha x_2x_3-x_3^2$;

в) $\varphi(\boldsymbol{x})=5x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+\alpha x_3^2$.

1.220. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $f=x^3+y^3+3xy$;

б) $f=xyz(8-x-y-z)$;

в) $f=(2x-y-2z)e^{x^2-y^2-z^2}$;

г) $f=x+y+z+\dfrac{16}{xyz}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

§ 9. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ИХ МАТРИЦЫ

1. Простейшие четырехполюсники. *Четырехполюсником* называется электрическая цепь, имеющая два входных и два выходных зажима (рис. 16). Если предположить, что эта цепь содержит только сопротивления, индуктивности, емкости, электродвигатели с одинаковой частотой и усилители, работающие в линейном режиме, то между входными и выходными значениями тока и напряжения существует линейная зависимость вида

$$\begin{aligned} E_2&=\gamma_{11}E_1+\gamma_{12}I_1,\\ I_2&=\gamma_{21}E_1+\gamma_{22}I_1. \end{aligned}\qquad (9.1)$$

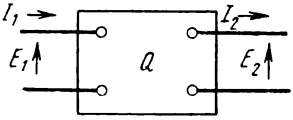


Рис. 16

Заметим, что в общем случае все величины, входящие в формулу (9.1), являются комплексными. Переход к их действительным значениям осуществляется с помощью операционного исчисления (см. гл. VI).

Обозначим

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

входной вектор тока-напряжения и

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

выходной вектор тока-напряжения, тогда формула (9.1) может быть представлена в матричном виде

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

где матрица $\Gamma = (\gamma_{ij})$ называется матрицей четырехполюсника. Из формул (9.1) можно получить и другие формы зависимости между входными и выходными данными четырехполюсника:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} E_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Матрица $Y = (y_{ij})$ называется матрицей *адметанса* или *полной проводимости* четырехполюсника, матрица $Z = (z_{ij})$ — матрицей *импеданса* или *полного сопротивления*. Эти матрицы являются взаимно обратными. Обратными будут также матрицы $H = (h_{ij})$ и $G = (g_{ij})$. Поскольку в отдельных задачах пользуются разными матрицами из (9.2) и (9.3), то необходимо указать, как выражаются элементы каждой из них через элементы других матриц. Такое выражение дано в следующей таблице:

Таблица 1

	(γ_{ij})	(y_{ij})	(z_{ij})	(h_{ij})	(g_{ij})
Γ	$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{y_{12}} \begin{pmatrix} -y_{11} & 1 \\ -\lvert Y \rvert & y_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{z_{12}} \begin{pmatrix} z_{22} & -\lvert Z \rvert \\ 1 & -z_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -h_{11} \\ h_{22} & -\lvert H \rvert \end{pmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{pmatrix} -\lvert G \rvert & g_{22} \\ -g_{11} & 1 \end{pmatrix}$
Y	$\frac{1}{\gamma_{12}} \begin{pmatrix} -\gamma_{11} & 1 \\ -\lvert \Gamma \rvert & \gamma_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\lvert Z \rvert} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \lvert H \rvert \end{pmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{pmatrix} \lvert G \rvert & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{pmatrix}$
Z	$\frac{1}{\gamma_{21}} \begin{pmatrix} -\gamma_{22} & 1 \\ -\lvert \Gamma \rvert & \gamma_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\lvert Y \rvert} \begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{pmatrix} \lvert H \rvert & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \lvert G \rvert \end{pmatrix}$
H	$\frac{1}{\gamma_{11}} \begin{pmatrix} -\lvert \Gamma \rvert & 1 \\ \lvert \Gamma \rvert & \gamma_{21} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{y_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & \lvert Y \rvert \end{pmatrix}$	$\frac{1}{z_{22}} \begin{pmatrix} \lvert Z \rvert & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{G} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$
G	$\frac{1}{\gamma_{22}} \begin{pmatrix} -\gamma_{21} & 1 \\ \lvert \Gamma \rvert & \gamma_{12} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{y_{22}} \begin{pmatrix} \lvert Y \rvert & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{z_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -z_{12} \\ z_{21} & \lvert Z \rvert \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\lvert H \rvert} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

Разумеется, у данного четырехполюсника не всегда существуют все пять указанных матриц. Например, если $\gamma_{12} = 0$, то отсутствует матрица проводимости Y, если H — вырожденная матрица, то не существует обратная матрица G и т. д. В дальнейшем в качестве основной мы будем брать матрицу Γ и все результаты выражать через ее элементы γ_{ij}. Приведенная выше

таблица позволяет легко подсчитать при надобности выражения и других матриц.

Четырехполюсник называется *пассивным*, если в его цепи отсутствуют источники тока. Пассивный четырехполюсник содержит только сопротивления, индуктивности и емкости и характеризуется равенством $z_{12}=-z_{21}$ или $|\Gamma|=\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}=1$. Ниже мы будем заниматься в основном пассивными четырехполюсниками.

1.221. Найти матрицы Γ четырехполюсников, изображенных на рис. 17.

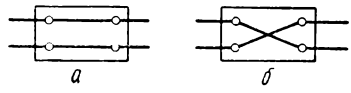


Рис. 17

Решение. Четырехполюсник а) не меняет значения напряжения и силы тока, т. е. $E_2=E_1$, $I_2=I_1$. Сравнение с (9.1) показывает, что его матрица

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

В случае четырехполюсника б) $E_2=-E_1$, $I_2=-I_1$, и значит

$$\Gamma=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I.$$

1.222. Найти матрицу четырехполюсника с последовательно включенным полным сопротивлением (импедансом) Z (рис. 18).

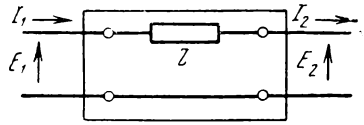


Рис. 18

Импеданс включает в себя активное сопротивление R, индуктивность L и емкость C. Общее его выражение

$$Z=Lp+R+\frac{1}{Cp},$$

где $p=s+i\sigma$ — комплексное переменное (см. гл. VI).

Решение. В данном случае сила тока не меняется, а напряжение на выходе падает на величину $U=I_1Z$, т. е.

$$I_2=I_1,\quad E_2=E_1-U=E_1-I_1Z.$$

Сравнивая с (9.1), получаем

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.223. Найти матрицу Γ четырехполюсника с параллельно включенным импедансом Z (рис. 19).

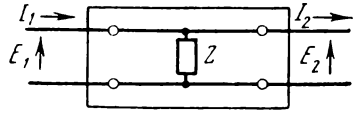


Рис. 19

Решение. При параллельном включении импеданса напряжение не меняется, а изменение силы тока определяется равенством

$$(I_1 - I_2) Z = E_1.$$

Следовательно,

$$E_2 = E_1, \quad I_2 = -\frac{1}{Z} E_1 + I_1$$

и поэтому по формуле (9.1) матрица Γ равна

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix}.$$

1.224. Найти матрицу Γ трансформатора с индуктивной связью $\mu = pM$ и сопротивлением обмоток $Z_1 = R_1 + pL_1$ и $Z_2 = R_2 + pL_2$ (рис. 20).

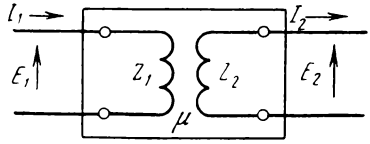


Рис. 20

Решение. Запишем уравнения, определяющие напряжения на входе и на выходе трансформатора:

$$E_1 = Z_1 I_1 - \mu I_2,$$
$$E_2 = \mu I_1 - Z_2 I_2.$$

Сравнивая с (9.3), мы видим, что коэффициенты при I_1, I_2 образуют матрицу Z. Зная z_{ij}, из первой строки таблицы 1 найдем

матрицу Г:

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 & -\mu \\ \mu & -Z_2 \end{pmatrix},\quad |Z|=\mu^2-Z_1Z_2,$$

$$\Gamma=-\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} -Z_2 & -\mu^2+Z_1Z_2 \\ 1 & -Z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{Z_2}{\mu} & \frac{\mu^2-Z_1Z_2}{\mu} \\ -\frac{1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

В общем случае $Z_1=R_1+pL_1$, $Z_2=R_2+pL_2$, где R_1, R_2 — сопротивления обмоток, а L_1, L_2 — их индуктивности. Для идеального трансформатора принимают $R_1=R_2=0$ и $\mu^2=Z_1Z_2$. Следовательно, матрица Г идеального трансформатора имеет вид:

$$\Gamma=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} & 0 \\ -\frac{1}{p\sqrt{L_1L_2}} & \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \end{pmatrix}.$$

В ряде случаев членом γ_{21} пренебрегают ввиду его малости и пользуются упрощенной матрицей

$$\Gamma=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{m}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n}{m} \end{pmatrix},$$

где m и n — числа витков первичной и вторичной обмоток трансформатора (тогда $L_1=m^2L$, $L_2=n^2L$, где L — индуктивность одного витка).

1.225. Найти сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника с данной матрицей Г.

Решение. Если отключить выход четырехполюсника, то $I_2=0$ и на входе получим $E_1=Z_{\text{х.х}}I_1$, где $Z_{\text{х.х}}$ — сопротивление холостого хода четырехполюсника. С другой стороны, из второго равенства (9.3) при $I_2=0$ находим, что $E_1=z_{11}I_1$. Таким образом,

$$Z_{\text{х.х}}=z_{11}=-\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}}.$$

Если замкнуть выходные зажимы, то $E_2=0$ и на входе $E_1=Z_{\text{к.з}}I_1$, где $Z_{\text{к.з}}$ — сопротивление короткого замыкания. Из третьего равенства (9.3) при $E_2=0$ получим $E_1=h_{11}I_1$, т. е.

$$Z_{\text{к.з}}=h_{11}=-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}.$$

1.226. Найти в тех случаях, когда они существуют, матрицы Y, H, Z, G для четырехполюсников задач **1.221**, **1.222**, **1.223**.

2. Каскадное соединение четырехполюсников (см. рис. 21). Согласно формуле (9.2) матрицы Г определяют линейные операторы в пространстве

векторов $\begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix}$. При каскадном соединении вектор выхода каждого четырехполюсника равен вектору входа следующего за ним четырехполюсника, и

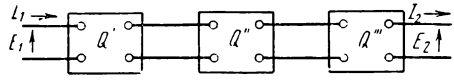


Рис. 21

поэтому указанные линейные операторы применяются последовательно, начиная с оператора с матрицей Γ'. При этом соответствующие матрицы перемножаются. Так, для четырехполюсника рис. 21

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \Gamma'''\Gamma''\Gamma' \begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \Gamma'''\Gamma''\Gamma'.$$

Итак, чтобы получить матрицу Γ каскадного соединения, надо перемножить (в обратном порядке!) матрицы, составляющие каскад четырехполюсников.

1.227. Найти матрицы адметанса и импеданса Г-образного четырехполюсника (рис. 22).

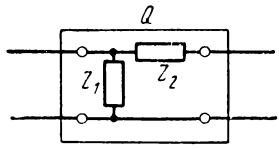


Рис. 22

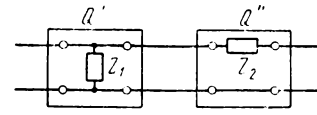


Рис. 23

Решение. Этот четырехполюсник можно представить как каскад из двух четырехполюсников Q' и Q'' (рис. 23), матрицы которых определены в задачах **1.222** и **1.223**:

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'' = \begin{pmatrix} 1 & -Z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая эти матрицы, найдем матрицу Γ четырехполюсника рис. 22:

$$\Gamma = \Gamma''\Gamma' = \begin{pmatrix} 1 & -Z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{Z_2}{Z_1} & -Z_2 \\ -\frac{1}{Z_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Из первого столбца табл. 1 находим матрицы Y и Z:

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 & -Z_1 \\ Z_1 & -Z_1-Z_2 \end{pmatrix}.$$

1.228. Найти матрицы Y и Z Т-образного четырехполюсника (рис. 24).

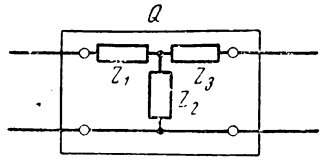


Рис. 24

Решение. Представляя четырехполюсник Q как каскад из Q', Q'', Q''' с полными сопротивлениями Z_1, Z_2, Z_3 и используя результаты задач **1.222** и **1.223**, получим:

$$\Gamma = \Gamma'''\Gamma''\Gamma' = \begin{pmatrix} 1 & -Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{Z_3}{Z_2} & -Z_1 - Z_3 - \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & 1+\frac{Z_1}{Z_2} \end{pmatrix}.$$

После этого по таблице 1 найдем

$$Y = \frac{1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}\begin{pmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 - Z_2 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{matrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -Z_2 - Z_3 \end{matrix}$$

1.229. С помощью каскадного соединения найти матрицы четырехполюсников, изображенных на рис. 25.

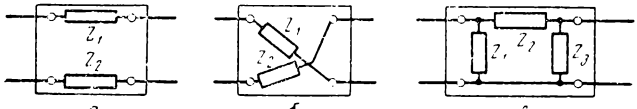


Рис. 25

1.230. Найти матрицы Г четырехполюсников, представленных на рис. 26.

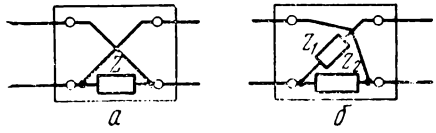


Рис. 26

Указание. Четырехполюсник а) представить как каскад из четырехполюсника задачи **1.223** и четырехполюсника задачи **1.221** б). Четырехполюсник б) — каскад из четырехполюсников а) и задачи **1.222**.

1.231. На рис. 27 изображено каскадное соединение двух трансформаторов с коэффициентами индуктивной связи μ_1 и μ_2.

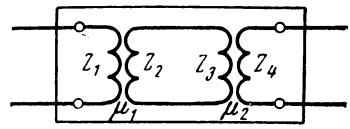


Рис. 27

Найти первичное и вторичное сопротивления Z_1 и Z_2 и коэффициент связи μ одного трансформатора, эквивалентного каскадному соединению двух данных.

Указание. Воспользоваться результатами задачи **1.224**. Найти матрицу каскадного соединения трансформаторов и потребовать, чтобы она имела вид Г одного трансформатора.

3. Параллельное и последовательное соединения четырехполюсников. При параллельном соединении (рис. 28) входные напряжения как у данных четырехполюсников Q', Q'', так и у общего четырехполюсника Q должны быть одинаковые, так же, как и выходные:

$$E_1 = E_1' = E_1'', \quad E_2 = E_2' = E_2''. \tag{9.4}$$

Полные же токи состоят из суммы токов $I_1 = I_1' + I_1''$, $I_2 = I_2' + I_2''$. Поэтому из первого равенства (9.3) вытекает, что матрицы проводимостей складываются.

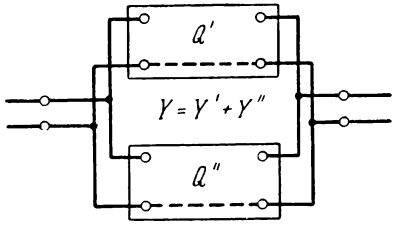


Рис. 28

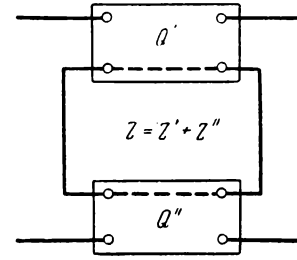


Рис. 29

При последовательном соединении (рис. 29)

$$I_1 = I_1' = I_1'', \quad I_2 = I_2' = I_2'', \tag{9.5}$$

а напряжения складываются. Поэтому согласно второму из равенств (9.3) складываются матрицы сопротивлений Z.

Нетрудно понять также, что при последовательно-параллельном соединении (рис. 30) складываются матрицы H, а при параллельно-последова-

тельном (рис. 31) — складываются матрицы G. Указанные формулы сложения матриц обычно используют, разбивая данный четырехполюсник на ряд простых, соединенных между собой параллельно или последовательно. Важно

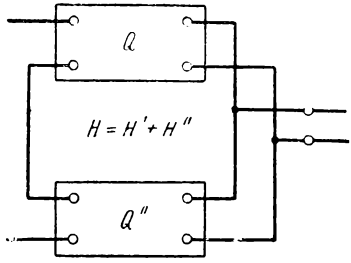


Рис. 30

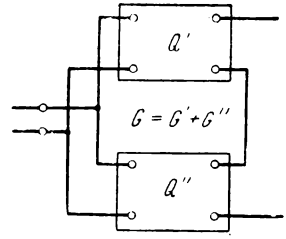


Рис. 31

при этом отметить, что *такие разбиения нельзя производить произвольно.* Нужно следить, чтобы присоединение других четырехполюсников не меняло значений токов и напряжений каждого отдельного четырехполюсника, иначе нарушатся какие-то из условий (9.4) или (9.5). Нужные условия всегда будут соблюдены, если две пары соединяемых клемм связаны кольцом короткого замыкания (пунктир на рис. 28, 29). На рис. 32 показан пример правильного а) и неправиль-

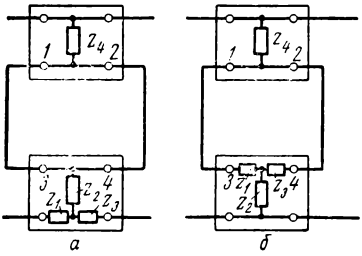


Рис. 32

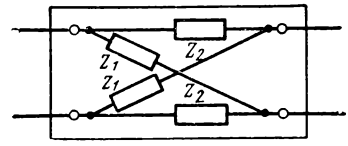


Рис. 33

ного б) последовательного соединения двух четырехполюсников. В первом случае пары клемм (1, 3) и (2, 4) лежат на кольце короткого замыкания. Во втором случае если клеммы (1, 3) соединены, то между клеммами (2, 4) образуется разность потенциалов, и поэтому суммирование матриц вида Z не приведет к матрице составного четырехполюсника.

1.232. Найти матрицу Х-образного четырехполюсника (рис. 33) (решетчатый фильтр).

Решение. Этот четырехполюсник можно представить как результат последовательно-параллельного соединения (рис. 34) двух четырехполюсников, рассмотренных ранее в задачах **1.227** и **1.230** б). В данном случае соединяемые пары клемм (1, 3) и (2, 4) лежат на кольце короткого замыкания, поэтому применима указанная выше схема, согласно

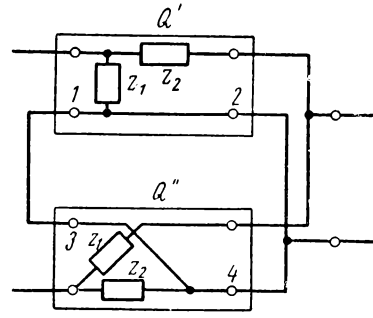


Рис. 34

которой надо сложить матрицы H. Матрицы Γ' и Γ'' составляющих четырехполюсников найдены ранее. По ним из табл. 1 находим H' и H'':

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 1 + \frac{z_2}{z_1} & -z_2 \\ -\frac{1}{z_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad H' = \frac{1}{z_1 + z_2} \begin{pmatrix} z_1 z_2 & z_1 \\ z_1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma'' = \begin{pmatrix} -1 - \frac{z_1}{z_2} & z_1 \\ \frac{1}{z_2} & -1 \end{pmatrix}, \quad H'' = \frac{1}{z_1 + z_2} \begin{pmatrix} z_1 z_2 & -z_2 \\ -z_2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$H = H' + H'' = \frac{1}{z_1 + z_2} \begin{pmatrix} 2z_1 z_2 & z_1 - z_2 \\ z_1 - z_2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \frac{1}{z_1 - z_2} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & -2z_1 z_2 \\ -2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

1.233. Указать правильное разложение четырехполюсника рис. 32, *б* на составляющие четырехполюсники.

Решение. Разложение дано на рис. 35. Данный четырехполюсник состоит из последовательно включенных четырехполюсников Q', Q'', Q''', причем в Q'' каскадно соединены два четырехполюсника с параллельными сопротивлениями z_1 и z_3.

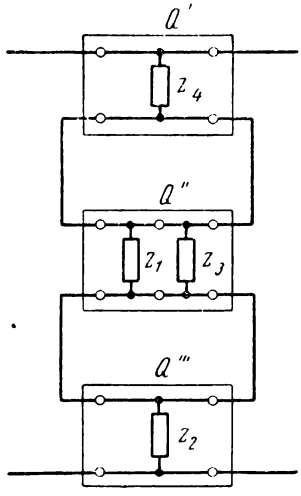


Рис. 35

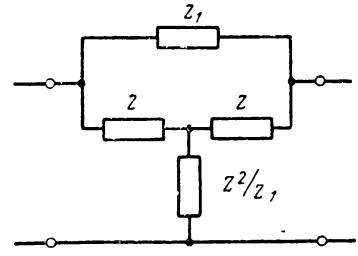


Рис. 36

1.234. Найти матрицы Γ четырехполюсников рис. 32, *а* и 35.

1.235. Найти матрицу Γ Т-образной мостовой схемы, указанной на рис. 36.

Указание. Разбить схему на две элементарные, соединенные параллельно (рис. 37).

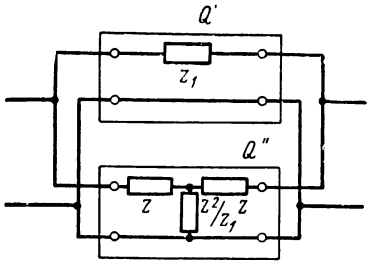


Рис. 37

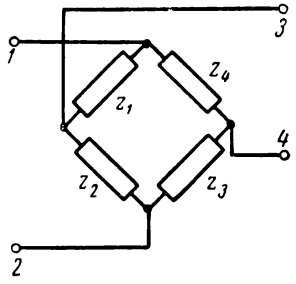


Рис. 38

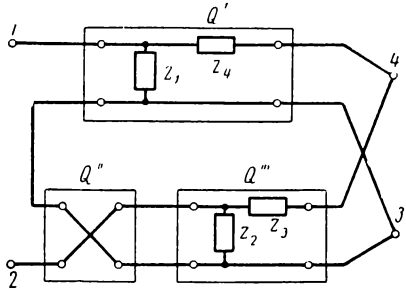


Рис. 39

1.236. Найти матрицу H мостика сопротивлений (рис. 38). Указание. См. рис. 39.

§ 10. МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Функции от матриц. Пусть A — квадратная матрица порядка n. *Многочлены* от A были рассмотрены в § 2, п. 3. Если $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k$ — многочлен степени k, то по определению

$$P(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_k A^k. \tag{10.1}$$

Это определение естественным образом распространяется и на аналитические функции $f(x)$, которые представимы в виде суммы степенного ряда в некотором интервале $(-R, R)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k + \ldots \quad \left(\alpha_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right).$$

Значение $f(A)$ в этом случае определяется матричным рядом

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_k A^k + \ldots \tag{10.2}$$

Разумеется, при таком определении $f(A)$ возникает вопрос о сходимости ряда (10.2). Укажем один из критериев сходимости: *Для того чтобы ряд* (10.2) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические*

числа матрицы A лежали внутри круга сходимости ряда для $f(x)$, т. е. $|\lambda_i| < R$. В частности, если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости, то ряд (10.2) имеет смысл при любой матрице A. Примерами таких функций служат

$$
\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k \ldots, \\
\sin A &= A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!}A^{2k-1} + \ldots, \\
\cos A &= I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}A^{2k} + \ldots, \\
\operatorname{sh} A &= A + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!}A^{2k-1} + \ldots, \\
\operatorname{ch} A &= I + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 + \ldots + \frac{1}{(2k)!}A^{2k} + \ldots
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

Формулу (10.2) используют обычно для вычисления приближенных значений $f(A)$, заменяя сумму матричного ряда его частичной суммой $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_k A^k$. Вычисление же точных значений $f(A)$ производят по другим формулам:

а) Если A — нильпотентная матрица, т. е. $A^l = 0$, то $A^{l+1} = A^{l+2} = 0$ и ряд (10.2) превращается в многочлен $f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_{l-1} A^{l-1}$.

б) Если D — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали, то $f(D)$ также диагональная с $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ на главной диагонали:

$$
f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & f(\lambda_2) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}. \tag{10.4}
$$

в) Если известно значение $f(A)$ и $B = T^{-1}AT$ — матрица, подобная A, то

$$
f(B) = T^{-1} f(A)\, T, \tag{10.5}
$$

т. е. $f(B)$ подобна $f(A)$ с той же преобразующей матрицей T.

г) Если у матрицы A все характеристические числа λ_i различные, то $f(A)$ можно найти по формуле

$$
f(A) = f(\lambda_1) G_1 + f(\lambda_2) G_2 + \ldots + f(\lambda_n) G_n, \tag{10.6}
$$

где матрицы G_i не зависят от вида функции f и определяются формулой

$$
G_i = \frac{(A - \lambda_1 I) \ldots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \ldots (A - \lambda_n I)}{(\lambda_i - \lambda_1) \ldots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \ldots (\lambda_i - \lambda_n)}. \tag{10.7}
$$

д) Формула, аналогичная (10.6), имеет место также и в случае кратных корней характеристического уравнения. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — корни кратностей $m_1, \ldots, m_s$, тогда

$$
f(A) = \sum_{i=1}^{s} \left[f(\lambda_i) G_{i1} + f'(\lambda_i) G_{i2} + \ldots + f^{m_i - 1}(\lambda_i) G_{im_i} \right], \tag{10.8}
$$

где G_{it} — матрицы, не зависящие от выбора функции f. В сумме (10.8) каждому корню λ_i соответствует столько слагаемых, какова его кратность. Однако не исключена возможность, что для конкретной матрицы A некоторые из G_{it} обращаются в нуль, и число слагаемых уменьшится. Для определения G_{it} можно указать формулу, аналогичную (10.7). Проще, однако, воспользоваться тем обстоятельством, что в равенстве (10.8) они не зависят

от выбора функции f. Придавая этой функции несколько значений, например, $f(x)=1$, $f(x)=x-\lambda_1$, $f(x)=(x-\lambda_1)^2$ и т. д., получим из (10.8) несколько равенств, из которых определятся матрицы G_{it}.

1.237. Доказать формулу Эйлера

$$e^{iA}=\cos A+i\sin A \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Решение. Подставляя в ряд, определяющий в (10.3) функцию e^A, iA вместо A и выделяя действительную и мнимую части, получим

$$e^{iA}=I+iA-\frac{1}{2!}A^2-i\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{4!}A^4+i\frac{1}{5!}A^5-\frac{1}{6!}A^6+\ldots=$$

$$=\left(I-\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{4!}A^4-\frac{1}{6!}A^6+\ldots\right)+$$

$$+i\left(A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\ldots\right)=\cos A+i\sin A.$$

Отсюда вытекают также формулы

$$\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA}),\quad \sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA}).$$

1.238. Найти e^A, $\cos A$, $\sin A$ для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Для данной матрицы $A^3=0$, поэтому по формулам (10.3)

$$e^A=I+A+\frac{1}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\sin A=A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \cos A=I-\frac{1}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1.239. Пусть $A=\begin{pmatrix}4&-7\\2&-5\end{pmatrix}$. Найти e^A.

Решение. В задаче **1.199** было установлено, что матрица A приводится к подобной диагональной матрице $D=\begin{pmatrix}-3&0\\0&2\end{pmatrix}$ с по-

мощью матрицы $T=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, т. е. $D=T^{-1}AT$. Следовательно, по формуле (10.4) $e^D=T^{-1}e^AT$, откуда

$$e^A=Te^DT^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-3} & 0\\ 0 & e^2\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2e^{-3}+7e^2 & 7e^{-3}-7e^2\\ -2e^{-3}+2e^2 & 7e^{-3}-2e^2\end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить и с помощью формул (10.6) и (10.7), так как характеристические числа матрицы A $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$ различные. Сначала подсчитаем матрицы G_1 и G_2:

$$G_1=\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=-\frac{1}{5}(A-2I)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -2 & 7\end{pmatrix},$$

$$G_2=\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{5}(A+3I)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -7\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

По формуле (10.6) $f(A)=f(-3)G_1+f(2)G_2$. В частности,

$$e^A=e^{-3}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -2 & 7\end{pmatrix}+e^2\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -7\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2e^{-3}+7e^2 & 7e^{-3}-7e^2\\ -2e^{-3}+2e^2 & 7e^{-3}-2e^2\end{pmatrix}.$$

1.240. Найти e^A для матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}$.

Решение.

1-й способ. Заметим, что $A=\alpha J$, где матрица $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $J^2=-I$. Следовательно,

$A^2=-\alpha^2 I$, $A^3=-\alpha^3 J$, $A^4=\alpha^4 I$, $A^5=\alpha^5 J$, $A^6=-\alpha^6 I$, ..., и по спределению (10.3)

$$e^A=I+\alpha J-\frac{\alpha^2}{2!}I-\frac{\alpha^3}{3!}J+\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{\alpha^5}{5!}J-\frac{\alpha^6}{6!}I+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots\right)I+\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+\ldots\right)J=$$

$$=\cos\alpha I+\sin\alpha J=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

2-й способ. Характеристические числа матрицы A равны $\lambda_1=\alpha i$, $\lambda_2=-\alpha i$. Поэтому по формулам (10.6) и (10.7)

$$G_1=\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2\alpha i}\begin{pmatrix}\alpha i & \alpha\\ -\alpha & \alpha i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{i}\\ -\frac{1}{i} & 1\end{pmatrix},$$

$$G_2=\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{2\alpha i}\begin{pmatrix}-\alpha i & \alpha\\ -\alpha & -\alpha i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{i}\\ \frac{1}{i} & 1\end{pmatrix},$$

$$e^A=e^{i\alpha}G_1+e^{-i\alpha}G_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}) & \frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})\\ -\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}) & \frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Для получения последнего равенства были применены формулы Эйлера.

1.241. Найти выражение $f(A)$ для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы имеет вид $(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$. Следовательно, $\lambda_1=1$ — корень кратности 2, $\lambda_2=4$ — простой корень этого уравнения. Запишем по формуле (10.8) выражение $f(A)$, нумеруя для простоты матрицы G_{it} одним индексом:

$$f(A)=f(1)\,G_1+f'(1)\,G_2+f(4)\,G_3.$$

Чтобы определить G_1, подставим сюда вместо $f(x)$ последовательно функции 1, $x-1$, $x-4$. Тогда получим

$$I=G_1+G_3,\quad A-I=G_2+3G_3,\quad A-4I=-3G_1+G_2,$$

т. е.

$$G_1=\frac{4}{3}I-\frac{1}{3}A,\quad G_2=0,\quad G_3=-\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}A.$$

Таким образом, для данной матрицы A

$$f(A)=f(1)\left(\frac{4}{3}I-\frac{1}{3}A\right)+f(4)\left(-\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}A\right)=$$

$$=\left[\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(4)\right]I+\left[-\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(4)\right]A.$$

1.242. Доказать равенство

$$(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\ldots+B^k+\ldots \qquad (10.9)$$

Для каких матриц B оно справедливо?

Решение. Известное разложение в сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots$$

имеет радиус сходимости $R=1$. Заменяя x матрицей B, получим равенство (10.9). Ряд сходится, если все характеристические числа матрицы B по модулю меньше 1, т. е. лежат внутри круга сходимости с радиусом 1. Справедливость равенства (10.9) можно доказать и непосредственно почленным перемножением:

$$(I-B)(I+B+B^2+\ldots+B^k+\ldots)=I.$$

Разумеется, при этом предполагается, что ряд сходится.

1.243. С помощью формулы (10.9) обосновать следующий метод последовательных приближений (итераций). Пусть требуется решить систему n линейных уравнений с n неизвестными $Ax=h$, где A — квадратная матрица, x — столбец неизвестных, h — столбец свободных членов. Представляя матрицу A в виде $A=I-B$, запишем данную систему по-другому:

$$x=Bx+h.$$

В качестве нулевого приближения возьмем столбец $x_0=h$. Первое приближение $x_1=Bx_0+h$, второе $x_2=Bx_1+h$ и т. д., k-е приближение $x_k=Bx_{k-1}+h$. Тогда $x=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ есть решение данной системы.

Решение.

$$x_0=h,\ x_1=Bx_0+h=Bh+h=(B+I)h,$$
$$x_2=Bx_1+h=B(B+I)h+h=(B^2+B+I)h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k=Bx_{k-1}+h=(B^k+B^{k-1}+\ldots+B^2+B+I)h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Выражение в скобках справа есть частичная сумма ряда (10.9), которая в пределе дает $(I-B)^{-1}=A^{-1}$. Следовательно,

$$X=\lim_{k\to\infty}x_k=(I-B)h=A^{-1}h,$$

т. е. x есть решение данной системы $Ax=h$, а x_k — его приближенное значение.

Рассмотренный метод итераций сходится, если все корни матрицы B по модулю меньше единицы (см. **1.242**). В противном случае исходную систему заменяют эквивалентной системой $A_1x=h_1$, подбирая ее так, чтобы матрица $B_1=I-A_1$ уже обладала нужным свойством.

1.244. Доказать, что для всякой матрицы A
$\cos^2A+\sin^2A=I$, $\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$, $\sin 2A=2\cos A\sin A$.

Указание. Использовать формулы Эйлера (см. 1.237).

1.245. Доказать, что

$$\operatorname{ch} A = \frac{1}{2}(e^A + e^{-A}), \quad \operatorname{sh} A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A}).$$

1.246. Найти e^A, $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{sh} A$, $\operatorname{ch} A$ для матриц

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.247. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти e^A, e^B, e^{A+B}. Показать, что $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

1.248. Показать, что для перестановочных матриц A и B имеет место равенство

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

1.249. Найти e^A, если $A = \begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$.

1.250. По формуле (10.6) получить выражение $f(A)$ для данных матриц. Написать e^A, $\cos A$, $\operatorname{ch} A$.

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.251. Найти e^A, e^B, e^{A+B} для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Использовать равенства $A^2 = I$, $B^2 = -I$.

1.252. Найти $\sin A$ и $\operatorname{sh} A$ для матриц

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Указание. Эти матрицы имеют кратные характеристические числа, и поэтому надо пользоваться формулой (10.8).

1.253. Записать в виде рядов по степеням B матрицы $(I-B)^{-2}$, $(I+B)^{\frac{1}{2}}$, $(I-B)^{\frac{1}{2}}$. Для каких матриц B эти ряды сходятся?

Указание. Использовать биномиальное разложение функции $(1\pm x)^{\alpha}$.

2. Матричные функции скалярного аргумента. Если все элементы матрицы A являются функциями от аргумента t, заданными на отрезке $[\alpha, \beta]$, то говорят, что задана функция $A(t)=(a_{ij}(t))$. Если все $a_{ij}(t)$ непрерывны, то функция $A(t)$ называется непрерывной. Производные и интегралы от функции $A(t)$ определяются поэлементно:

$$\frac{dA}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{da_{11}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{da_{n1}}{dt} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dt}\end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}A(t)\,dt=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t}a_{11}(t)\,dt & \cdots & \int_{t_0}^{t}a_{1n}(t)\,dt\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \int_{t_0}^{t}a_{n1}(t)\,dt & \cdots & \int_{t_0}^{t}a_{nn}(t)\,dt\end{pmatrix}. \tag{10.10}$$

Дифференцирование и интегрирование функции $A(t)$ удовлетворяет обычным свойствам линейности. Имеет место формула дифференцирования произведения

$$\frac{d(AB)}{dt}=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}. \tag{10.11}$$

Существенно отметить, что порядок следования матриц A и B в этой формуле путать нельзя (умножение матриц некоммутативно).

1.254. В каком случае $\frac{d(A^2)}{dt}=2A\frac{dA}{dt}$?

Решение. Полагая в формуле (10.11) $A=B$, найдем

$$\frac{d(A^2)}{dt}=\frac{dA}{dt}A+A\frac{dA}{dt}.$$

Если A и $\frac{dA}{dt}$ перестановочны, то оба слагаемых в правой части одинаковы, и тогда $\frac{d(A^2)}{dt}=2A\frac{dA}{dt}$.

1.255. Пусть $A(t)$ невырожденная матрица для всех значений t из $[\alpha, \beta]$, тогда существует обратная матрица $A^{-1}(t)$, также являющаяся функцией от t. Найти ее производную.

Решение. По условию $A(t)A^{-1}(t)=I$. Дифференцируя это равенство по формуле (10.11) и учитывая, что производная постоянной матрицы равна нулю, получим

$$\frac{dA}{dt}A^{-1}+A\frac{d(A^{-1})}{dt}=0,\quad A\frac{d(A^{-1})}{dt}=-\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

Умножаем последнее равенство слева на A^{-1}:

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

В частности, если A^{-1} и $\frac{dA}{dt}$ перестановочны, то

$$\frac{d(A^{-1})}{dt} = -A^{-2}\frac{dA}{dt},$$

что аналогично обычной формуле дифференцирования функции $\frac{1}{a(t)}$.

1.256. Показать, что если A и $\frac{dA}{dt}$ перестановочны, то

$$\frac{d(A^m)}{dt} = mA^{m-1}\frac{dA}{dt} = m\frac{dA}{dt}A^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Указание. См. **1.254.**

1.257. В предположении, что A и $\frac{dA}{dt}$ перестановочны, найти формулу производной от $e^{A(t)}$.

Решение. Представляем $e^{A(t)}$ в виде суммы ряда

$$e^{A(t)} = I + A(t) + \frac{1}{2!}A^2(t) + \frac{1}{3!}A^3(t) + \frac{1}{4!}A^4(t) + \frac{1}{5!}A^5(t) + \ldots$$

и дифференцируем этот ряд почленно, используя формулу дифференцирования степени (**1.256**):

$$\frac{de^{A(t)}}{dt} = \frac{dA}{dt} + \frac{1}{2!}2A\frac{dA}{dt} + \frac{1}{3!}3A^2\frac{dA}{dt} + \frac{1}{4!}4A^3\frac{dA}{dt} + \frac{1}{5!}5A^4\frac{dA}{dt} + \ldots =$$

$$= \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \ldots\right)\frac{dA}{dt} = e^{A(t)}\frac{dA}{dt}.$$

Итак, если $A(t)$ перестановочна со своей производной, то

$$\frac{de^{A(t)}}{dt} = e^{A(t)}\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt}e^{A(t)}.$$

1.258. Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^t & t & t \\ t & e^t & t \\ t & t & e^t \end{pmatrix}.$$

Найти $\frac{d^2A}{dt^2}$ и $\frac{d(A^2)}{dt}$.

1.259. Пусть $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$. Найти $\int\limits_0^1 A(t)\,dt$.

1.260. Пусть A — постоянная матрица. Показать, что $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$. Найти производные от $\sin At$ и $\cos At$.

Указание. См. **1.257** и **1.237.**

1.261. В предположении, что A и $\frac{dA}{dt}$ перестановочны, найти производные от $\sin A(t)$, $\cos A(t)$, $\operatorname{sh} A(t)$, $\operatorname{ch} A(t)$.

3. Матричное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений. Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n, \end{aligned} \tag{10.12}$$

где функции $a_{ij}(t)$ предполагаются непрерывными при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Обозначая $\boldsymbol{x}$ вектор-столбец из неизвестных функций, $A(t) = (a_{ij}(t))$ матрицу системы, запишем систему (10.12) в матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\,\boldsymbol{x}. \tag{10.13}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение данной системы имеет вид

$$\boldsymbol{x} = C_1\boldsymbol{x}_1(t) + C_2\boldsymbol{x}_2(t) + \ldots + C_n\boldsymbol{x}_n(t),$$

где C_i — произвольные постоянные, а $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$, ..., $\boldsymbol{x}_n(t)$ — n линейно независимых векторов — решений системы (10.13) (фундаментальная система решений). Расположим координаты векторов $\boldsymbol{x}_i(t)$ в столбцы матрицы X:

$$X = (\boldsymbol{x}_1(t)\,\boldsymbol{x}_2(t)\ldots\boldsymbol{x}_n(t)).$$

Вследствие того, что каждый из столбцов этой матрицы удовлетворяет уравнению (10.13), вся матрица X также удовлетворяет этому уравнению:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X. \tag{10.14}$$

Обратно, если квадратная матрица X есть решение (10.14), то каждый ее столбец удовлетворяет уравнению (10.13), т. е. данной системе (10.12). Если, кроме того, X — невырожденная матрица, то ее столбцы линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Таким образом, задача интегрирования системы (10.12) равносильна задаче о нахождении невырожденного решения $X(t)$ матричного уравнения (10.14). Матрица X называется *интегральной матрицей*.

Интегральная матрица X однозначно определяется заданием начального условия $X(t_0) = B$, где B — данная невырожденная постоянная матрица. Всякая другая интегральная матрица X получается из нее по формуле

$$\tilde{X} = XC, \tag{10.15}$$

где C — произвольная постоянная невырожденная матрица.

Интегральная матрица называется *нормированной*, если она удовлетворяет начальному условию $X(t_0) = I$ (единичная матрица). Нормированное решение называют иначе *матрицантом* системы (10.12) и обозначают $\Omega(t_0, t)$, $\Omega_{t_0}^{t}$ или просто $\Omega(t)$, если начальное значение t_0 строго фиксировано. Чаще всего считают $t_0 = 0$.

Нормированное решение $\Omega(t, t_0)$ уравнения (10.14) получают методом последовательных приближений, полагая $X_0 = I$ и находя k-е приближение

по формуле

$$X_k = I + \int_{t_0}^{t} A(t)\, X_{k-1}(t)\, dt. \tag{10.16}$$

Для непрерывной функции $A(t)$ приближения $X_k(t)$ при $t \to \infty$ сходятся к искомому матрицанту $\Omega(t, t_0)$. Из формулы (10.16) можно получить и явное выражение матрицанта в виде ряда

$$\Omega(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(t)\, dt + \int_{t_0}^{t} A(t) \left(\int_{t_0}^{t} A(t)\, dt \right) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} A(t) \left[\int_{t_0}^{t} A(t) \left(\int_{t_0}^{t} A(t)\, dt \right) \right] dt + \ldots \tag{10.17}$$

1.262. Найти матрицант системы (10.12) с постоянными коэффициентами $a_{ij} = \text{const}$.

Решение. Если $A = \text{const}$, то

$$\int_{t_0}^{t} A\, dt = A(t - t_0), \quad \int_{t_0}^{t} A \left(\int_{t_0}^{t} A\, dt \right) dt = A^2 \int_{t_0}^{t} (t - t_0) = A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2},$$

$$\int_{t_0}^{t} A \left[\int_{t_0}^{t} A \left(\int_{t_0}^{t} A(t)\, dt \right) dt \right] dt = A^3 \int_{t_0}^{t} \frac{(t - t_0)^2}{2}\, dt = A^3 \frac{(t - t_0)^3}{3!}, \ \ldots$$

Поэтому по формуле (10.17)

$$\Omega(t, t_0) = I + A(t - t_0) + \frac{1}{2!} A^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} A^3 (t - t_0)^3 + \ldots$$

Так как ряд справа согласно первой из формул (10.3) представляет собой разложение экспоненты $e^{A(t - t_0)}$, то

$$\Omega(t, t_0) = e^{A(t - t_0)}. \tag{10.18}$$

Матрицант есть нормированное решение уравнения (10.14), поэтому в данном случае имеет место следующая формула:

$$\frac{de^{A(t - t_0)}}{dt} = Ae^{A(t - t_0)}. \tag{10.19}$$

1.263. Зная матрицант $\Omega(t, t_0)$ системы (10.12), записать ее частное решение $\boldsymbol{x}(t)$, которое удовлетворяет начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \xi$, где ξ — произвольно заданный постоянный вектор.

Решение. Искомое частное решение равно

$$\boldsymbol{x}(t) = \Omega(t, t_0)\, \xi. \tag{10.20}$$

В самом деле, матрицант есть решение (10.14), поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} \xi = A\Omega\xi = A\boldsymbol{x},$$

т. е. $\boldsymbol{x}$ есть решение данной системы. Далее, при $t=t_0$ матрицант равен I, так что

$$\boldsymbol{x}(t_0)=I\xi=\xi,$$

т. е. $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет заданному начальному условию.

1.264. Найти матрицант системы

$$\frac{dx_1}{dt}=-x_1+x_2+x_3,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_1-x_2+x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2-x_3.$$

Выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=1$. Найти общее решение.

Решение. Выпишем матрицу A этой системы, ставя в ее строки коэффициенты при неизвестных в правых частях данных уравнений:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Поскольку $A=\text{const}$, то матрицант системы имеет вид (10.18) при $t_0=0$, т. е. $\Omega=e^{At}$. Решая характеристическое уравнение $|A-\lambda I|=0$, найдем его корни — простой $\lambda_1=1$ и двукратный $\lambda_2=-2$. Поэтому по формуле (10.8)

$$f(A)=f(1)\,G_1+f(-2)\,G_2+f'(-2)\,G_3.$$

Полагая $f(x)=1$, $f(x)=x+2$, $f(x)=(x+2)^2$, найдем матрицы G_1, G_2, и G_3:

$$I=G_1+G_2,\quad A+2I=3G_1+G_3,\quad (A+2I)^2=9G_1,$$

$$G_1=\frac{1}{9}(A+2I)^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad G_2=I-G_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$G_3=A+2I-3G_1=0.$$

Следовательно, $\Omega=e^{At}=e^{t}G_1+e^{-2t}G_2=$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{t}+2e^{-2t} & e^{t}-e^{-2t} & e^{t}-e^{-2t}\\ e^{t}-e^{-2t} & e^{t}+2e^{-2t} & e^{t}-e^{-2t}\\ e^{t}-e^{-2t} & e^{t}-e^{-2t} & e^{t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

Частное решение, отвечающее заданному начальному вектору $\xi=(1,\ 1,\ -1)$, найдем по формуле (10.20), умножая матрицу Ω на вектор-столбец ξ:

$$\boldsymbol{x}=\Omega\xi=\Omega\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{t}+2e^{-2t}\\ e^{t}+2e^{-2t}\\ e^{t}-4e^{-2t}\end{pmatrix},$$

т. е.

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{3}(e^t + 2e^{-2t}), \quad x_3 = \frac{1}{3}(e^t - 4e^{-2t}).$$

Общее решение данной системы можно получить по той же формуле (10.20), полагая $\xi = (C_1, C_2, C_3)$, где C_i — произвольные постоянные:

$$x_1 = \frac{1}{3}C_1(e^t + 2e^{-2t}) + \frac{1}{3}C_2(e^t - e^{-2t}) + \frac{1}{3}C_3(e^t - e^{-2t}),$$

$$x_2 = \frac{1}{3}C_1(e^t - e^{-2t}) + \frac{1}{3}C_2(e^t + 2e^{-2t}) + \frac{1}{3}C_3(e^t - e^{-2t}),$$

$$x_3 = \frac{1}{3}C_1(e^t - e^{-2t}) + \frac{1}{3}C_2(e^t - e^{-2t}) + \frac{1}{3}C_3(e^t + 2e^{-2t}).$$

1.265. Решить начальную задачу $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$ для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2.$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ постоянная, поэтому матрицант системы равен $\Omega = e^{At}$. Характеристические числа матрицы $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ простые, поэтому по формуле (10.6)

$$e^{At} = e^{(1+i)t}G_1 + e^{(1-i)t}G_2.$$

Матрицы G_1 и G_2 определяем по формуле (10.7):

$$G_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} \\ -\frac{1}{i} & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{i} \\ \frac{1}{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Omega = e^{At} = \frac{1}{2}e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} \\ -\frac{1}{i} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{i} \\ \frac{1}{i} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) & \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \\ -\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) & \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Искомое частное решение

$$x = \Omega\xi = e^t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ -2\sin t - \cos t \end{pmatrix},$$

или

$$x_1 = e^t (2\cos t - \sin t), \quad x_2 = -e^t (2\sin t + \cos t).$$

1.266. Показать, что если матрица $A(t)$ системы (10.12) перестановочна со своим интегралом $\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt$, то матрицант системы

$$\Omega(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt}. \qquad (10.21)$$

Решение. Обозначим $B(t) = \int_{t_0}^{t} A(t)\,dt$, тогда $\frac{dB}{dt} = A(t)$. По условию B и $\frac{dB}{dt}$ перестановочны, поэтому можно применить формулу дифференцирования задачи **1.257**:

$$\frac{de^{B(t)}}{dt} = \frac{dB}{dt} e^{B(t)} = A(t) e^{B(t)}.$$

Следовательно, матрица $e^{B(t)} = e^{\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt}$ удовлетворяет уравнению (10.14), т. е. является интегральной, а так как $e^{B(t_0)} = e^0 = I$, то эта матрица нормирована, тем самым формула (10.21) доказана.

1.267. Решить начальную задачу $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -1$ для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 2(t-1)x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2(t-1)x_2.$$

Решение. В данном случае

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2(t-1) & 1 \\ 1 & 2(t-1) \end{pmatrix}, \quad \int_1^t A(t)\,dt = \begin{pmatrix} (t-1)^2 & t-1 \\ t-1 & (t-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что эти две матрицы перестановочны, и поэтому по формуле (10.21)

$$\Omega(t, 1) = e^{\int_1^t A(t)\,dt} = e^{\begin{pmatrix} (t-1)^2 & t-1 \\ t-1 & (t-1)^2 \end{pmatrix}}.$$

Для определения этой экспоненты можно воспользоваться результатом задачи **1.249** при $a = t - 1$:

$$\Omega = \frac{1}{2} e^{(t-1)^2 + (t-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{(t-1)^2 - (t-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t^2-t} + e^{t^2-3t+2} & e^{t^2-t} - e^{t^2-3t+2} \\ e^{t^2-t} - e^{t^2-3t+2} & e^{t^2+t} + e^{t^2-3t+2} \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на начальный вектор $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, найдем

искомое частное решение:

$$x_1 = e^{t^2-3t+2}, \quad x_2 = -e^{t^2-3t+2}.$$

1.268. Найти приближенное решение системы

$$\frac{dx_1}{dt} = (2t+1)x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = (2t-1)x_1 + (4t+2)x_2,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, ограничиваясь членами порядка t^2.

Решение. Для нахождения матрицанта используем метод последовательных приближений. Полагая $X_0 = I$, по формуле (10.16) найдем:

$$X_1(t) = I + \int_0^t A(t)\,dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2t+1 & 2 \\ 2t-1 & 4t+2 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2+t & 2t \\ t^2-t & 2t^2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+t+1 & 2t \\ t^2-t & 2t^2+2t+1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить второе приближение, надо знать произведение $A(t)X_1(t)$. Но так как нас интересуют члены не выше второго порядка, то в этом произведении члены с t^3 можно сразу отбросить. Более того, можно отбросить и члены с t^2, поскольку после интегрирования они дадут члены с t^3. Следовательно, ограничиваясь членами только нулевого и первого порядка относительно t, имеем

$$A(t)X_1(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 & 2 \\ 2t-1 & 4t+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2+t+1 & 2t \\ t^2-t & 2t^2+2t+1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} t+1 & 6t+2 \\ -t-1 & 6t+2 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = I + \int_0^t A(t)X_1(t)\,dt \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} t^2+t+1 & 3t^2+2t \\ -\frac{t^2}{2}-t & 3t^2+2t+1 \end{pmatrix}.$$

Поступая аналогично, далее получим

$$A(t)X_2(t) \approx \begin{pmatrix} t+1 & 6t+2 \\ -t-1 & 6t+2 \end{pmatrix},$$

$$X_3(t) = I + \int_0^t A(t)X_2(t)\,dt \approx X_2(t).$$

Следовательно, с точностью до малых 2-го порядка относительно t $X_3(t) = X_2(t)$. Это значит, что с этой точностью

$$\Omega(t) = X_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t + 1 & 3t^2 + 2t \\ -\frac{t^2}{2} - t & 3t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$x = \Omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 4t^2 + 4t + 2, \quad x_2 = 2t^2 + 1.$$

1.269. Показать, что если в системе уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\, x_1 + a_{22}\, t)\, x_2$$

выполнены равенства $a_{11}(t) = a_{22}(t)$ и $a_{12}(t) = a_{21}(t)$, то ее матрицант находится по формуле (10.21).

Указание. Нужно проверить, что матрица $A(t)$ перестановочна со своим интегралом (см. **1.266**). Для этого достаточно показать, что любые две матрицы вида

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

перестановочны.

1.270. Найти матрицант и общее решение следующих систем (полагая $t_0 = 0$):

а) $\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1,$

б) $\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 5x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2,$

в) $\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1,$

г) $\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2.$

1.271. С помощью матрицанта найти частное решение систем:

а) $\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 5x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1; \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1,$

б) $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 - x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3,$

$\frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_3; \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = -1, \quad x_3(0) = 0,$

в) $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + 2x_3$, $\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_3$,

$\frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3$; $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 2$,

г) $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + (t-1)x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = t - 1)x_1 - x_2$;

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0.$$

1.272. Ограничиваясь членами порядка t^3, найти приближенное значение матрицанта систем ($t_0 = 0$):

а) $\frac{dx_1}{dt} = tx_1 - x_2$, $\frac{dx^2}{dt} = x_1 + tx_2$,

б) $\frac{dx_1}{dt} = x_2 + tx_3$, $\frac{dx_2}{dt} = tx_1 + x_2$,

$\frac{dx_3}{dt} = -x_1$.

ГЛАВА II

СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Криволинейные координаты на плоскости. Криволинейная система координат вводится в области D на плоскости xOy (в частности, на всей плоскости) заданием двух функций

$$x = h(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{1.1}$$

относительно которых предполагается, что они имеют непрерывные частные производные по u и v и что система (1.1) однозначно разрешима относительно u и v:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{1.2}$$

Следовательно, каждой паре значений (u, v) из некоторой области их изменения по формулам (1.1) отвечает вполне определенная точка $M(x, y)$ области D и, обратно, каждой точке $M(x, y)$ из D по формулам (1.2) соответствует однозначно пара чисел (u, v). Тем самым переменные u и v можно считать новыми координатами в области D. Формулы (1.1) удобнее задавать в векторном виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = h(u, v)\,\boldsymbol{i} + g(u, v)\,\boldsymbol{j}, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y)$. Если в (1.3) зафиксировать значение v, то радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ будет функцией только одного параметра u и, следовательно, при изменении u опишет некоторую линию в области D. Эта линия называется *координатной линией* u. Аналогично, фиксируя u и меняя в (1.3) v, получим *координатную линию* v. Через каждую точку $M(u_0, v_0)$ области D проходит одна координатная линия $u(v = v_0)$ и одна линия $v(u = u_0)$, так что вся область D покроется сеткой линий u и v (рис. 40). Обратно, задание координатной сетки линий вполне определяет криволинейную систему координат на плоскости. В общем случае эта сетка состоит из кривых линий, поэтому координаты u и v и называются криволинейными (в отличие от декартовых координат, где координатная сетка образована двумя взаимно ортогональными семействами прямых линий — параллелей осям Ox и Oy).

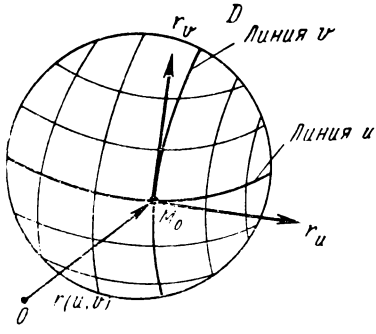


Рис. 40

Так как функции (1.1), а значит и радиус-вектор (1.3), предполагаются непрерывно дифференцируемыми, то координатные линии являются гладкими, т. е. имеют в каждой точке касательную, непрерывно меняющуюся вдоль кривой. *Касательные векторы* к координатным линиям определяются производными

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\boldsymbol{j}. \tag{1.4}$$

Предполагается, что эти векторы в каждой точке области D неколлинеарны, т. е. их векторное произведение в D

$$[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0. \tag{1.5}$$

Точки, в которых это условие не выполнено *, называются *особыми* для данной криволинейной системы координат. В особых точках нарушается взаимная однозначность соответствия между точками и парами чисел (u, v), т. е. особая точка определяется не одной парой значений (u, v), а несколькими или даже бесконечно большим числом пар (u, v). Как правило, рассматриваются системы координат, для которых область определения D совпадает со всей плоскостью xOy, за исключением некоторого числа особых точек (последние могут заполнять целый отрезок).

Криволинейная система координат называется *ортогональной*, если в каждой точке области сетка линий u и v ортогональная, т. е.

$$\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} = 0. \tag{1.6}$$

В дальнейшем рассматриваются только ортогональные координаты.

Длины векторов (1.4) ортогональной системы координат называются *коэффициентами Ламе*:

$$H_u = |\boldsymbol{r}_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2},\quad H_v = |\boldsymbol{r}_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}. \tag{1.7}$$

Через эти коэффициенты выражаются величины, связанные с измерениями длин площадей. Квадрат элемента длины в криволинейных ортогональных координатах имеет вид

$$ds^2 = H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2. \tag{1.8}$$

Элемент площади:

$$d\sigma = H_u H_v du\, dv. \tag{1.9}$$

Интегрируя элемент длины вдоль данной кривой L, получают ее длину, а интегрируя элемент площади по данной области, находят ее площадь.

2.1. Каковы коэффициенты Ламе декартовой системы координат?

Решение. В декартовых координатах $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, поэтому

$$\boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{r}_y = \boldsymbol{j}$$

и

$$H_x = |\boldsymbol{r}_x| = 1,\quad H_y = |\boldsymbol{r}_y| = 1.$$

2.2. Полярная система координат задается радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r} = \rho\cos\varphi\boldsymbol{i} + \rho\sin\varphi\boldsymbol{j}\quad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

---

* Разумеется, в область D они не входят. Как правило, они лежат на границе этой области.

Найти координатную сетку, доказать ее ортогональность, вычислить коэффициенты Ламе, элементы длины и площади.

Решение. Здесь $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и поэтому при $\rho=\rho_0$ получаем окружность $x^2+y^2=\rho_0^2$ радиуса ρ_0 с центром в начале O. При $\varphi=\varphi_0$ получим $y=\operatorname{tg}\varphi_0 x$ — уравнение луча, выходящего из O под углом φ_0 к оси Ox. Таким образом, полярная сетка имеет вид, указанный на рис. 41. Она, очевидно, ортогональна в силу перпендикулярности радиусов окружностям. Вычислим коэффициенты Ламе:

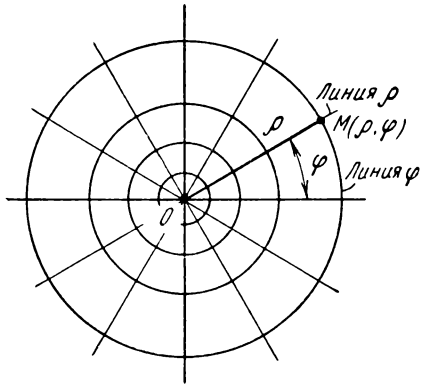


Рис. 41

$$\boldsymbol{r}_\rho=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\rho(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}),$$

$$H_\rho=|\boldsymbol{r}_\rho|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,$$

$$H_\varphi=|\boldsymbol{r}_\varphi|=$$

$$=\rho\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\rho.$$

Из формул (1.8) и (1.9) получаем в полярных координатах:

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2,\qquad d\sigma=\rho d\rho\,d\varphi.$$

2.3. Эллиптические координаты на плоскости задаются вектор-функцией

$$\boldsymbol{r}=a\operatorname{ch}\rho\cos\varphi\boldsymbol{i}+a\operatorname{sh}\rho\sin\varphi\boldsymbol{j},$$

$$(a>0,\ \rho\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

Найти вид координатной сетки, доказать ее ортогональность, вычислить коэффициенты Ламе, элементы длины и площади в эллиптических координатах.

Решение. Здесь $x=\operatorname{ch}\rho\cos\varphi$, $y=\operatorname{sh}\rho\sin\varphi$; поэтому при фиксированном значении $\varphi=\varphi_0$ получим уравнение линии в виде

$$\frac{x^2}{(a\cos\varphi_0)^2}-\frac{y^2}{(a\sin\varphi_0)^2}=$$

$$=\operatorname{ch}^2\rho-\operatorname{sh}^2\rho=1.$$

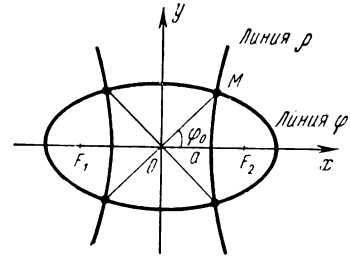


Рис. 42

Это уравнение определяет гиперболу с полуосями $a_r=a|\cos\varphi_0|$, $b_r=a|\sin\varphi_0|$, для которой xOy является канонической системой координат (рис. 42). Фокальное расстояние $c_r=\sqrt{a_r^2+b_r^2}=$ $=\sqrt{a^2(\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0)}=a$, т. е. фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-a,\ 0)$, $F_2(a,\ 0)$, которые не зависят от выбора

значения φ_0. Заметим, что каждому значению φ_0 отвечает не вся гипербола, а только та половина одной из ее ветвей, которая расположена в той же четверти, что и угол φ_0. Если считать, что φ_0 принадлежит первой четверти, то вся гипербола будет отвечать набору углов φ_0, $2\pi-\varphi_0$, $\pi-\varphi_0$, $\pi+\varphi_0$. При $\varphi_0=0$ соответствующая ветвь гиперболы превращается в полуось $1\leqslant x<\infty$, а при увеличении φ_0 от 0 до $\frac{\pi}{2}$ ветви гиперболы распрямляются, превращаясь при $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ в ось Oy.

При фиксированном значении $\rho=\rho_0$ получим аналогично уравнение линии φ:

$$\frac{x^2}{(a\operatorname{ch}\rho_0)^2}+\frac{y^2}{(a\operatorname{ch}\rho_0)^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

Это эллипс с полуосями $a_э=a\operatorname{ch}\rho_0$, $b_э=a\operatorname{sh}\rho_0$ и фокальным расстоянием $c_э=\sqrt{a_э^2-b_э^2}=a$. Следовательно, такой эллипс имеет при любом выборе ρ_0 те же фокусы $F_1(-a, 0)$ и $F_2(a, 0)$. При $\rho_2=0$ эллипс превращается в отрезок $[-1, 1]$ оси Ox, а при увеличении ρ он все более расширяется. Итак, координатная сетка данной системы координат состоит из совокупности эллипсов и гипербол, охватывающих всю плоскость xOy. При этом отрезок $[-1, 1]$ оси Ox состоит из особых точек, так как каждой точке отвечает не одна пара координат (ρ, φ), а две, именно, $(0, \varphi)$ и $(0, 2\pi-\varphi)$.

Покажем, что эллиптические координаты ортогональны:

$$\boldsymbol{r}_\rho=\frac{\partial r}{\partial\rho}=a\operatorname{sh}\rho\cos\varphi\boldsymbol{i}+a\operatorname{ch}\rho\sin\varphi\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\frac{\partial r}{\partial\varphi}=-a\operatorname{ch}\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+a\operatorname{sh}\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_\rho\boldsymbol{r}_\varphi=-a^2\operatorname{sh}\rho\operatorname{ch}\rho\cos\varphi\sin\varphi+a^2\operatorname{sh}\rho\operatorname{ch}\rho\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

так что условие ортогональности (1.6) выполнено.

Коэффициенты Ламе:

$$H_\varphi=|\boldsymbol{r}_\rho|=\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2\rho\cos^2\varphi+a^2\operatorname{ch}^2\rho\sin^2\varphi}=$$

$$=a\sqrt{(\operatorname{ch}^2\rho-1)\cos^2\varphi+\operatorname{ch}^2\rho\sin^2\varphi}=a\sqrt{\operatorname{ch}^2\rho-\cos^2\varphi},$$

$$H_\varphi=H_\rho.$$

Поэтому

$$ds^2=H_\rho^2d\rho^2+H_\varphi^2d\varphi^2=a^2(\operatorname{ch}^2\rho-\cos^2\varphi)(d\rho^2+d\varphi^2),$$

$$d\sigma=H_\rho d\rho\,d\varphi=a^2(\operatorname{ch}^2\rho-\cos^2\varphi)\,d\rho\,d\varphi.$$

2.4. Исследовать параболические координаты, задаваемые вектор-функцией

$$\boldsymbol{r}(u, v)=(u^2-v^2)\boldsymbol{i}+2uv\boldsymbol{j}$$
$$(-\infty<u<\infty,\quad 0\leqslant v<\infty).$$

Решение. Здесь $x=u^2-v^2$, $y=2uv$. Полагая $u=u_0$ и исключая из этих двух равенств параметр v, получим уравнение линии v в виде

$$x=u_0^2-\left(\frac{y}{2u_0}\right)^2,$$

или

$$y^2=4u_0^2(u_0^2-x).$$

Это уравнение определяет параболу с вершиной в точке $x=u_0^2$, $y=0$, направленную в отрицательную сторону оси Ox и пересекающую ось Oy в точках $y=\pm 2u_0^2$ (рис. 43). Если $u_0\to 0$, то парабола, сжимаясь, превращается в положительную полуось $0\leqslant x<\infty$. При увеличении u_0 парабола расширяется, отодвигаясь все далее от начала координат. Аналогично, уравнения линий u имеют вид

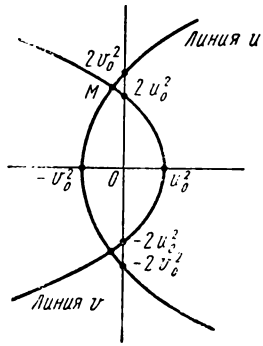


Рис. 43

$$y^2=4v_0^2(v_0^2+x).$$

Следовательно, линии v также параболы, расположенные симметрично прежним относительно оси Oy (см. рис. 43). Заметим, что все точки $M(x, 0)$ положительной части оси Ox являются особыми, так как они получаются при $v_0=0$ и при двух значениях $u=\pm\sqrt{x}$. Докажем, что полученная параболическая сетка ортогональна:

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=2u\boldsymbol{i}+2v\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_v=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=-2v\boldsymbol{i}+2u\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=-4vu+4uv=0.$$

Коэффициенты Ламе:

$$H_u=|\boldsymbol{r}_u|=\sqrt{4u^2+4v^2}=2\sqrt{u^2+v^2},$$

$$H_v=|\boldsymbol{r}_v|=H_u=2\sqrt{u^2+v^2},$$

и, следовательно, в этих координатах

$$ds^2=4(u^2+v^2)(du^2+dv^2),\quad d\sigma=4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

2.5. Общие эллиптические координаты определяются вектор-функцией

$$\boldsymbol{r}=\pm\sqrt{\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{a^2-b^2}}\,\boldsymbol{i}\pm\sqrt{\frac{(b^2-u)(b^2-v)}{b^2-a^2}}\,\boldsymbol{j},$$

где $-\infty < u < b^2 < v < a^2$ (рис. 44). Найти координатную сетку, доказать ее ортогональность. Вычислить коэффициенты Ламе, элементы длины и площади.

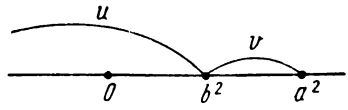


Рис. 44

2.6. Биполярные координаты задаются формулой

$$\boldsymbol{r} = \frac{\operatorname{sh}\rho}{\operatorname{ch}\rho + \cos\varphi}\,\boldsymbol{i} + \frac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\rho + \cos\varphi}\,\boldsymbol{j}.$$

Показать, что координатные линии имеют вид, указанный на рис. 45. Доказать ортогональность. Вычислить коэффициенты Ламе.

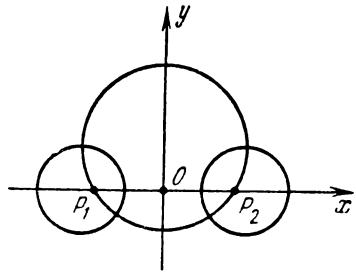


Рис. 45

2. Криволинейные координаты в пространстве. Цилиндрические системы координат. Криволинейная система координат в пространственной области V (в частности, во всем пространстве) задается вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\,\boldsymbol{i} + y(u, v, w)\,\boldsymbol{j} + z(u, v, w)\,\boldsymbol{k}. \qquad (1.10)$$

При этом предполагается, что в области V каждой точке $M(x, y, z)$ отвечает только одна тройка чисел (u, v, w), т. е. что x, y, z в свою очередь являются в области V однозначными функциями от u, v, w. Предполагается также, что существуют непрерывные частные производные

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{r}_v &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\boldsymbol{k}, \qquad (1.11)\\
\boldsymbol{r}_w &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\,\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Поверхности

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad w = \text{const}$$

называются *координатными*. Попарно пересекаясь, они определяют *координатные линии* u, v и w, на каждой из которых меняется только одна «своя»

координата, а остальные две фиксированы на некоторых значениях. Касательные к координатным линиям определяются векторами (1.11), относительно которых предполагается, что в области V они некомпланарны, так что координатные поверхности и линии в каждой точке находятся в общем положении (рис. 46). Область V, в которой заданы криволинейные координаты u, v, w, как правило, совпадает со всем пространством, из которого исключено некоторое количество особых точек, где теряется взаимная однозначность соответствия между точками и тройками чисел (u, v, w).

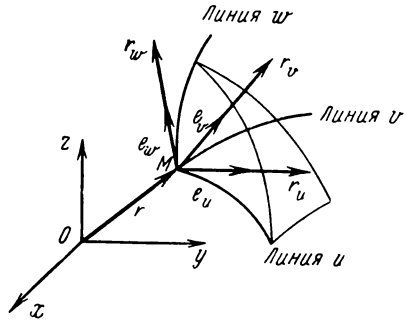


Рис. 46

Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если векторы (1.11) попарно ортогональны, т. е. выполнены условия

$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = 0,\quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_w = 0,\quad \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_w = 0. \qquad (1.12)$$

Иными словами, в ортогональных координатах координатные линии и координатные поверхности перпендикулярны друг другу.

Пусть $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ — орты векторов (1.11). В ортогональных координатах орты $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ образуют в каждой точке взаимно ортогональную тройку единичных векторов, играющую в криволинейных координатах роль, аналогичную роли ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ декартовой системы координат. Разница заключается только в том, что $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ постоянны, т. е. одинаковы во всех точках, а $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ меняются при переходе от точки к точке и поэтому являются функциями от u, v, w.

Коэффициентами Ламе называются длины векторов (1.11):

$$H_u = |\boldsymbol{r}_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},$$

$$H_v = |\boldsymbol{r}_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}, \qquad (1.13)$$

$$H_w = |\boldsymbol{r}_w| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2}.$$

Квадрат элемента длины в ортогональных координатах имеет вид

$$ds^2 = H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2 + H_w^2 dw^2. \qquad (1.14)$$

В частности, элемент длины координатной линии u (на ней $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ и $dv = dw = 0$) равен $ds_u = H_u du$, элемент длины линии v равен $ds_v = H_v dv$, элемент длины линии w равен $ds_w = H_w dw$.

Элементы площадей координатных поверхностей:

$$\begin{aligned} u = \text{const}:\ d\sigma &= ds_v ds_w = H_v H_w dv dw,\\ v = \text{const}:\ d\sigma &= ds_u ds_w = H_u H_w du dw,\\ w = \text{const}:\ d\sigma &= ds_u ds_v = H_u H_v du dv. \end{aligned} \qquad (1.15)$$

Элемент объема:

$$dv = ds_u ds_v ds_w = H_u H_v H_w du dv dw. \qquad (1.16)$$

Частным случаем криволинейных координат в пространстве являются *общие цилиндрические координаты*. Они образуются добавлением к паре ортогональных координат u, v на плоскости xOy декартовой координаты z.

Получается ортогональная система координат в пространстве, задаваемая вектор-функцией

$$r = r(u, v, z) = h(u, v)\,i + g(u, v)\,j + zk. \qquad (1.17)$$

На каждой плоскости $z = \text{const}$, параллельной xOy, определяется координатная сетка линий u и v такая же, как и на самой плоскости xOy. Координатными линиями z служат прямые, параллельные оси Oz. Координатные поверхности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ — цилиндрические, построенные на сетке линий u, v на плоскости xOy с образующими, параллельными оси Oz, а $z = \text{const}$ — плоскости, параллельные xOy (рис. 47).

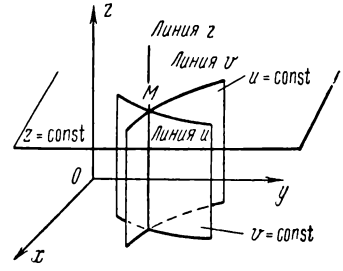


Рис. 47

2.7. Показать, что условие ортогональности общих цилиндрических координат сводится к равенству (1.6), коэффициенты Ламе имеют вид

$$H_u = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2},$$

$$H_v = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}, \quad H_z = 1;$$

первые два из них совпадают с коэффициентами Ламе координат u, v на плоскости xOy, и к ним добавляется $H_z = 1$.

В задачах **2.8—2.12** выписать коэффициенты Ламе данных ортогональных систем координат.

2.8. Полярные цилиндрические координаты (их обычно называют просто цилиндрическими) (см. **2.2**)

$$r = \rho\cos\varphi\,i + \rho\sin\varphi\,j + zk,$$

$$(\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty).$$

2.9. Эллиптические цилиндрические координаты (см. **2.3**)

$$r = a\,\mathrm{ch}\,\rho\cos\varphi\,i + a\,\mathrm{sh}\,\rho\sin\varphi\,j + zk, \quad a > 0$$

$$(\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty).$$

2.10. Параболические цилиндрические координаты (см. **2.4**)

$$r = (u^2 - v^2)\,i + 2uv\,j + zk$$

$$(-\infty < u < \infty, \quad 0 \leqslant v < \infty, \quad -\infty < z < \infty).$$

2.11. Общие цилиндрические координаты (см. **2.5**)

$$r = \pm\sqrt{\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{a^2 - b^2}}\,i \pm \sqrt{\frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{b^2 - a^2}}\,j + zk$$

$$(-\infty < u < b^2 < v < a^2, \quad -\infty < z < \infty).$$

2.12. Биполярные цилиндрические координаты (см. **2.6**)

$$r = \frac{\mathrm{sh}\,\rho}{\mathrm{ch}\,\rho + \cos\varphi}\,i + \frac{\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\rho + \cos\varphi}\,j + zk$$

$$(-\infty < \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty).$$

3. Сферические и другие ортогональные координаты. Существует и другой способ получения ортогональных координат в пространстве из плоской ортогональной сетки. Если сетка имеет ось симметрии, то при вращении ее вокруг этой оси образуется два взаимно ортогональных семейства поверхностей вращения, которые ортогонально секутся меридиональными плоскостями, проходящими через ось вращения. Получается ортогональная система из трех семейств поверхностей, которые можно принять за координатные пространственной системы координат. Если считать, как это обычно делается, что плоская сетка расположена в плоскости xOz и она задана функциями $x = h(u, v)$, $z = g(u, v)$, а ось вращения совпадает с осью Oz, то имеет место равенство

$$\boldsymbol{r} = h(u, v)(\cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\varphi \boldsymbol{j}) + g(u, v)\boldsymbol{k}, \tag{1.18}$$

где φ обозначает угол вращения вокруг ось Oz, изменяющийся в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

2.13. Используя условие (1.6) ортогональности плоской сетки, показать аналитически, что вектор-функция (1.18) определяет ортогональную систему координат. Показать, что ее коэффициенты Ламе имеют вид

$$H_u = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2}, \quad H_v = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2},$$
$$H_w = |h(u, v)|, \tag{1.19}$$

т. е. первые два из них совпадают с коэффициентами Ламе плоской системы координат u, v.

В следующих задачах при исследовании ортогональной системы координат указать вид и расположение координатных поверхностей и линий, доказать ортогональность, выписать коэффициенты Ламе.

2.14. Исследовать сферическую систему координат

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta(\cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\varphi \boldsymbol{j}) + r\cos\theta \boldsymbol{k}$$
$$(r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Решение. Сферическая система координат порождается вращением полярной сетки $x = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ на плоскости xOz вокруг оси Oz. Следовательно, координата r точки M является ее расстоянием до начала координат O; θ — угол поворота вектора OM в меридиональной плоскости, отсчитываемой от положительного направления оси Oz (от $\theta = 0$) до ее отрицательной полуоси, где $\theta = \pi$; φ — угол вращения вокруг оси Oz. Координатные поверхности $r = r_0$ — сферы радиуса r_0 с центром в точке O; $\theta = \theta_0$ — полуконусы вращения вокруг оси Oz раствора $2\theta_0$; $\varphi = \varphi_0$ — полуплоскости, начинающиеся на оси Oz и образующие угол φ_0 с положительной частью оси Ox. В пересечении координатные поверхности образуют координатные линии: линии r — лучи, выходящие из O, линии θ — меридианы на сферах $r = r_0$, линии φ — параллели на тех же сферах. Ортогональность сферических координат ясна геометрически.

Коэффициенты Ламе получаются из формул (1.19), если положить $h = r\sin\theta$, $g = r\cos\theta$ и учесть, что при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\sin\theta \geqslant 0$; $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$.

2.15. Исследовать системы эллипсоидальных координат:

а) $\boldsymbol{r} = a\ \mathrm{sh}\,\rho\sin\theta(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) + a\,\mathrm{ch}\,\rho\cos\theta\boldsymbol{k}$,

б) $\boldsymbol{r} = a\,\mathrm{ch}\,\rho\cos\theta(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) + a\,\mathrm{sh}\,\rho\sin\theta\boldsymbol{k}$,

$(\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

Указание. Эти координаты получаются при вращении сетки эллиптических координат на плоскости (рис. 42): первые вокруг фокальной оси F_1F_2, вторые — вокруг мнимой оси гипербол. В соответствии с тем, какие эллипсоиды вращения получаются, первая из этих систем называется «вытянутой» эллипсоидальной, а вторая — «сплюснутой».

2.16. Исследовать систему параболоидальных координат

$$\boldsymbol{r} = 2uv(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) + (u^2 - v^2)\boldsymbol{k}$$
$$(u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Указание. Эта система координат получена вращением параболической сетки (рис. 43) вокруг общей оси парабол.

2.17. Исследовать системы тороидальных и бисферических координат:

а) $\boldsymbol{r} = \dfrac{\mathrm{sh}\,\rho}{\mathrm{ch}\,\rho + \cos\theta}(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) + \dfrac{\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\rho + \cos\theta}\boldsymbol{k}$,

б) $\boldsymbol{r} = \dfrac{\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\rho + \cos\theta}(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) + \dfrac{\mathrm{sh}\,\rho}{\mathrm{ch}\,\rho + \cos\theta}\boldsymbol{k}$

$(-\infty < \rho < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

Указание. Эти системы координат получаются при вращении биполярной сетки: первая — вокруг вертикальной оси симметрии (см рис. 45), вторая — вокруг оси, проходящей через полюсы. *Тором* называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, лежащей вне ее.

2.18. Общая система ортогональных эллипсоидальных координат задается вектор-функцией $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, где

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

$$(-a^2 < w < -b^2 < v < -c^2 < u < \infty).$$

Найти коэффициенты Ламе этой системы координат.

§ 2. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

1. **Поверхности и линии уровня.** Если каждой точке M пространственной области V сопоставлено вполне определенное число $\varphi(M)$, то говорят, что в области V задано *скалярное поле*. При введении в области V координатной системы (u, v, w) скалярное поле определяется функцией $\varphi = \varphi(u, v, w)$. В частности, в декартовой системе координат $\varphi = \varphi(x, y, z)$. В дальнейшем будем предполагать, что скалярное поле гладкое в области V, т. е. функция имеет φ в V непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Скалярное поле называется *плоским*, если его значения постоянны вдоль всякого перпендикуляра к некоторой фиксированной плоскости π. Выбрав декартову систему координат так, чтобы эта плоскость была координатной плоскостью xOy, получим для плоского скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y)$. Поэтому при изучении такого поля достаточно ограничиться его рассмотрением только на плоскости xOy.

Поверхности, вдоль которых значения $\varphi(M)$ одинаковы, называются *поверхностями уровня* (или эквипотенциальными поверхностями). Поверхность уровня определяется уравнением

$$\varphi(M) = C \text{ (const)}. \tag{2.1}$$

Для плоского поля (если рассматривать его в пределах плоскости π) уравнение (2.1) определяет *линии уровня*. Поверхность уровня, проходящая через данную точку M_0, имеет уравнение

$$\varphi(M) = \varphi(M_0). \tag{2.2}$$

2.19. Указать область определения, описать поверхности уровня скалярного поля

$$\varphi = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

Выделить поверхность уровня, проходящую через точку $M_0(1, 2, 1)$.

Решение. Данное поле φ определено во всем пространстве, за исключением точек, на которых $x^2 + y^2 = 0$, т. е. $x = 0$ и $y = 0$. Это точки оси Oz. Таким образом, область определения есть пространство с выброшенной прямой (осью Oz).

Поверхности уровня поля φ определяются уравнением (2.1), т. е.

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = C, \quad z = C(x^2 + y^2).$$

При фиксированном значении C (кроме $C = 0$) это есть уравнение параболоида вращения вокруг оси Oz с вершиной в начале координат. При $C > 0$ параболоид направлен в положительную сторону оси Oz, при $C < 0$ — в отрицательную сторону. Если $C = 0$, то получится уравнение $z = 0$, определяющее плоскость xOy. Параметру C можно придать геометрический смысл, пересекая параболоиды плоскостью $z = 1$ (при $C > 0$) или $z = -1$ ($C < 0$). В сечении получается окружность

$$x^2 + y^2 = \pm\frac{1}{C}, \quad z = \pm 1.$$

Следовательно,

$$R^2 = \pm\frac{1}{C} \text{ и } C = \pm\frac{1}{R^2},$$

где R — радиус окружности. Отсюда видно, что при увеличении $|C|$ уменьшается R, т. е. раствор параболоида уменьшается, в частности, при $|C| \to \infty$ параболоид приближается к оси Oz. Наоборот, при уменьшении $|C|$ раствор параболоида увеличивается и при $C \to 0$ он стремится распластаться в плоскость xOy (рис. 48). Таким образом, совокупность параболоидов вместе со значением C на них раскрывает (по крайней мере, качественно) картину изменения поля φ.

Поверхность уровня, проходящая через $M_0(1, 2, 1)$, имеет уравнение (2.2), т. е.

$$\frac{z}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+4},$$

$$z = \frac{1}{5}(x^2+y^2).$$

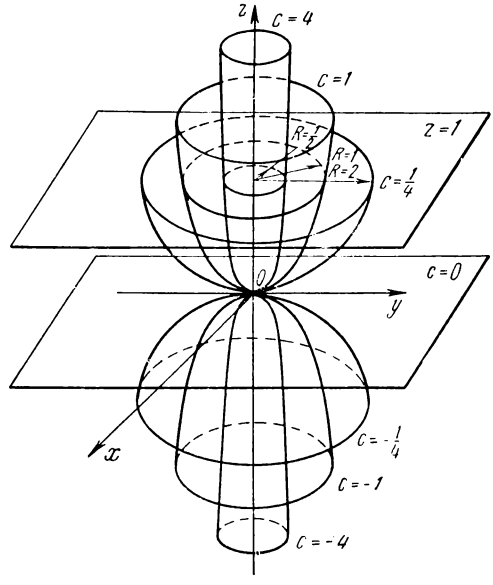


Рис. 48

2.20. Скалярное поле $f(M)$ называется *цилиндрическим*, если его значения в каждой точке M зависят только от ее расстояния до некоторой фиксированной оси l. Определить поверхности уровня цилиндрического поля. Показать, что оно плоское.

Решение. Примем ось l за ось Oz цилиндрической системы координат $\{\rho, \varphi, z\}$; тогда по определению цилиндрического поля

$$f = f(\rho).$$

Уравнение $f(\rho) = C$ равносильно $\rho = C_1$, т. е. поверхностями уровня являются круговые цилиндры с осью Oz. В декартовых координатах $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ и $f(\rho) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Таким образом, данное поле — частный случай плоского. На плоскости xOy его линиями уровня являются окружности $\rho = C_1$, или $x^2+y^2 = C_1^2$.

2.21. Скалярное поле $f(M)$ называется *сферическим*, если в каждой точке M его значения зависят лишь от расстояния OM, где O — некоторая фиксированная точка. Определить поверхности уровня сферического поля. Записать его выражение в декартовых координатах с началом O.

Решение. Введем сферическую систему координат $\{r, \theta, \varphi\}$ с центром в точке O. Тогда $OM = r$ и по определению сферического поля $f = f(r)$.

Уравнение $f(r)=C$ равносильно $r=C_1$, так что поверхностями уровня служат сферы с центром в O. В декартовых координатах с началом O

$$f(r)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Сферическим полем является, например, потенциал $f(M)=-\frac{q}{r}$ электростатического поля, созданного зарядом q, помещенным в точку O. Это поле определено везде, за исключением точки O, где $r=0$.

2.22. Установить область определения и найти линии уровня плоских скалярных полей:

а) $\varphi=xy$,

б) $\varphi=\sqrt{9-x^2-3y^2}$,

в) $\varphi=\sin(y^2-4x)$.

2.23. Установить область определения и найти поверхности уровня скалярных полей:

а) $\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$,

б) $\varphi=x^2+y^2-4z^2$.

2.24. Найти поверхности уровня скалярных полей

а) $\varphi=\boldsymbol{ar}$,

б) $\varphi=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{br}]$,

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор OM.

2.25. В цилиндрических координатах скалярное поле не зависит от угла φ. Каковы его поверхности уровня?

2. **Градиент скалярного поля.** Пусть скалярное поле $\varphi(M)$ в декартовой системе координат задано функцией $\varphi=\varphi(x, y, z)$. Его *градиентом* называется вектор

$$\operatorname{grad}\varphi(M)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{2.3}$$

где частные производные вычисляются в точке M. Таким образом, по формуле (2.3) каждой точке M, где определено скалярное поле $\varphi(M)$, сопоставляется вектор $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Инвариантность градиента, т. е. его независимость от выбора системы координат, устанавливается с помощью понятия производной по направлению (см. п. 3).

В криволинейной ортогональной системе координат u, v, w

$$\operatorname{grad}\varphi(M)=\frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\boldsymbol{e}_u+\frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\boldsymbol{e}_v+\frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\boldsymbol{e}_w, \tag{2.4}$$

где H_u, H_v, H_w — коэффициенты Ламе, а $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ — основные орты системы координат u, v, w.

Дифференциальные свойства градиента:

1) $\operatorname{grad}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1 \operatorname{grad}\varphi_1 + C_2 \operatorname{grad}\varphi_2$,
2) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi$,
3) $\operatorname{grad}\dfrac{\varphi}{\psi} = \dfrac{\psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi \operatorname{grad}\psi}{\psi^2}$, (2.5)
4) $\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u$,
5) $\operatorname{grad} F(u, v) = \dfrac{\partial F}{\partial u} \operatorname{grad} u + \dfrac{\partial F}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

2.26. Найти градиент поля $\varphi = \cos(xyz + 1)$ в точке $M_0(2, -1, 1)$.

Решение. По определению (2.3)

$$\operatorname{grad}(xyz + 1) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}.$$

Поэтому, используя свойство 4 из (2.5), получим

$$\operatorname{grad}\varphi(M) = -\sin(xyz + 1)\,(yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}).$$

В частности, при $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = \sin 1\,(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}).$$

2.27. Показать, что в каждой точке M_0 вектор $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня скалярного поля $\varphi(M)$, проходящей через эту точку.

Решение. Пусть в декартовой системе координат $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тогда поверхность уровня π (рис. 49), проходящая через M_0, имеет уравнение $\varphi(x, y, z) = C_0$, где $C_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0)$. Пусть $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$ — произвольная линия h, целиком лежащая на поверхности π и проходящая через M_0. Ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при любом значении t должны удовлетворять уравнению поверхности π:

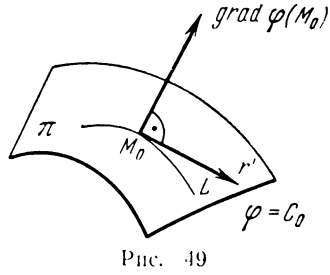


Рис. 49

$$\varphi[x(t), y(t), z(t)] \equiv C_0.$$

Дифференцируя это равенство по t, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z'(t) = 0.$$

В левой части здесь стоит скалярное произведение вектора $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$ на вектор $\boldsymbol{r}'(t)$, касательный к линии L. Значит вдоль L и, в частности, в точке M_0 $\operatorname{grad}\varphi(M_0)\,\boldsymbol{r}'(t_0) = 0$. Отсюда следует, что в точке M_0 $\operatorname{grad}\varphi$ перпендикулярен касательной к линии L. Заметим теперь, что линия L на поверхности, проходящая через M_0, была выбрана произвольно. Следовательно, $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$ перпен-

дикулярен любой касательной к поверхности π в точке M_0. Это и означает, что вектор $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$ направлен по нормали к поверхности π в данной точке M_0.

2.28. Найти единичный вектор $\boldsymbol{n}(M)$ нормали к поверхности $F(x, y, z)=0$ в произвольной ее точке M.

Решение. Данная поверхность является одной из поверхностей уровня скалярного поля $F=F(x, y, z)$. Поэтому $\operatorname{grad}F(M)=\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}$ будет перпендикулярен поверхности в точке M (см. 2.27). Для того чтобы получить единичный вектор нормали, надо $\operatorname{grad}F(M)$ разделить на его длину. Кроме того, поскольку заранее направление $\boldsymbol{n}(M)$ не фиксировано, надо ставить перед дробью два знака:

$$\boldsymbol{n}(M)=\pm\frac{\operatorname{grad}F(M)}{|\operatorname{grad}F(M)|}=\pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \qquad (2.6)$$

Тот или иной знак в формуле (2.6) выбирается в зависимости от дополнительных условий задачи.

Замечание. Очевидно, формула (2.6) сохранится и в том случае, если уравнение поверхности имеет вид $F(x, y, z)=C(\text{const})$.

2.29. Найти градиент цилиндрического поля $f(\rho)$.

Решение. В цилиндрической системе координат $H_\rho=1$, $H_\varphi=\rho$, $H_z=1$ и по формуле (2.4)

$$\operatorname{grad}f(\rho, \varphi, z)=\frac{\partial f}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

Цилиндрическое поле *не зависит* от φ и z, поэтому для него

$$\operatorname{grad}f(\rho)=f'(\rho)\,\boldsymbol{e}_\rho=\frac{f'(\rho)}{\rho}\boldsymbol{\rho},$$

где $\boldsymbol{\rho}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ — радиус-вектор на плоскости xOy.

2.30. Найти градиент сферического поля $f(r)$.

Решение. В сферических координатах $H_r=1$, $H_\theta=r$, $H_\varphi=r\sin\theta$, так что

$$\operatorname{grad}f(r, \theta, \varphi)=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Для сферического поля $f=f(r)$ и, следовательно,

$$\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\,\boldsymbol{e}_r=\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$.

2.31. Найти градиент скалярного поля

$$\varphi=x^2+2y^2+3z^2-xy-4x+2y-4z$$

в точке $M_0(0, 0, 1)$.

2.32. Найти градиенты скалярных полей:

$$\text{а) } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$\text{б) } f = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\text{в) } f = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

2.33. Поле $\varphi(M)$ равно скалярному произведению постоянного вектора $\boldsymbol{S}$ на радиус-вектор точки M. Найти его градиент и поверхности уровня.

2.34. Найти единичный вектор внешней нормали:
а) к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, б) к цилиндру $x^2 + y^2 = a^2$, в) к конусу $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geqslant 0)$.

Указание. См. **2.28.**

3. Производная по направлению. Производная скалярного поля $\varphi(M)$ в точке M по направлению l, исходящему из этой точки, определяется как предел

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l},$$

где $\Delta \varphi = \varphi(M') - \varphi(M)$ приращение скалярного поля при переходе вдоль l от точки M к точке M', а $\Delta l = MM'$. Производная $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ выражает *скорость* изменения поля φ в данной точке M вдоль l и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \boldsymbol{\tau} \operatorname{grad} \varphi(M), \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — орт (единичный вектор) направления l.

Производной скалярного поля $\varphi(M)$ в точке M вдоль линии L, исходящей из этой точки, называется предел

$$\frac{\partial \varphi}{\partial L} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s},$$

где $\Delta \varphi$ — приращение скалярного поля φ при сдвиге вдоль L, а Δs — приращение длины дуги. Производная вдоль L вычисляется по формуле

$$\frac{\partial \varphi}{\partial L} = \boldsymbol{\tau}(M) \operatorname{grad} \varphi(M), \tag{2.8}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор к линии L в точке M*. Из сравнения формул (2.8) и (2.7) следует, что производная поля $\varphi(M)$ вдоль линии L в точке M совпадает с производной по направлению касательной к L в этой точке. В декартовых координатах $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k}$ и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} \cos\gamma, \tag{2.9}$$

где α, β, γ — углы направления l с осями координат.

---

* Если линия L задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, то $\boldsymbol{\tau}(M) = \frac{\boldsymbol{r}'(t_0)}{|\boldsymbol{r}'(t_0)|}$, где t_0 — значение параметра, отвечающее точке M.

2.35. Установить смысл длины и направления градиента с помощью производных по направлениям.

Решение. Скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Так как τ — единичный вектор, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \tau \operatorname{grad} \varphi(M) = |\operatorname{grad} \varphi(M)| \cos\theta, \qquad (2.10)$$

где θ — угол между τ и $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Поскольку $\cos\theta \leqslant 1$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial l} \leqslant |\operatorname{grad}\varphi(M)|$, причем знак равенства возможен лишь, если $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$. В этом случае направление l совпадает с направлением градиента в точке M.

Таким образом, модуль градиента (т. е. его длина) равен наибольшему значению $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ среди всех возможных направлений l, исходящих из точки M, а направление градиента есть направление, вдоль которого производная $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ максимальна. Это показывает, что ни длина, ни направление градиента не зависят от выбора системы координат, т. е. градиент инвариантным образом связан с данным скалярным полем φ.

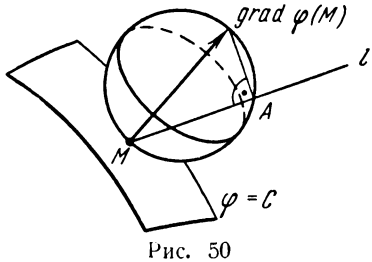


Рис. 50

Заметим, с другой стороны, что задание градиента позволяет определить производные по всем направлениям l в точке M. В самом деле, построим на векторе $\operatorname{grad}\varphi(M)$, как на диаметре, сферу S (рис. 50). Очевидно, любая хорда MA сферы S равна проекции градиента на направление l этой хорды, и поэтому величина хорды согласно формуле (2.10) равна $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$. Тем самым сфера однозначно определяет производные по всем направлениям в точке M, прокалывающим сферу S. Производные же по противоположным направлениям отличаются от них только знаком (так как τ заменяется на $-\tau$).

2.36. Найти производную скалярного поля $\varphi = x^3y - xy^3 + 6z$ в точке $M(1, 1, -1)$ по направлению l, идущему из M в точку $A(3, -1, -2)$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться формулой (2.7), надо знать орт τ направления l и вектор $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Направление l указывает вектор

$$\overline{MA} = (3-1)\boldsymbol{i} + (-1-1)\boldsymbol{j} + (-2+1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Следовательно, единичный вектор этого направления

$$\tau = \frac{\overline{MA}}{|\overline{MA}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

Далее,

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}=3x^2y\boldsymbol{i}-3xy\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

и в точке $M(1,\ 1,\ -1)$ $\operatorname{grad}\varphi(M)=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.
Применяя формулу (2.7) или, что то же, (2.9), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{2}{3}(-3)-\frac{1}{3}\cdot 6=2.$$

2.37. Найти производную цилиндрического поля $f(\rho)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ по направлению l с данным ортом $\boldsymbol{\tau}$.

Решение. В **2.29** было показано, что

$$\operatorname{grad} f(\rho)=f'(\rho)\,\boldsymbol{e}_\rho,$$

где $\boldsymbol{e}_\rho$ — орт вектора $\boldsymbol{\rho}$, идущего от оси Oz в данную точку M параллельно плоскости xOy. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\boldsymbol{\tau}\operatorname{grad} f=f'(\rho)\,\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{e}_\rho=f'(\rho)\cos\theta,$$

так как скалярное произведение двух ортов равно косинусу угла между ними. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial l}$ отличается от $f'(\rho)$ только множителем $\cos\theta$, где θ — угол направления l с вектором $\boldsymbol{\rho}$. В частности, если l идет вдоль $\boldsymbol{\rho}$, то $\theta=0$ и $\frac{\partial f}{\partial l}=f'(\rho)$.

2.38. По какому направлению в точке $M(-3,\ -1,\ 2)$ скалярное поле $\varphi=xy+xz+yz$ изменяется всего быстрее? Какова максимальная скорость этого изменения?

Решение. Согласно **2.35**, наибольшая скорость изменения поля φ определяется вектором $\operatorname{grad}\varphi(M)$. Вычисляем его:

$$\operatorname{grad}\varphi(M)=[(y+z)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}]=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

Этим вектором и определяется направление максимальной скорости изменения поля φ в точке M. Наибольшая скорость измерения равна

$$\max\frac{\partial\varphi}{\partial l}=|\operatorname{grad}\varphi(M)|=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

2.39. Найти производную скалярного поля $\varphi=(x^2+y^2)z$ вдоль винтовой линии $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ в точке M_0, отвечающей значению параметра $t_0=\pi$.

Решение. Радиус-вектор точки M_0 равен $\boldsymbol{r}(\pi)=-\boldsymbol{i}+\pi\boldsymbol{k}$, т. е. координаты этой точки $M_0(-1,\ 0,\ \pi)$. Находим единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}(M_0)$ к линии L в точке M_0 и вектор

$\operatorname{grad}\varphi(M_0)$. Затем используем формулу (2.8):

$$\boldsymbol{r}'(t) = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}'(\pi) = -\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\tau}(M_0) = \frac{\boldsymbol{r}'(\pi)}{|\boldsymbol{r}'(\pi)|} = \frac{-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = [2xz\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + (x^2+y^2)\boldsymbol{k}]_{M_0} = -2\pi\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial L} = \boldsymbol{\tau}(M_0)\operatorname{grad}\varphi(M_0) = 0\cdot(-2\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.40. Написать формулу для производной плоского поля $\varphi = \varphi(x, y)$ по направлению, лежащему в плоскости xOy и образующему угол α с положительным направлением оси Ox.

2.41. Найти производную плоского поля $\varphi = x^3 + xy + 3y^4$ в точке $M_0(-2, 1, 0)$ по направлению, лежащему в плоскости xOy и наклоненному под углом $\frac{\pi}{6}$ к оси Ox.

2.42. Найти производную цилиндрического поля $f(\rho) = (x^2+y^2)^2$ в точке $M_0(1, -2, 0)$ по направлению радиуса-вектора этой точки.

2.43. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $\varphi = x^2y + y^2z + z^2x$ в точке $M_0(2, 1, 2)$.

2.44. Найти производную скалярного поля $\varphi = \frac{xy}{z}$ по направлению $\overline{MA}$ в точке M, если $M(1, 2, 1)$, а $A(0, 3, 4)$.

2.45. Найти производную поля $\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ по направлению радиуса-вектора этой точки.

2.46. Найти производную сферического поля $\Phi(r)$, по направлению l с данным ортом $\boldsymbol{\tau}$.

2.47. Найти производную поля $\Phi(r) = \frac{1}{r}$ по направлению $\overline{MA}$ в точке M, если $M(2, 2, -1)$, $A(2, 0, 1)$.

2.48. Найти производную поля $\varphi(M) = xz^2 + 2yz$ в точке $M(1, 0, 2)$ вдоль окружности

$$r(t) = (\cos t + 1)\boldsymbol{i} + (\sin t - 1)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

2.49. Найти производную плоского поля $\varphi = x^2 - y^2$ в точке $M(1, 1)$ по направлению параболы $y = x^2$.

§ 3. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Векторное поле. Векторные линии. Если каждой точке некоторой области V пространства поставлен в соответствие вполне определенный вектор $\boldsymbol{a}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле*.

Если введена криволинейная система ортогональных координат $\{u, v, w\}$, то векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ определяется тремя функциями a_u, a_v, a_w, определенными в области V:

$$\boldsymbol{a}(M) = a_u(u, v, w)\boldsymbol{e}_u + a_v(u, v, w)\boldsymbol{e}_v + a_w(u, v, w)\boldsymbol{e}_w. \qquad (3.1)$$

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется *непрерывно-дифференцируемым*, если a_u, a_v и a_w имеют непрерывные частные производные по u, v, w в области V.

В частности, в декартовой системе координат векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ задается разложением по ортам

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}. \tag{3.2}$$

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется *плоским*, если все векторы $\boldsymbol{a}(M)$ параллельны некоторой заданной плоскости π и одинаковы вдоль каждого перпендикуляра к этой плоскости. Если выбрать в качестве плоскости π одну из координатных плоскостей, например xOy, то

$$\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{a}(x, y) = P(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j}. \tag{3.3}$$

Для характеристики направлений векторного поля вводятся *векторные линии*. В зависимости от природы конкретных полей их называют иногда силовыми линиями, или линиями тока. Векторной линией данного поля $\boldsymbol{a}(M)$ называется линия, в каждой точке M которой $\boldsymbol{a}(M)$ является касательным вектором.

Семейство векторных линий поля (3.2) определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{3.4}$$

В случае плоского поля векторные линии удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \quad dz = 0. \tag{3.5}$$

Векторные поля $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{b}(M) = F(M)\,\boldsymbol{a}(M)$, где $F(M)$ — скалярная функция, называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторные поля имеют одинаковые векторные линии.

Пусть в области V задано векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ и некоторый замкнутый контур C; проводя через его точки векторные линии, получим поверхность, называемую *векторной трубкой* (рис. 51). Сечением S векторной трубки называется часть секущей поверхности, лежащая внутри векторной трубки.

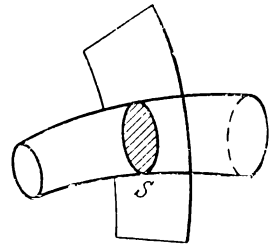


Рис. 51

2.50. Найти векторные линии поля $\boldsymbol{a}(M) = \frac{1}{x}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{y}\,\boldsymbol{j}$.

Решение. Данное поле плоское, оно определено для всех точек плоскости, для которых $x \neq 0$, $y \neq 0$. Так как $P(x, y) = \frac{1}{x}$, $Q(x, y) = \frac{1}{y}$, то согласно (3.4) векторные линии этого поля определяются дифференциальными уравнениями:

$$x\,dx = y\,dy, \quad dz = 0.$$

Интегрируя их, получаем

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{c}{2}, \quad z = h,$$

или

$$x^2 - y^2 = c, \quad z = h.$$

Таким образом, векторные линии данного поля представляют собой равносторонние гиперболы $x^2 - y^2 = c\,(c \neq 0)$, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости xOy (см. рис. 52). При $c = 0$ гиперболы вырождаются в пару прямых

$$x = \pm y, \quad z = h.$$

2.51. Магнитное поле $\boldsymbol{H}(M)$ создано электрическим током силы J, текущим по бесконечно длинному прямому проводу l. Найти силовые линии этого поля.

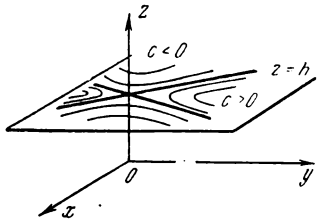


Рис. 52

Решение. Если провод l принять за ось Oz некоторой декартовой системы координат, то, как известно из теории электричества,

$$\boldsymbol{H}(M) = 2J\frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}.$$

Поле $\boldsymbol{H}$ отличается множителем $2J\,(x^2 + y^2)^{-1}$ от векторного поля $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, так что эти поля коллинеарны, и поэтому имеют одинаковые векторные линии. Запишем уравнения (3.5) для поля $\boldsymbol{a}$:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad dz = 0.$$

Интегрируя, получим

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad z = h,$$

т. е. окружности радиуса $|c|$, расположенные в плоскостях, параллельных xOy, и имеющие центры на оси Oz. Это и будут искомые силовые линии поля $\boldsymbol{H}(M)$.

2.52. Вывести дифференциальные уравнения векторных линий в криволинейных ортогональных координатах.

Решение. Вдоль линии L координаты u, v, w зависят от параметра t, т. е. $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[u(t), v(t), w(t)]$ и $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv + \boldsymbol{r}_w dw = H_u du\,\boldsymbol{e}_u + H_v dv\,\boldsymbol{e}_v + H_w dw\,\boldsymbol{e}_w$, так как (см. § 1, п. 2) $\boldsymbol{r}_u = H_u\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{r}_v = H_v\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{r}_w = H_w\boldsymbol{e}_w$.

Если линия L векторная, то дифференциал радиуса-вектора $d\boldsymbol{r}$ вдоль нее, указывающий направление касательной, должен быть в то же время коллинеарен вектору поля в каждой точке M. Следовательно, необходимым и достаточным условием того, что L — векторная линия, является пропорциональность координат вектора $d\boldsymbol{r}$ и вектора $\boldsymbol{a}(M)$ вдоль L, т. е.

$$\frac{H_u du}{a_u(u, v, w)} = \frac{H_v dv}{a_v(u, v, w)} = \frac{H_w dw}{a_w(u, v, w)}.$$

Это и есть искомые уравнения.

В частности, в цилиндрической системе координат дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид

$$\frac{d\rho}{a_\rho(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho d\varphi}{a_\varphi(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{a_z(\rho, \varphi, z)}. \tag{3.6}$$

В сферической системе

$$\frac{dr}{a_r(r, \theta, \varphi)} = \frac{r d\theta}{a_\theta(r, \theta, \varphi)} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{a_\varphi(r, \theta, \varphi)}. \tag{3.7}$$

2.53. Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется центрально-симметрическим, если оно выражается только через радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки и его длину r, т. е. $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r} = rf(r)\boldsymbol{e}_r$, где $\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

Найти векторные линии такого поля.

Решение. В сферической системе координат центрально-симметрическое поле $\boldsymbol{a}(M)$ имеет координаты $a_r = rf(r)$, $a_\theta = 0$, $a_\varphi = 0$. Поэтому из уравнений (3.7) получим $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Этими условиями определяются прямые, выходящие из центра O, вдоль которых меняется только r, а θ и φ фиксированы.

2.54. Векторное поле задано в цилиндрических координатах: $\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{e}_\rho + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$. Найти его векторные линии.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий определяются из (3.6):

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho d\varphi}{\varphi} = \frac{dz}{0}, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad dz = 0.$$

Интегрируя эту систему, получим

$$\rho = c\varphi, \quad z = h.$$

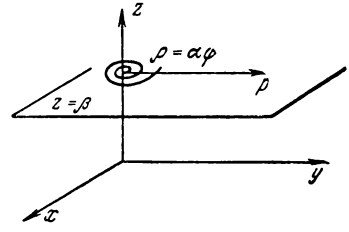


Рис. 53

Таким образом, векторными линиями поля $\boldsymbol{a}(M)$ являются спирали Архимеда, лежащие в плоскостях, параллельных xOy (рис. 53).

2.55. Найти векторные линии следующих полей $\boldsymbol{a}(M)$:

а) $x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$,

б) $\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

в) $x\boldsymbol{i} + 2z^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

2.56. Определить силовые линии поля тяготения

$$\boldsymbol{F}(M) = -\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r},$$

созданного массой m, помещенной в точку O.

Указание. См. задачу **2.53.**

2.57. Найти векторные линии полей, заданных в цилиндрических и сферических координатах:

а) $\boldsymbol{a}(M) = \cos\varphi\, \boldsymbol{e}_\rho - \varphi\cos\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi$,

б) $\boldsymbol{a}(M) = r\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r - r\cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta$.

2. Дивергенция векторного поля. Одной из основных дифференциальных характеристик векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ является *дивергенция* $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)$. В декартовых координатах

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{3.8}$$

где P, Q, R — проекции поля на оси Ox, Oy, Oz. В любой ортогональной криволинейной системе

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial (a_u H_v H_w)}{\partial u} + \frac{\partial (a_v H_u H_w)}{\partial v} + \frac{\partial (a_w H_u H_v)}{\partial w}\right]. \tag{3.9}$$

В частности, в цилиндрической и сферической системах координат

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{3.10}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{2a_r}{r} + \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta \cdot a_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \tag{3.11}$$

Инвариантность дивергенции, т. е. независимость от выбора системы координат, показывается с помощью потока векторного поля (см. § 5 и § 1).

Дивергенция обладает следующими *дифференциальными свойствами*:

1) $\operatorname{div}(c_1\boldsymbol{a}_1 \pm c_2\boldsymbol{a}_2) = c_1 \operatorname{div}\boldsymbol{a}_1 \pm c_2 \operatorname{div}\boldsymbol{a}_2$ (линейность),

2) $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi$, (3.12)

3) если $\boldsymbol{a} = \text{const}$, то $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$ и $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi$.

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$, для которого в области V $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) = 0$, называется *соленоидальным* в этой области.

2.58. Найти дивергенцию центрально-симметрического поля $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$. В каком случае это поле будет соленоидальным?

Решение. В сферических координатах (**2.53**) $a_r = rf(r)$, $a_\theta = 0$, $a_\varphi = 0$, поэтому из (3.11) получаем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = 2f(r) + (rf(r))' = 3f(r) + rf'(r).$$

В частности, при $f(r) = 1$, $f'(r) = 0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{r} = 3$. Центрально-симметрическое поле будет соленоидальным тогда и только тогда, когда

$$3f(r) + rf'(r) = 0,$$

что равносильно

$$f(r) = \frac{q}{r^3} \quad (q = \text{const}).$$

В этом случае

$$\boldsymbol{a} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

— кулоново поле.

2.59. Получить результат задачи **2.58** с помощью свойства 2 дивергенции (см. (3.12)).

Указание. Использовать результат задачи **2.30.**

2.60. Доказать соленоидальность поля линейных скоростей точек твердого тела, движущегося вокруг закрепленной точки O.

Решение. Как известно, в каждый фиксированный момент времени $\boldsymbol{V}(M)=[\boldsymbol{\omega r}]$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости, $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор точки M. Выберем декартову систему координат так, чтобы ось Oz шла по направлению вектора $\boldsymbol{\omega}$. Тогда $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ (ω — величина угловой скорости), $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ и

$$\boldsymbol{V}(M)=[\boldsymbol{\omega r}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}.$$

По формуле (3.8)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(M)=\frac{\partial}{\partial x}(-\omega y)+\frac{\partial}{\partial y}(\omega x)=0,$$

т. е. $\boldsymbol{V}(M)$ — соленоидальное поле.

2.61. Вычислить дивергенцию поля $\boldsymbol{a}=r^2\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

Решение. Воспользуемся свойством 3 дивергенции (см. (3.12)):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}(r^2\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\operatorname{grad}r^2=\boldsymbol{c}\left(2r\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=2\boldsymbol{cr};$$

градиент был найден с помощью результата задачи **2.30.**

2.62. Найти дивергенции векторных полей:

а) $xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$,

б) $\rho\boldsymbol{e}_\rho+\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+z\boldsymbol{e}_z$,

в) $\sin\theta\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$.

2.63. Найти дивергенцию поля $\boldsymbol{a}=f(\rho)\boldsymbol{e}_\rho$. В каком случае это поле будет соленоидальным?

2.64. Найти дивергенцию поля:

а) $\boldsymbol{a}(M)=[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{rb}]]$, где $\boldsymbol{a}=\text{const}$, $\boldsymbol{b}=\text{const}$;

б) $\boldsymbol{a}(M)=[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{br}]]$, где $\boldsymbol{b}=\text{const}$.

2.65. Показать, что если $\boldsymbol{a}=\varphi(r)[\boldsymbol{rc}]$, то $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\varphi'(r)}{r}(\boldsymbol{rc})$ ($\boldsymbol{c}=\text{const}$).

2.66. Вычислить дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{a}=\varphi(r)\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}=\text{const}$.

2.67. Найти дивергенцию основных ортов в цилиндрической системе ($\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\rho$, $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_z$) и в сферической системе ($\operatorname{div}\boldsymbol{e}_r$, $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\theta$, $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\varphi$) координат.

2.68. Найти дивергенцию напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}(M)$ задачи **2.51.**

3. Ротор векторного поля. В декартовых координатах

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,(M)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \quad (3.13)$$

В ортогональных криволинейных координатах u, v, w

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=\frac{1}{H_u H_v H_w}\begin{vmatrix} H_u\boldsymbol{e}_u & H_v\boldsymbol{e}_v & H_w\boldsymbol{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ H_u a_u & H_v a_v & H_w a_w \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

Определитель в формулах (3.13) и (3.14) раскрывается разложением по первой строке; при этом под умножением элементов второй строки на элементы третьей здесь понимается соответствующее частное дифференцирование. Например, $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot Q=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Инвариантный смысл ротора выясняется с помощью циркуляции векторного поля (см. ниже § 4, п. 3).

Дифференциальные свойства ротора:

$$\begin{aligned} &1)\ \operatorname{rot}(c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2)=c_1\operatorname{rot}\boldsymbol{a}_1+c_2\operatorname{rot}\boldsymbol{a}_2, \\ &2)\ \operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=[\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{a}]+\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \\ &3)\ \text{если } \boldsymbol{a}=\text{const, то } \operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0 \text{ и } \operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=[\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{a}]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если в области V $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,(M)=0$, то поле $\boldsymbol{a}\,(M)$ называется *безвихревым*.

2.69. Найти ротор поля линейных скоростей точек твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки O.

Решение. В задаче **2.60** было показано, что в специально подобранных координатах

$$\boldsymbol{V}(M)=[\boldsymbol{\omega r}]=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}.$$

По формуле (3.13)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V}\ M)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\cdot 0+\boldsymbol{j}\cdot 0+\boldsymbol{k}\ \omega+\omega)=2\omega\boldsymbol{k}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(M)=2\boldsymbol{\omega}$, т. е. ротор поля линейных скоростей, равен удвоенной мгновенной угловой скорости.

2.70. Записать выражение ротора в цилиндрических и сферических координатах.

Решение. В цилиндрических координатах $H_\rho=1$, $H_\varphi=\rho$, $H_z=1$, поэтому по формуле (3.14)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)-\frac{1}{\rho}\rho\boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right).$$

Окончательно,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\left(\frac{a_\varphi}{\rho}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{3.16}$$

Аналогично, в сферических координатах

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial r & \partial\theta & \partial\varphi \\ a_r & ra_\theta & r\sin\theta a_\varphi \end{vmatrix}=\left(\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}a_\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r+$$

$$+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}a_\varphi-\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\left(\frac{a_\theta}{r}+\frac{\partial a_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{3.17}$$

2.71. Доказать, что всякое центрально-симметрическое поле $\boldsymbol{a}=f(r)\boldsymbol{r}=rf(r)\boldsymbol{e}_r$ является безвихревым.

Решение. В сферических координатах $a_r=rf(r)$, $a_\theta=0$, $a_\varphi=0$. Подставляя эти величины в (3.17), получим $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}f(r)\boldsymbol{r}=0$, т. е. поле $\boldsymbol{a}$ безвихревое. В частности, при $f(r)=1$ получаем $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$.

2.72. Получить результат задачи **2.71** с помощью свойства 2 ротора из (3.15).

2.73. Найти ротор векторного поля $\boldsymbol{a}=xyz\,(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$.

Решение. Так как $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, а $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$ (задача **2.71**), то по свойству 2 (3.15):

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=[\operatorname{grad}xyz,\ \boldsymbol{r}]+xyz\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ yz & xz & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}=x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}+y(x^2-z^2)\boldsymbol{j}+z(y^2-x^2)\boldsymbol{k}.$$

2.74. Пусть $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{b}(M)$ — векторные поля. Показать, что

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}]=\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$$

Решение. В декартовых координатах

$$\boldsymbol{a}=P_1\boldsymbol{i}+Q_1\boldsymbol{j}+R_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=P_2\boldsymbol{i}+Q_2\boldsymbol{j}+R_2\boldsymbol{k},$$

$$[\boldsymbol{ab}]=(Q_1R_2-R_1Q_2)\boldsymbol{i}+(R_1P_2-P_1R_2)\boldsymbol{j}+(P_1Q_2-Q_1P_2)\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}]=\frac{\partial}{\partial x}(Q_1R_2-R_1Q_2)+\frac{\partial}{\partial y}(R_1P_2-P_1R_2)+\frac{\partial}{\partial z}(P_1Q_2-Q_1P_2).$$

Дифференцируя сначала первые множители, получим сумму

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}R_2-\frac{\partial R_1}{\partial x}Q_2+\frac{\partial R_1}{\partial y}P_2-\frac{\partial P_1}{\partial y}R_2+\frac{\partial P_1}{\partial z}Q_2-\frac{\partial Q_1}{\partial z}P_2=\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)P_2+$$

$$+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)Q_2+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)R_2$$

— это скалярное произведение вектора $\boldsymbol{b}(M)$ на $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)$. Аналогично, дифференцируя вторые множители, получим $\boldsymbol{a}(M)\operatorname{rot}\boldsymbol{b}(M)$ со знаком минус. Тем самым требуемая формула доказана.

2.75. Вычислить ротор заданных векторных полей:

а) $\boldsymbol{a}(M)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$,

б) $\boldsymbol{a}(M)=\operatorname{arctg}(x-y+z)(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$,

в) $\boldsymbol{a}(M)=y^2\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$.

2.76. Вычислить ротор векторных полей, заданных в цилиндрических и сферических координатах;

а) $\boldsymbol{a}(\rho,\ \varphi,\ z)=\rho^2\varphi\boldsymbol{e}_\rho+z^2\varphi^3\boldsymbol{e}_\varphi-\rho\varphi z\boldsymbol{e}_z$,

б) $\boldsymbol{a}(r,\ \theta,\ \varphi)=r\boldsymbol{e}_r-r^2\cos^2\theta\boldsymbol{e}_\theta+r^2\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$.

2.77. Показать, что ротор плоского поля

$$\boldsymbol{a}(M)=\boldsymbol{P}(x,\ y)\boldsymbol{i}+Q(x,\ y)\boldsymbol{j}$$

имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}.$$

2.78. Найти $\operatorname{rot}(r\boldsymbol{c})$, где $r=|\overline{OM}|$, $\boldsymbol{c}=\text{const}$.

2.79. Показать, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{rb})=[\boldsymbol{bc}]$.

2.80. Найти ротор поля $[\boldsymbol{ac}]$, где $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

2.81. Показать, что магнитное поле $\boldsymbol{H}(M)$ (задача **2.51**) является безвихревым в области своего определения.

2.82. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{rc}]$, где $\boldsymbol{c}=\text{const}$, является соленоидальным.

Указание. См. задачу **2.74.**

2.83. Показать, что векторное поле

$$\boldsymbol{a}=f(\rho)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}),\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

является безвихревым при любом выборе $f(\rho)$.

4. Оператор набла. Дифференциальные операции второго порядка. Операции взятия градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля записываются единообразно с помощью *оператора набла* (оператора Гамильтона):

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

а именно:

$$\nabla\varphi=\operatorname{grad}\varphi,\quad \nabla\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{a},\quad [\nabla\boldsymbol{a}]=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{3.18}$$

Набла является, во-первых, линейным дифференциальным оператором, т. е. его применение обладает всегда свойством линейности и подчиняется правилу дифференцирования произведения. Во-вторых, набла — векторный оператор, т. е. во многих случаях к ∇ можно применять формулы векторной алгебры. Однако надо помнить, что не всякое векторное соотношение сохраняется при замене того или иного вектора оператором ∇. Например, равен-

ство $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{ba}]=0$, вообще говоря, перестает быть верным при замене $\boldsymbol{b}$ на ∇. Поэтому всякие соотношения, полученные формальным оперированием с ∇ как с вектором, требуют своего обоснования. Это можно достичь, например, проверив справедливость соотношения в декартовой системе координат. Кроме того, существует ряд общих правил, при выполнении которых формальное применение ∇ приводит к верным результатам. Одно из таких правил приводится здесь.

Применение оператора ∇ к различным произведениям скалярных и векторных полей приводит к правильным равенствам, если:

а) действовать оператором ∇ по правилу дифференцирования произведения;

б) по правилам векторной алгебры преобразовать каждое полученное слагаемое так, чтобы на последнем месте стоял тот множитель, на который в этом слагаемом действует ∇, а ∇ стоял на предпоследнем месте.

При двукратном применении оператора ∇ следует считать, что $[\nabla\nabla]=0$. Скалярный квадрат

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

есть *оператор Лапласа*. Если φ — скалярное поле, то

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{3.19}$$

если $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ — векторное поле, то

$$\Delta\boldsymbol{a}=\Delta P\boldsymbol{i}+\Delta Q\boldsymbol{j}+\Delta R\boldsymbol{k}. \tag{3.20}$$

Всего имеется 5 дифференциальных операций 2-го порядка со скалярными и векторными полями, которые предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми:

$$\begin{aligned}
&1.\ \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi,\\
&2.\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0,\\
&3.\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla(\nabla\boldsymbol{a}),\\
&4.\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0,\\
&5.\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Равенства 2 и 4 показывают, что векторное поле $\operatorname{grad}\varphi(M)$ является безвихревым, а векторное поле $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)$ — соленоидальным.

2.84. Получить соотношения (3.21) с помощью оператора набла, учитывая, что $[\nabla\nabla]=0$, $\nabla^2=\Delta$.

Решение. По формулам (3.18)

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla(\nabla\varphi)=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=[\nabla,\ \nabla\varphi]=[\nabla\nabla]\varphi=0\cdot\varphi=0.$$

Здесь скалярный множитель φ был вынесен за знак скалярного и векторного произведения.

Далее, так как в векторной алгебре устанавливается равенство скалярно-векторного и векторно-скалярного произведений $(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c})$, то

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]=[\nabla\nabla]\boldsymbol{a}=0\cdot\boldsymbol{a}=0.$$

Для получения равенства 5 используется тождество $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}.$$

2.85. Доказать равенства (3.21) в декартовой системе координат.

Указание. Использовать равенство смешанных производных 2-го порядка у дважды непрерывно дифференцируемой функции.

2.86. Используя правило действия ∇ на произведения скалярных и векторных полей, получить равенство задачи **2.74**:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$$

Решение. Запишем левую часть с помощью ∇:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \nabla[\boldsymbol{ab}].$$

Действуем оператором ∇ сначала на множитель $\boldsymbol{a}$, оставляя $\boldsymbol{b}$ постоянным (отмечаем это значком $\boldsymbol{a}$ у ∇):

$$\nabla_a[\boldsymbol{ab}] = [\nabla_a\boldsymbol{a}]\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}[\nabla_a\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.$$

Здесь были применены два правила векторной алгебры (равенство векторно-скалярного и скалярно-векторного произведений и коммутативность скалярного произведения) для того, чтобы перевести множитель $\boldsymbol{a}$ на последнее место, а ∇_a на предпоследнее. Аналогично, фиксируя $\boldsymbol{a}$ и действуя оператором ∇ на $\boldsymbol{b}$, получим

$$\nabla_b[\boldsymbol{ab}] = -\nabla_b[\boldsymbol{ba}] = -[\nabla_b\boldsymbol{b}]\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}[\nabla_b\boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$$

Следовательно, по правилу дифференцирования произведения

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \nabla[\boldsymbol{ab}] = \nabla_a[\boldsymbol{ab}] + \nabla_b[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$$

2.87. Используя правило действия ∇ на произведения скалярных и векторных полей, получить следующие равенства:

1. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$,
2. $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi$,
3. $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi]$,
4. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]$,
5. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

2.88. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{c}\operatorname{grad}\varphi]$, где $\boldsymbol{c} = \text{const}$, является соленоидальным. Найти его ротор в декартовых координатах.

Решение. По формуле задачи 2.86

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{c}\operatorname{grad}\varphi] = \operatorname{grad}\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,$$

так как $\operatorname{rot}\boldsymbol{c} = 0$ при $\boldsymbol{c} = \text{const}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$ (см. (3.21)).

Итак,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0,$$

т. е. $\boldsymbol{a}$ — соленоидальное поле.

По формуле 5 задачи 2.87, используя условие $\boldsymbol{c} = \text{const}$, получим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{c} \operatorname{grad} \varphi] = -(\boldsymbol{c}\nabla) \operatorname{grad} \varphi + \boldsymbol{c} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi =$$

$$= -(\boldsymbol{c}\nabla) \operatorname{grad} \varphi + \boldsymbol{c}\Delta\varphi).$$

В декартовых координатах $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$, $\varphi = \varphi(x, y, z)$,

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \text{ и } \operatorname{rot} [\boldsymbol{c} \operatorname{grad} \varphi] =$$

$$= -\left(c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + (c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \left(c_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + c_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - c_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - c_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right)\boldsymbol{i} +$$

$$+ \left(c_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - c_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - c_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{j} +$$

$$+ \left(c_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + c_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - c_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - c_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{k}.$$

2.89. Уравнения Максвелла электромагнитного поля имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля, $\boldsymbol{H}$ — магнитного, t — время, $c = \text{const}$. Исключить из этих уравнений электрическое поле.

Решение. Ко второму уравнению Максвелла применим операцию rot, в левой части используем формулу 5 из (3.21), в правой части переостановочность $\operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}$. В результате получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}.$$

Известно, что магнитное поле является соленоидальным. Поэтому в левой части $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$. В правую часть вместо $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ подставим его выражение из первого уравнения Максвелла, тогда получим

$$-\Delta \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Таким образом, поле $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет волновому уравнению.

2.90. Из уравнений Максвелла (задача **2.89**) исключить магнитное поле, учтя соленоидальность поля $\boldsymbol{E}$.

2.91. Записать выражение оператора Лапласа в ортогональных криволинейных координатах.

Решение. Так как $\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, то для записи $\Delta\varphi$ в ортогональных криволинейных координатах надо к формуле (2.4), выражающей градиент в координатах $\{u, v, w\}$, применить операцию взятия дивергенции в тех же координатах (см. (3.9)). В результате будем иметь:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]. \quad (3.22)$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \quad (3.23)$$

В сферических координатах

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \quad (3.24)$$

2.92. Получить выражение оператора Лапласа цилиндрического и сферического скалярного полей (задачи **2.20** и **2.21**).

2.93. Найти $\Delta\boldsymbol{a}$, если

$$\boldsymbol{a} = 3z(x^2+y^2)\boldsymbol{i} - 2y(x^2+z^2)\boldsymbol{j} + 4x(y^2+z^2)\boldsymbol{k}.$$

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1. Поток векторного поля. Поверхность σ называется двусторонней (или ориентируемой), если при непрерывном переносе вектора единичной нормали $\boldsymbol{n}$ по любому замкнутому пути на поверхности мы возвращаемся в исходную точку M с тем же самым направлением $\boldsymbol{n}$ (M). Двусторонней является, например, всякая замкнутая поверхность (она имеет внешнюю и внутреннюю стороны), всякая поверхность, задаваемая уравнением $z = f(x, y)$, имеющая верхнюю и нижнюю стороны. Примером односторонней поверхности служит лист Мебиуса (прямоугольный лист $ABCD$, перекрученный один раз и склеенный по линии AB, DC).

Потоком Π векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ через двустороннюю поверхность σ (точнее, через выбранную сторону этой поверхности) называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_{\sigma} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma, \quad (4.1)$$

где векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ берется в точках поверхности σ, а $\boldsymbol{n}(M)$ — единичный вектор нормали вдоль σ, указывающий избранную сторону этой поверхности. Условимся в случае замкнутой поверхности σ в качестве $\boldsymbol{n}(M)$ брать

всегда вектор внешней нормали. Поток обладает следующими основными свойствами:

$$\text{I. } \iint\limits_{\sigma'} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma = -\iint\limits_{\sigma''} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma,$$

где σ' и σ'' — две стороны поверхности σ.

II. Свойство линейности.

$$\iint\limits_{\sigma} (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_1\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{n}\,d\sigma = c_1\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}\,d\sigma + c_2\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

III. Свойство аддитивности. Если σ состоит из частей σ_1, σ_2, ..., σ_n, то

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_n} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

Методы вычисления потока сводятся к известным методам вычисления поверхностных интегралов. В декартовых координатах

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{n}(M) = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k} \quad \text{и}$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma. \tag{4.2}$$

Для нахождения интеграла (4.2) удобно проектировать поверхность σ на одну из координатных плоскостей. Пусть, например, σ взаимно однозначно проектируется на плоскость xOy, тогда

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} \quad *$$

и, обозначая σ_{xy} проекцию σ на xOy, получим двойной интеграл

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \left(\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{|\cos\gamma|}\right)_{z=z(x,\,y)} dx\,dy, \tag{4.3}$$

где $z = z(x, y)$ находится из уравнения поверхности σ. Заметим, что метод нахождения нормали $\boldsymbol{n}(M)$ указан в задаче 2.28 (формула (2.6)). Знак в этой формуле выбирается так, чтобы нормаль $\boldsymbol{n}(M)$ указывала заданную сторону поверхности σ.

Аналогично, если σ взаимно однозначно проектируется на yOz или xOz, то

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_{yz}} \left(\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{|\cos\alpha|}\right)_{x=x(y,\,z)} dy\,dz, \text{ или } \Pi = \iint\limits_{\sigma_{xz}} \left(\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{|\cos\beta|}\right)_{y=y(x,\,z)} dx\,dz.$$

Иногда вычисление потока проводят методом проектирования σ на все три координатные плоскости:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy. \tag{4.4}$$

Здесь каждое слагаемое вычисляется отдельно посредством проектирования σ на соответствующую координатную поверхность. Например,

$$\iint\limits_{\sigma} P\,dy\,dz = \pm \iint\limits_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dy\,dz,$$

---

* В противном случае поверхность разбивают на части, проектирующиеся взаимно однозначно каждая на одну из плоскостей xOy, yOz, xOz, и пользуются аддитивностью потока (свойство III).

где $x = x(y, z)$ получается из уравнения поверхности, причем при переходе к интегралу по σ_{yz} перед интегралом ставится знак направляющего косинуса ($\cos\alpha$) нормали к поверхности σ.

2.94. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + (1-2y)\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность σ, состоящую из части параболоида $x^2 + z^2 = 1 - 2y\,(y \geqslant 0)$ и плоскости xOy (рис. 54).

Решение. Искомый поток вычисляется по формуле $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma$, где σ_1 — часть поверхности параболоида, а σ_2 — часть плоскости xOy. Найдем поток Π_1. Поверхность σ_1 взаимно однозначно проектируется на плоскость xOz ($y = 0$), σ_{xz} представляет собой единичный круг $x^2 + z^2 = 1$. Для вычисления потока воспользуемся формулой (4.3):

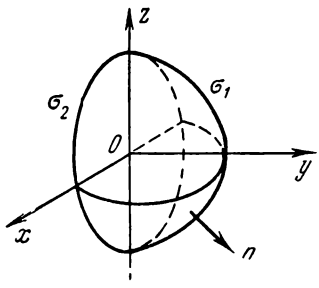


Рис. 54

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{xz}} \left(\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{\cos\beta}\right)_{y = y(x,\,z)} dx\,dz\,.$$

Так как уравнение поверхности σ_1: $F(x, y, z) = x^2 + z^2 + 2y - 1$, то по формуле (2.6) найдем единичный нормальный вектор к ней:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{2(x\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{2\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} = \frac{x\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} + \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} + \frac{z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}}\,.$$

Здесь $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} > 0$, т. е. полученная нормаль $\boldsymbol{n}$ с осью Oy образует острый угол и поэтому является искомой внешней нормалью к поверхности σ_1.

Вычислим

$$\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{\cos\beta} = \frac{(2x^2 + 2z^2 + 1 - 2y)}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} = 2(x^2 + z^2) + 1 - 2y.$$

Из уравнения параболоида имеем: $-2y = x^2 + z^2 - 1$, т. е. $\dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{\cos\beta} = 3(x^2 + z^2)$. Поэтому

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_{xz}} 3(x^2 + z^2)\,dx\,dz.$$

Введем полярные координаты ρ и φ:

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$

Тогда

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_{xz}} 3\rho^2 \rho d\rho d\varphi = 3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = 3 \cdot 2\pi \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Теперь вычислим поток Π_2. На поверхности σ_2, где $y=0$, $x^2+z^2 \leqslant 1$, внешняя нормаль $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$. Поэтому

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_2} \boldsymbol{an} d\sigma = -\iint\limits_{\sigma_2} d\sigma = -\pi.$$

Таким образом, искомый поток данного поля

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

2.95. Найти поток поля $\boldsymbol{a} = (1-2x)\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность σ, состоящую из частей — поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ $(z \geqslant 0)$ и плоскости $z=4$ (рис 55).

Решение. Искомый поток Π через полную поверхность конуса состоит из потока Π через поверхность конуса σ_1 и потока Π_2 через основание конуса σ_1. Вычислим поток Π_1. Проектируя поверхность σ_1 на плоскость $z=0$, имеем

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\boldsymbol{an}}{|\cos\gamma|} dxdy.$$

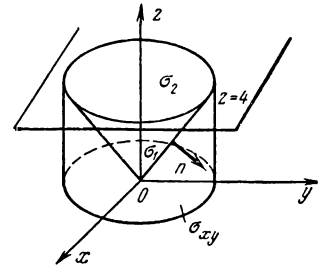


Рис. 55

Так как уравнение поверхности σ_1 $=0$ и $F(x, y, z) = x^2+y^2-z^2=0$, то

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k})}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{2z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{z\sqrt{2}} - \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}},$$

(x^2+y^2) заменяем через z^2, пользуясь уравнением σ_1. Здесь

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0,$$

что показывает, что нормаль $\boldsymbol{n}$ является внешней нормалью к поверхности σ (см. рис. 55). Вычислим $\dfrac{\boldsymbol{an}}{|\cos\gamma|} = \dfrac{x-2x^2+2y^2}{z} - 2z$. Но на σ_1:

$$z = \sqrt{x^2+y^2},$$

поэтому

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\boldsymbol{an}}{|\cos\gamma|} dxdy = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{x-4x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

В полярных координатах

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi}{\rho}\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (\rho\cos\varphi - 4\rho^2\cos^2\varphi)\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(2\cos\varphi - \frac{4}{3}\cdot 8\cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left[2\sin\varphi - \frac{16}{3}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{32}{3}\pi.$$

Теперь вычислим поток Π_2. На σ_2, т. е. на плоскости $z=4$, внешняя нормаль $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$. Поэтому $\boldsymbol{an}=2z=2\cdot 4=8$ и $\Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_2} 8\,d\sigma = 8\iint\limits_{\sigma_2} d\sigma = 8\cdot\pi R^2 = 32\pi$, так как σ_2 — круг радиуса $R=2$, следовательно,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{32}{3}\pi + 32\pi = \frac{64}{3}\pi.$$

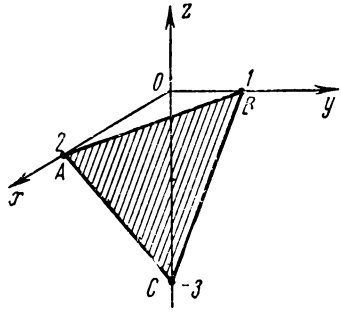


Рис. 56

2.96. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ через плоский треугольник σ, получаемый при пересечении плоскости $3x+6y-2z-6=0$ с координатными плоскостями (рис. 56). (Выбрать верхнюю сторону треугольника σ.)

Решение. Найдем поток данного поля методом проектирования на три координатные плоскости. Так как

$$P(x, y, z) = z,$$

$$Q(x, y, z) = -x,$$

$$R(x, y, z) = y,$$

то по формуле (4.4)

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (z\,dydz - x\,dxdz + y\,dxdy).$$

Единичный нормальный вектор данной плоскости

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}}{\sqrt{9+36+4}} = \pm\left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}\boldsymbol{j} - \frac{2}{7}\boldsymbol{k}\right).$$

На верхней стороне $\cos\gamma > 0$, поэтому надо выбрать знак минус. Тогда получим $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$. Вычислим каждое слагаемое отдельно с помощью проектирования на соответствующую координатную плоскость. При этом, переходя от интеграла по σ к интегралу по проекции, надо ставить перед

последним знак соответствующего косинуса выбранной нормали, т. е. в данном случае в первом слагаемом — минус, во втором — минус, в третьем — плюс.

$$\iint\limits_{\sigma} z\,dy\,dz = -\iint\limits_{BOC} z\,dy\,dz = -\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{3y-1} z\,dz =$$

$$= -\frac{9}{2}\int\limits_0^1 (y-1)^2\,dy = -\frac{3}{2}(y-1)^3\Big|_0^1 = -\frac{3}{2};$$

$$-\iint\limits_{\sigma} x\,dx\,dz = -\iint\limits_{AOC} x\,dx\,dz = -\int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_0^{\frac{3}{2}x-2} dx =$$

$$= -\int\limits_0^2 x\left(\frac{3}{2}x-2\right)dx = -\left(\frac{x^3}{2}-x^2\right)\Big|_0^2 = 0;$$

$$\iint y\,dx\,dy = \iint\limits_{AOB} y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_0^{2(1-y)} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 (y-y^2)\,dy = 2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

В результате,

$$\Pi = -\frac{3}{2} + 0 + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}.$$

2.97. Найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a}(M) = (x-z)\,\boldsymbol{i} + (y+z)\,\boldsymbol{j} + (x-y)\,\boldsymbol{k}$$

через внешнюю сторону части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, ограниченной плоскостями $z = x$ и $z = 0$ (считая $z \geqslant 0$).

Решение. Единичный вектор внешней нормали к цилиндру радиуса a (см. задачу **2.34** б)

$$\boldsymbol{n}(M) = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{a}.$$

Поэтому

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \frac{x(x-z) + y(y+z)}{a}\,d\sigma.$$

Для вычисления этого интеграла введем на цилиндре координаты φ, z: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = z$. Так как сам цилиндр является координатной поверхностью $\rho = \text{const}$ цилиндрической системы $\{\rho, \varphi, z\}$, то элемент его площади (см. § 1)

$$d\sigma = (HH_z)_{\rho=a}\,d\varphi\,dz = (\rho\cdot 1)_{\rho=a}\,d\varphi\,dz = a\,d\varphi\,dz.$$

Подставляя это в интеграл, найдем:

$$П = \iint\limits_{\sigma} \frac{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi + z(a\sin\varphi - a\cos\varphi)}{a}\, ad\varphi dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} [a^2 + az(\sin\varphi - \cos\varphi)]\, d\varphi dz.$$

На данной части цилиндра угол φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а при каждом фиксированном φ координата z от $z=0$ до $z=x=a\cos\varphi$, так что

$$П = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} [a^2 + az(\sin\varphi - \cos\varphi)]\, dz =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[a^3\cos\varphi + \frac{a^3}{2}\cos^2\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= a^3\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^3}{2}\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^3}{2}\left(-\sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2a^3 - 0 + \frac{a^3}{2}\left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}a^3.$$

2.98. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + (y+x)\boldsymbol{j} + (z-y)\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

Решение. В качестве координат точек сферы разумно выбрать углы φ и θ сферической системы координат так, что

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = R\cos\theta.$$

Элемент площади сферы (см. § 1)

$$d\sigma = R^2\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Единичный вектор внешней нормали (см. задачу **2.34** а):

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{R}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).$$

Поэтому

$$\boldsymbol{an} = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + yz + z^2 - yz) = \frac{1}{R}\cdot R^2 = R.$$

Так как в первом октанте $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, то по фор-

муле (4.1) получаем:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot R^2 \sin\theta\, d\theta = R^2 \cdot \frac{\pi}{2} (-\cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^3}{2}.$$

2.99. Найти потоки Π_1 и Π_2 векторного поля $\boldsymbol{a}(M) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ соответственно через внешнюю сторону боковой поверхности и через полную поверхность пирамиды с вершиной в точке $D(0, 0, 2)$ и основанием ABC, где $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$.

2.100. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность, состоящую из части конической поверхности $x^2 + z^2 = y^2$ и плоскости $y = 1$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

2.101. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$ $(0 \leqslant z \leqslant 9)$.

2.102. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \geqslant 0)$.

2.103. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a} = \frac{x}{3}\boldsymbol{i} + (z^2 - x^2)\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}z\boldsymbol{k}$ через полную поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

2.104. Найти поток поля $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через нижнюю сторону части параболоида $x^2 + y^2 = a\,(a - 2z)$, расположенную во втором октанте $(x \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

2.105. Найти поток поля $\boldsymbol{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{k}{r^2}\left(\frac{2}{r}\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)$ через поверхность полусферы $r = R$ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

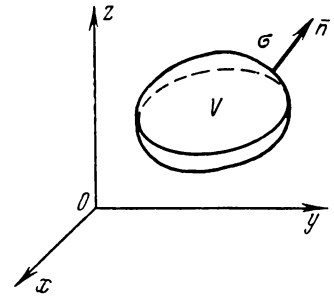


Рис. 57

2. Теорема Остроградского. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные произведения в некоторой замкнутой области V, а σ — кусочно-гладкая поверхность (рис. 57), ограничивающая область V, то имеет место формула Остроградского:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma, \qquad (4.5)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности σ.

Формула Остроградского в векторной форме имеет вид

$$\Pi = \iint_{\sigma} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iiint_{v} \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dv, \qquad (4.6)$$

т. е. *поток векторного поля через замкнутую поверхность* равен интегралу от дивергенции этого поля по объему v, ограниченному поверхностью σ.

Нахождение потока через замкнутую поверхность во многих случаях упрощается при применении формулы Остроградского. В частности, из нее непосредственно следует, что поток соленоидального поля ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$) через любую замкнутую поверхность равен нулю.

2.106. Вывести из формулы Остроградского инвариантный смысл дивергенции векторного поля.

Решение. Пусть M — некоторая точка в области V задания векторного поля $\boldsymbol{a}$. Окружим точку M замкнутой поверхностью σ, ограничивающей объем V_σ, и применим формулу Остроградского (4.6):

$$\iint_\sigma \boldsymbol{a} n d\sigma = \iiint_{V_\sigma} \operatorname{div} \boldsymbol{a} dv = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_c) \cdot V_\sigma.$$

Справа записана теорема о среднем для тройного интеграла. M_c — некоторая «средняя» точка внутри σ. Следовательно,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_c) = \frac{\iint_\sigma \boldsymbol{a} n d\sigma}{V_\sigma}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу, сжимая поверхность σ в точку M, тогда $M_c \to M$ и, в силу непрерывности дивергенции *, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_c) \to \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$, так что предел левой части существует. Значит, существует предел правой части и мы получаем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{\sigma \to M} \frac{\iint_\sigma \boldsymbol{a} n d\sigma}{V_\sigma}. \qquad (4.7)$$

Из этого равенства вытекают два вывода. Во-первых, предел в правой части не зависит от способа стягивания поверхности к точке M, так как он равен значению дивергенции в точке M. Во-вторых, поскольку правая часть определена независимо от выбора системы координат, не зависит от выбора системы координат, т. е. инвариантно и понятие дивергенции векторного поля. Величина $\frac{1}{V_\sigma} \iint_\sigma \boldsymbol{a} n d\sigma$ называется средней плотностью потока в окрестности V_σ точки M, а ее предел при $\sigma \to M$ называется *плотностью потока* в точке M.

Итак, формула (4.7) показывает, что значение дивергенции в каждой точке M области задания векторного поля $\boldsymbol{a}$ равно плотности потока поля $\boldsymbol{a}$ в точке M.

2.107. Найти поток центрально-симметричного поля $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$ через поверхность S сферы радиуса R в случае, когда центр поля и центр сферы совпадают.

---

* Поле $\boldsymbol{a}(M)$ предполагается гладким, т. е. его координаты имеют непрерывные производные, которые входят в формулу дивергенции.

Решение. Так как (см. 2.58)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3f(r) + rf'(r) = \frac{1}{r^2}[r^3 f(r)]',$$

то по формуле (4.6) с использованием сферических координат получим

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \frac{1}{r^2}[r^3 f(r)]' r^2 dr = 2\pi \cdot 2[r^3 f(r)]_0^R = 4\pi R^3 f(R).$$

Здесь, конечно, надо предположить, что $f(0) \neq \infty$, или, в противном случае, что $\lim r^3 f(r) = 0$.

2.108. Электрическое поле $\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$ создано точечным зарядом q, помещенным в точку $r = 0$. Найти поток электричества через замкнутую поверхность σ.

Решение. Если поверхность σ не содержит внутри себя заряда q (т. е. точки $r = 0$), то в ограниченном ей объеме V_σ $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ (см. 2.58). По теореме Остроградского в этом случае

$$\Pi_\sigma = \iint_\sigma \boldsymbol{E} n d\sigma = \iiint \operatorname{div} \boldsymbol{E} d\sigma = 0.$$

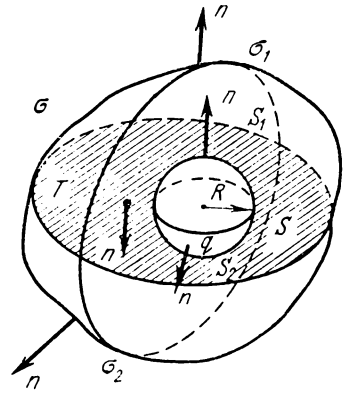


Рис. 58

Пусть теперь σ содержит внутри заряд q. Окружим этом заряд сферой S с центром $r = 0$, выбрав радиус R таким, чтобы S целиком лежала в области V_σ. Обозначим V — объем между σ и S. Некоторым сечением T (рис. 58) разобъем этот объем на две части V_1 и V_2. Каждая из них заряда не содержит, поэтому потоки через поверхности, ограничивающие V_1 и V_2, равны, по доказанному, нулю. Это дает два равенства:

$$\Pi_{\sigma_1} - \Pi_{S_1} + \Pi_T = 0, \quad \Pi_{\sigma_2} - \Pi_{S_2} - \Pi_T = 0$$

(знак минус ставился там, где выбранная нормаль оказывалась внутренней для объема V_1 или V_2). Складывая равенства, находим

$$\Pi_{\sigma_1} + \Pi_{\sigma_2} - \Pi_{S_1} - \Pi_{S_2} = 0, \text{ т. е. } \Pi_\sigma = \Pi_S.$$

Итак, поток электричества через любую замкнутую поверхность σ, заключающую внутри заряд q, равен потоку через некоторую сферу с центром в точке $r = 0$. Формально последний можно было бы получить из результата предыдущей задачи, подставив туда $f(R) = \frac{q}{R^3}$, т. е. $\Pi_S = 4\pi R^3 \frac{q}{R^3} = 4\pi q$. Однако это не обосно-

вано, так как $f(0)=\infty$ и $\lim r^3 f(r)=q\neq 0$. Подсчитаем поэтому поток через сферу S непосредственно в сферических координатах, учтя, что $\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^2=r^2$,

$$\Pi_S=\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left(\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{R}\right)_{r=R}R^2\sin\theta d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{qR^2}{R^4}R^2\sin\theta d\theta=2\pi\cdot 2q=4\pi q.$$

Итак,

$$\Pi_\sigma=\begin{cases}0, & \text{если } \sigma \text{ не содержит внутри заряда } q,\\ 4\pi q, & \text{если } \sigma \text{ содержит заряд } q.\end{cases}$$

2.109. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=z^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону части поверхности параболоида S:

$$\{x^2+y^2=4-z,\ z\geqslant 0\}.$$

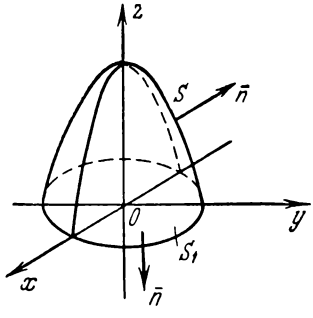


Рис. 59

Решение. Здесь поверхность S незамкнутая, так что к ней нельзя применить теорему Остроградского. Однако вычисление потока по формуле $\Pi_S=\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma$ приводит к громоздким вычислениям. Поэтому здесь разумно дополнить данную поверхность S поверхностью основания S_1 $(z=0)$; тогда поверхность $\sigma=S+S_1$ — замкнутая (рис. 59).

Очевидно,

$$\oiint_\sigma \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma=\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma+\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma,$$

откуда искомый поток

$$\Pi_S=\oiint_\sigma \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma-\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma.$$

Вычислим каждое слагаемое правой части отдельно:

$$\Pi=\oiint_\sigma \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}dV;\ \text{но } \operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}(z^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k})=0.$$

Следовательно, $\Pi=0$. Поэтому

$$\Pi_S=-\Pi_1=-\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma.$$

Но S_1 — круг: $x^2+y^2\leqslant 4$, и единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{k}$, т. е. $\boldsymbol{an}=-y^2$ и $\Pi_S=-\Pi_1=\iint\limits_{S_1} y^2 d\sigma$. Введя полярные координаты $y=\rho\sin\varphi$, $d\sigma=\rho d\rho d\varphi$ $(0\leqslant\rho\leqslant 2;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, получим

$$\Pi_S=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^2=4\pi.$$

2.110. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ через замкнутую поверхность σ: $\{x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2\leqslant z^2,\ z\geqslant 0\}$.

2.111. Вычислить двумя способами, непосредственно и по теореме Остроградского, поток данного векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ через данную замкнутую поверхность σ:

а) $\boldsymbol{a}(M)=z\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$; $\sigma:\{3x+2y+z=6,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$,

б) $\boldsymbol{a}(M)=(x+z)\boldsymbol{i}+(x+y)\boldsymbol{j}+(y+z)\boldsymbol{k}$; $\sigma:\{x^2+y^2=R^2,\ x+y+z=R,\ z\geqslant 0\}$,

в) $\boldsymbol{a}(M)=y^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$; $\sigma:\{x^2=1-y-z,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$,

г) $\boldsymbol{a}(M)=2xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$; $\sigma:\{x^2+y^2+z^2=9,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$.

3. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Линейным интегралом W векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл от скалярного произведения $\boldsymbol{a}(M)$ на единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}(M)$ к линии L:

$$W=\int\limits_L \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{\tau}(M)\,ds=\int\limits_L \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}, \tag{4.8}$$

где ds — дифференциал дуги L, $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}ds$ — дифференциал радиуса вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль L.

Если $\boldsymbol{f}(M)$ — силовое поле, то $W=\int\limits_L \boldsymbol{f}(M)\,\boldsymbol{\tau}(M)\,ds=\int\limits_L \boldsymbol{f}d\boldsymbol{r}$ означает работу этого поля вдоль пути L.

Основные свойства линейного интеграла.

I. Свойство линейности: $\int\limits_L (C_1\boldsymbol{a}_1+C_2\boldsymbol{a}_2)\,d\boldsymbol{r}=C_1\int\limits_L \boldsymbol{a}_1 d\boldsymbol{r}+C_2\int\limits_L \boldsymbol{a}_2 d\boldsymbol{r}$.

II. Свойство аддитивности: $\int\limits_{L_1+L_2} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=\int\limits_{L_1} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}+\int\limits_{L_2} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$.

III. При изменении направления линии L линейный интеграл меняет свой знак:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=-\int\limits_{BA} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}.$$

В декартовой системе координат: $\boldsymbol{a}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ и $d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$; поэтому

$$W=\int\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{4.9}$$

Вычисляют интеграл (4.9) простой подстановкой выражений x, y, z из уравнения линии L. При этом получается определенный интеграл по параметру, нижний предел которого равен значению параметра в начальной, а верхний — в конечной точке пути L.

Циркуляцией векторного поля называется линейный интеграл по замкнутому пути C:

$$Ц = \oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}. \tag{4.10}$$

2.112. Вычислить линейный интеграл плоского поля $\boldsymbol{a}(M) = (x+y)\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$ вдоль дуги $L = OA$ параболы $y^2 = x$, если $O(0, 0)$, $A(1,1)$.

Решение.

$$W = \int_L \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_L (x+y)\,dx + (x-y)\,dy.$$

Подставляя сюда $y = \sqrt{x}$ из уравнения параболы и учитывая, что x меняется вдоль L от 0 до 1, получим

$$W = \int_0^1 (x+\sqrt{x})\,dx + \int_0^1 (x-\sqrt{x})\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + x\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 = 1.$$

2.113. Найти работу силового поля $F(M) = x\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ вдоль одного витка M_0M винтовой линии L: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение.

$$W = \int_L F\,d\boldsymbol{r} = \int_L x\,dx + x\,dy - dz = \int_0^{2\pi} [a\cos t\,(-a\sin t) +$$

$$+ a\cos t \cdot a\cos t - b]\,dt = -a^2\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin^2 t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} - 2\pi b = \pi(a^2 - 2b).$$

2.114. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}(M) = x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ вдоль контура C, полученного при пересечении поверхности $y^2 = 4 - z - x$ с координатными плоскостями (рис. 60).

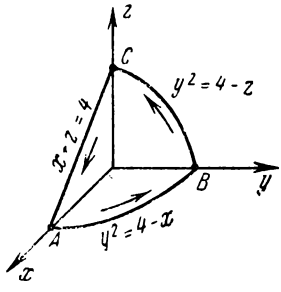


Рис. 60

Решение. В этой задаче контур C: $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA}$ является кусочно-гладкой линией, состоящей из трех гладких частей: из парабол $y^2 = 4 - x$ и $y^2 = 4 - z$ на плоскостях xOy и yOz и отрезка прямой $x + z = 4$ на плоскости xOz.

$$Ц = \oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} + \int_{\overset{\frown}{BC}}^{0} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} + \int_{\overset{\frown}{CA}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}.$$

Каждое из слагаемых в правой части вычисляется отдельно. Так как на $\overset{\frown}{AB}$:

$$z = 0,\ dz = 0,$$

то

$$\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=x dx.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=\int\limits_{4}^{0}=x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_4^0=-8.$$

Аналогично, на $\overset{\frown}{BC}$:

$$x=0,\ dx=0$$

и

$$\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=-z dy+y dz.$$

Из уравнения параболы BC имеем: $z=4-y^2$, $dz=-2y dy$, поэтому $\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=[-(4-y^2)+y(-2y)]\,dy=-(y^2+4)\,dy$. Итак,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BC}}\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=-\int\limits_{2}^{0}(y^2+4)\,dy=\int\limits_{0}^{2}(y^2+4)\,dy=\left(\frac{y^3}{3}+4y\right)\Big|_0^2=\frac{32}{3}.$$

На $\overset{\frown}{CA}$:

$$y=0,\ dy=0,$$

$$\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=x dx;$$

поэтому

$$\int\limits_{\overset{\frown}{CA}}\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=\int\limits_{0}^{4}x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8.$$

Таким образом,

$$Ц=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}+\int\limits_{\overset{\frown}{BC}}\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}+\int\limits_{\overset{\frown}{CA}}\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}=-8+\frac{32}{3}+8=\frac{32}{3}.$$

2.115. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{f}=(2a-y)\,\boldsymbol{i}+(y-a)\,\boldsymbol{j}$ вдоль первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

2.116. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}=(x-2z)\,\boldsymbol{i}+(x+3y+z)\,\boldsymbol{j}+(5x+y)\,\boldsymbol{k}$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$.

2.117. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$ вдоль замкнутого контура L:

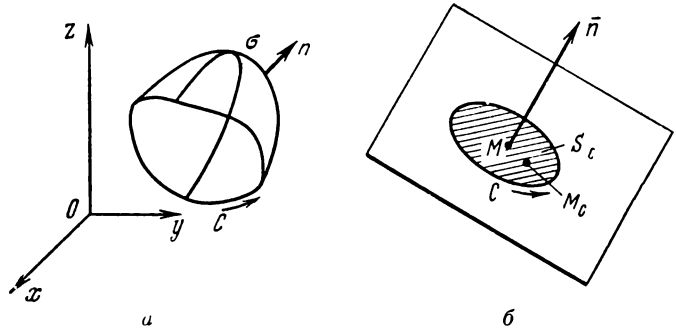
$$\{x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}.$$

2.118. Найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+(1-x)\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$ по контуру, получаемому при пересечении поверхностей цилиндра $(x-1)^2+y^2=1$ и сферы $(x-2)^2+y^2+z^2=4$.

2.119. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{zix} = \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{j} + \boldsymbol{yk}$ вдоль замкнутого контура L:

$$\{z = x^2 + y^2 - 10, \quad z = -1\}.$$

4. **Теорема Стокса.** Пусть в некоторой области V пространства задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ и незамкнутая кусочно-гладкая поверхность σ, ограниченная кусочно-гладким контуром C (рис. 61,*а*).



а *б*

Рис. 61

Сторона поверхности выбрана так, чтобы направление обхода по контуру с конца единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ на σ было видно совершающимся против часовой стрелки (правило правого винта). Тогда имеет место следующая формула Стокса:

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_{L} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}, \tag{4.11}$$

или в декартовых координатах:

$$\iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma =$$

$$= \oint_{L} P\, dx + Q\, dy + R\, dz, \tag{4.12}$$

т. е. поток ротора векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ через поверхность σ равен циркуляции поля $\boldsymbol{a}(M)$ по границе L этой поверхности.

2.120. Из теоремы Стокса вывести инвариантный смысл ротора векторного поля.

Решение. Выберем точку M в области задания V векторного поля $\boldsymbol{a}$ и проведем из этой точки некоторое направление l, которое зададим единичным вектором $\boldsymbol{n}$. В плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$, возьмем замкнутый контур $\boldsymbol{C}$, окружающий точку M (рис. 61,*б*). Направление на C согласуем с выбранным вектором $\boldsymbol{n}$ по правилу правого винта. Применим к контуру C' и ограниченной им части плоскости S_C формулу Стокса (4.11):

$$\oint_{C} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_{S_C} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_C)\boldsymbol{n} \cdot S_C.$$

Справа записана теорема о среднем для двойного интеграла, M_C — некоторая «средняя» точка внутри C. Из этих равенств находим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_C)\,\boldsymbol{n} = \frac{\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}}{S_C}.$$

Перейдем теперь к пределу при $C \to M$, тогда $M_C \to M$ и в силу непрерывности ротора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_C) \to \operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)$. Так как предел слева существует и равен $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n}$, то существует предел справа и он не зависит от способа стягивания контура C к точке M. Таким образом,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n} = \lim_{C \to M} \frac{\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}}{S_C}. \tag{4.13}$$

Величина

$$\frac{1}{S_C} \oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$$

называется средней плотностью циркуляции в окрестности точки M вокруг вектора $\boldsymbol{n}$, а ее предел при $C \to M$ — плотностью циркуляции в точке M вокруг вектора $\boldsymbol{n}$. Ясно, что плотность циркуляции не зависит от выбора системы координат (инвариантна). В силу формулы (4.13) инвариантным является скалярное произведение $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)\,\boldsymbol{n}$, которое равно проекции $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)$ на направление вектора $\boldsymbol{n}$. Поскольку направление l выбрано произвольно, то любая проекция ротора не зависит от выбора системы координат, значит и сам ротор инвариантен, так как он вполне определяется тремя проекциями, например, на оси координат. Из формулы (4.13) вытекает также, что направление ротора — это то направление, вокруг которого плотность циркуляции максимальна, а длина ротора равна величине этой максимальной плотности циркуляции. Так что связь между ротором и плотностью циркуляции вполне аналогична связи между градиентом и производной по направлению (см. § 2).

2.121. Пользуясь формулой Стокса, найти циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}(M) = x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ вдоль контура C, являющегося линией пересечения поверхности $y^2 = 4 - z - x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ с координатными плоскостями (см. рис. 60).

Решение. В качестве поверхности σ выберем натянутую на контур C часть поверхности $F(x, y, z) \equiv y^2 + z + x = 4$. Найдем единичный вектор нормали к σ:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + 4y^2 + 1}} = \frac{\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2 + 4y^2}}.$$

Здесь

$$\cos\alpha=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2+4y^2}}>0,\quad \cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{2+4y^2}}\geqslant 0,$$
$$y\geqslant 0,$$

т. е. вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к σ образует с осями координат острые углы и обеспечивает нужную ориентацию поверхности σ. Вычислим ротор данного поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,(M)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -z & y \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i},$$

следовательно,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}=\frac{2}{\sqrt{2+4y^2}}.$$

Поэтому по формуле Стокса:

$$Ц=\iint\limits_{\sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma=2\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{2+4y^2}}.$$

Спроектируя поверхность σ на плоскость xOy, получим фигуру σ_{xy}, ограниченную кривой $y^2=4-x$ $\{0\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant 4-y^2\}$ и осями координат (см. рис. 60); при этом

$$d\sigma=\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}=\sqrt{2+4y^2}\,dx\,dy.$$

Итак

$$Ц=2\iint\limits_{\sigma_{xy}}dx\,dy=2\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{4-y^2}dx=2\int\limits_0^2(4-y^2)\,dy=\frac{32}{3}$$

(сравните с решением задачи **2.114**). Заметим, что в теореме Стокса от поверхности σ требуется только то, чтобы она была натянута на контур C. Поэтому вместо выбранной части поверхности $y^2=4-z-x$ мы могли бы пользоваться кусочно-гладкой поверхностью, состоящей из треугольников AOB, AOC и BOC.

В задачах **2.122—2.124** с помощью теоремы Стокса найти циркуляцию данных векторных полей $\boldsymbol{a}(M)$ по указанному контуру C.

2.122. $\boldsymbol{a}=(x-2z)\,\boldsymbol{i}+(x+3y+z)\,\boldsymbol{j}+(5x+y)\,\boldsymbol{k}$, C — контур треугольника ABC, где $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$.

2.123. $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$, C — линия пересечения поверхности $x^2=4-y-z$ с координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.124.

$$\boldsymbol{a}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad C:\left\{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1,\ z=\frac{3}{2}\right\}.$$

В следующих задачах вычислить циркуляцию поля $\boldsymbol{a}(M)$ по данному контуру C двумя способами (непосредственно и по теореме Стокса):

2.125.

$$\boldsymbol{a}(M)=xyz\boldsymbol{i}+(x+y+z)\,\boldsymbol{j}-x^2y^2\boldsymbol{k};$$

$$C:\{x+y=a,\ x-y=a,\ x+y=-a,\ x-y=-a\}.$$

2.126.

$$\boldsymbol{a}(M)=y\boldsymbol{i}+(x-1)^2\,\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$$C:\{x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2+z^2=4x\}.$$

2.127.

$$\boldsymbol{a}(M)=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k},$$

$$C:\left\{x=R\cos^2 t,\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin 2t,\ z=R\sin^2 t\right\}.$$

§ 5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

1. Потенциальные векторные поля. Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется потенциальным в области V, если в этой области существует такое скалярное поле $\varphi(M)$, что

$$\boldsymbol{a}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M). \tag{5.1}$$

Функция $\varphi(M)$ называется при этом потенциалом поля $\boldsymbol{a}(M)$. Поскольку всегда $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi(M)=0$ (§ 3, п. 4), то для потенциального поля выполнено равенство $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$, т. е. оно является безвихревым. В односвязных областях* верно и обратное: всякое безвихревое векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ в односвязной области V является потенциальным.

Заметим, что в неодносвязной области безвихревое поле хотя и не является потенциальным, но в окрестности каждой точки M можно найти функцию φ, для которой выполняется (5.1). Однако распространить эту функцию на всю область не удается. Как правило, при таком распространении она становится многозначной.

Потенциал $\varphi(M)$ потенциального векторного поля определен с точностью до прибавления произвольной постоянной. Для его вычисления пользуются формулой

$$\varphi(M)=\int\limits_{M_0M}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}+\text{const}, \tag{5.2}$$

где M_0 — фиксированная точка области V. Путь интегрирования M_0M может быть выбран произвольно, лишь бы он не выходил за пределы V.

Если область V такова, что в каждую ее точку M можно в V провести координатную ломаную (рис. 62) из фиксированной точки M_0, то из фор-

---

* Односвязной называется область V, в которой всякий замкнутый контур C можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя за пределы области V. Например, односвязными являются все пространство, полупространство, шар, куб, эллипсоид, внешность шара, пространство с выброшенной точкой, шаровое кольцо и т. д. Примеры неодносвязных областей: пространство с выброшенной прямой, шар без одного диаметра, тор и т. д.

мулы (5.2) получаем

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz + C,$$

где $C = \text{const}$.

Здесь во втором интеграле x считается постоянным при интегрировании по y, а в третьем с x и y обходятся как с постоянными величинами.

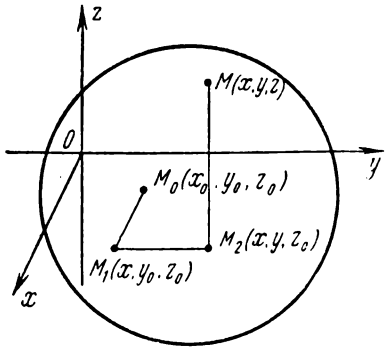


Рис. 62

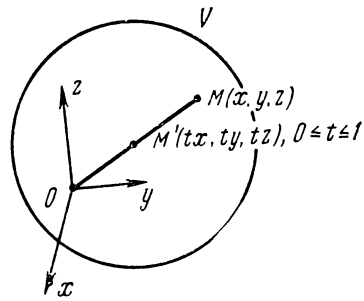


Рис. 63

В «звездной» области, где каждую точку M можно соединить прямой с общей точкой M_0, интегрируя по этой прямой, получают из (5.2) (точка M_0 принята за начало координат, рис. 63)

$$\varphi(M) = \int_{0}^{1} \boldsymbol{a}(M')\,\boldsymbol{r}(M)\,dt + \text{const}, \tag{5.4}$$

где $\boldsymbol{r}(M) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, точка $M'(tx, ty, tz)$ пробегает отрезок M_0M при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2.128. Доказать, что в потенциальном векторном поле $\boldsymbol{a}(M)$ линейный интеграл по пути M_0M не зависит от формы пути, а циркуляция по любому контуру равна нулю.

Решение. В потенциальном поле выполнено (5.1), поэтому

$$W = \int_{M_0M} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_{M_0M} \operatorname{grad}\varphi\,d\boldsymbol{r}.$$

Но

$$\operatorname{grad}\varphi\,d\boldsymbol{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi,$$

поэтому

$$W = \int_{M_0M} d\varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0),$$

так что результат не зависит от выбора пути M_0M. Если путь интегрирования замкнут, то начальная и конечная точки совпадают, т. е. $M = M_0$, и из полученной формулы получаем

$$Ц = \oint_{M_0M_0} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \varphi(M_0) - \varphi(M_0) = 0.$$

2.129. Показать, что поле магнитной напряженности $\boldsymbol{H}(M)$, рассмотренное в задаче **2.51**, является безвихревым, но не потенциальным во всей области своего задания.

Указание. Сравнить поле $\boldsymbol{H}(M)$ с градиентом функции $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, представляющей угол поворота вокруг оси Oz.

2.131. Установить потенциальность поля

$$\boldsymbol{a}(M)=(yz-2x)\,\boldsymbol{i}+(xz-2y)\,\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$$

и найти его потенциал.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$ (проверьте), т. е. $\boldsymbol{a}$ — безвихревое поле. Задано оно во всем пространстве, которое, конечно, односвязно. Поэтому поле $\boldsymbol{a}$ потенциальное. Найдем его потенциал по формуле (5.3), выбирая в качестве M_0 начало координат, т. е. $x_0=y_0=z_0=0$. Так как

$$P(x,\ y_0,\ z_0)=-2x,\quad Q(x,\ y,\ z_0)=-2y,\quad R(x,\ y,\ z)=xy,$$

то

$$\varphi=\int_0^x -2x\,dx+\int_0^y -2y\,dy+\int_0^z xy\,dz+\text{const}=$$

$$=-(x^2+y^2)+xyz+\text{const}.$$

Для сравнения подсчитаем φ также по формуле (5.4). Найдем сначала подынтегральную функцию

$$\boldsymbol{a}(M')\,\boldsymbol{r}(M)=(t^2yz-2tx)\,x+(t^2xz-2ty)\,y+t^2xyz=$$

$$=3t^2xyz-2t\,(x^2+y^2).$$

Поэтому

$$\varphi=\int_0^1 [3t^2xyz-2t\,(x^2+y^2)]\,dt+\text{const}=$$

$$=t^3\Big|_0^1 xyz-t^2\Big|_0^1(x^2+y^2)+\text{const}=xyz-(x^2+y^2)+\text{const}$$

2.132. Убедиться, что всякое центрально-симметрическое поле $\boldsymbol{a}(M)=f(r)\,\boldsymbol{r}$ потенциальное и найти формулу для вычисления потенциала такого поля.

2.133. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ образовано зарядами, находящимися в точках $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s\ (\overrightarrow{OA_i}=\boldsymbol{r}_i)$. Найти потенциал поля.

2.134. Доказать, что необходимым и достаточным условием потенциальности плоского поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}(x,\ y)\,\boldsymbol{i}+Q(x,\ y)\,\boldsymbol{j}$ в односвязной области является равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Доказать, что следующие векторные поля являются потенциальными и найти их потенциалы:

2.135. $\boldsymbol{a} = 6x^2\boldsymbol{i} + 3\cos(3x+2z)\boldsymbol{j} + \cos(3y+2z)\boldsymbol{k}$,

2.136. $\boldsymbol{a} = (y+z)\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$,

2.137. $\boldsymbol{a} = xy(3x-4y)\boldsymbol{i} + x^2(x-4y)\boldsymbol{j} + 3xz^2\boldsymbol{k}$,

2.138. $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{\sqrt{\rho^2+4}}$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,

2.139. $\boldsymbol{a} = -2[r\cos 2\theta \boldsymbol{e}_r - 2\sin 2\theta \boldsymbol{e}_\theta]$,

2.140. $\boldsymbol{a} = (2\rho + \sin\varphi)\boldsymbol{e}_\rho + \cos\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{e}_z$.

2. Соленоидальные векторные поля. Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется *соленоидальным* в области V (см. § 3, п. 1), если в этой области

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) = 0. \tag{5.5}$$

Соленоидальное поле обладает *векторным потенциалом* $\boldsymbol{H}(M)$, удовлетворяющим условию

$$\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{rot}\boldsymbol{H}(M). \tag{5.6}$$

Векторный потенциал определяется с точностью до прибавления градиента произвольного скалярного поля. В звездной области с центром в начале координат O (в самой точке O векторное поле может быть и не определено) одно из значений векторного потенциала получается по формуле

$$\boldsymbol{H}(M) = \int_0^1 [\boldsymbol{a}(M')\,\boldsymbol{r}(M)]\,t\,dt, \tag{5.7}$$

где $M'(tx, ty, tz)$ пробегает отрезок OM при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\boldsymbol{r}(M) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $M(x, y, z)$.

2.141. Доказать следующее свойство соленоидального в области V поля. Поток соленоидального поля $\boldsymbol{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность σ, обладающую тем свойством, что V_σ целиком входит в V, равен нулю.

Решение. Из условия следует, что к V_σ можно применить теорему Остроградского:

$$\Pi = \iint_\sigma \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iiint_{V_\sigma} \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dv = 0,$$

так как $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$.

2.142. Доказать, что поток соленоидального поля $\boldsymbol{a}(M)$ через любое сечение векторной трубки (см. § 3, п. 1) есть величина постоянная.

Указание. Использовать свойство задачи **2.141** и ортогональность $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{n}(M)$ на боковой поверхности трубки.

2.143. Доказать соленоидальность векторного поля $\boldsymbol{a}(M) = 2xyz\boldsymbol{i} - y(yz+1)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ и найти его векторный потенциал.

Решение. Дивергенция данного поля — $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 2yz - 2yz - 1 + 1 = 0$, и поэтому оно соленоидальное. Сначала вычислим

векторное произведение векторов

$$[\boldsymbol{a}(M')\,\boldsymbol{r}(M)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2xyzt^3 & -yt(yzt^2+1) & zt \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= -yzt(yzt^2+2)\,\boldsymbol{i} + xzt\,(1-2yzt^2)\,\boldsymbol{j} + xyt(1+3yzt^2)\,\boldsymbol{k}.$$

Найдем векторный потенциал $\boldsymbol{H}(M)$ этого поля по формуле (5.7)

$$\boldsymbol{H}(M) = \int_0^1 [-yz(yzt^4+2t^2)\,\boldsymbol{i} + xz(t^2-2yzt^4)\,\boldsymbol{j} + xy(3yzt^4+t^2)\,\boldsymbol{k}]\,dt =$$

$$= \frac{1}{15}[-yz(3yz+10)\,\boldsymbol{i} + xz(5-6yz)\,\boldsymbol{j} + xy(9yz+5)\,\boldsymbol{k}].$$

2.144. Найти векторный потенциал поля магнитной индукции

$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{2J\mu_0}{\rho^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}),$$

где J — сила тока, μ_0 — магнитная постоянная, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние точки $M(x, y, z)$ до провода (оси Oz).

Решение. Было установлено, что данное поле соленоидальное (см. **2.68**).

Вычислим векторное произведение

$$[\boldsymbol{a}(M')\,\boldsymbol{r}(M)] =$$

$$= 2\mu_0 J \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{yt}{\rho^2 t^2} & \frac{xt}{\rho^2 t^2} & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{2\mu_0 J}{\rho^2 t}(xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - \rho^2\boldsymbol{k}).$$

Тогда векторный потенциал $\boldsymbol{H}(M)$ данного магнитного поля вычисляется по формуле (5.7)

$$\boldsymbol{H}(M) = \int_0^1 [a(M')\,\boldsymbol{r}(M)]\,t\,dt = \int_0^1 \frac{2\mu_0 J}{\rho^2 t}(xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - \rho^2\boldsymbol{k})\,t\,dt =$$

$$= \frac{2\mu_0 J}{\rho^2}(xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - \rho^2\boldsymbol{k}), \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

2.145. Найти векторный потенциал следующих векторных полей:

а) $\boldsymbol{a}(M) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$,

б) $\boldsymbol{a}(M) = x^2y\boldsymbol{i} + 2xy^2\boldsymbol{j} + 2xyz\boldsymbol{k}$.

2.146. Дано векторное поле $\boldsymbol{a}(M) = (\alpha-\beta)\,x\boldsymbol{i} + (\gamma-\alpha)\,y\boldsymbol{j} + (\beta-\gamma)\,z\boldsymbol{k}$; показать соленоидальность этого поля при любых значениях постоянных α, β, γ и найти векторный потенциал $\boldsymbol{H}(M)$.

3. Гармонические поля. Скалярное поле $\varphi(M)$ называется *гармоническим*, если оно удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(M)=0 \tag{5.8}$$

Векторное поле $a=\operatorname{grad}\varphi(M)$, где φ — гармоническое поле, также называется гармоническим. *Гармоническое* векторное поле одновременно является *потенциальным и соленоидальным.*

Скалярное поле $\varphi(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона в области V, если в этой области

$$\Delta\varphi(M)=f(M), \tag{5.9}$$

где $f(M)$ — заданная в V функция.

2.147. Найти общий вид гармонического цилиндрического поля $\Phi=\Phi(\rho)$.

Решение. По формуле (3.23) (см. 2.91) получим

$$\Delta\Phi(\rho)=\frac{1}{\rho}\Phi'(\rho)+\Phi''(\rho).$$

Приравнивая $\Delta\Phi$ к нулю и решая получившееся уравнение, находим общий вид гармонического поля $\Phi(\rho)$:

$$\Phi(\rho)=C_1\ln\rho+C_2 \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

2.148. Показать, что общий вид гармонического сферического поля $\Phi=\Phi(r)$ следующий:

$$\Phi(r)=\frac{C_1}{r}+C_2 \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

2.149. Найти все решения уравнения Пуассона $\Delta\Phi(r)=r^{n-1}$.

2.150. Найти общий вид однородного гармонического многочлена 2-й степени от x, y, z.

2.151. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta\Phi=0$ в сферической системе координат, если $\Phi=\Phi(\varphi)$.

2.152. Найти общий вид гармонического скалярного поля $\Phi(M)$, зависящего только от координаты θ в сферической системе координат.

2.153. Вычислить $\Delta(r^m)$.

2.154. Найти общий вид однородного гармонического полинома второй и третьей степени от x и y.

2.155. Найти все решения уравнения Пуассона:

а) $\Delta\Phi(M)=z^{n-1}$, зависящие только от z; рассмотреть случай, когда $n=1$,

б) $\Delta\Phi(M)=a=\text{const}$, зависящие только от расстояния r.

4. Формулы Грина. Если $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ — дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные поля в области V, σ — замкнутая поверхность, ограничивающая объем v, а $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ — производные данные полей по нормали n к поверхности σ (нормальные производные), то имеют место следующие формулы Грина:

первая формула:

$$\iiint\limits_v (\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\,\nabla\varphi)\,dv = \oiint\limits_\sigma \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma; \tag{5.10}$$

вторая формула:

$$\iiint\limits_v (\psi\Delta\varphi - \varphi\,\Delta\psi)\,dv = \oiint\limits_\sigma \left(\psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{5.11}$$

В частности, при $\psi(M) = 1$

$$\iiint\limits_v \Delta\varphi\,dv = \oiint\limits_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma. \tag{5.12}$$

2.156. Вычислить поверхностный интеграл $J = \oiint\limits_\sigma \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$ по замкнутой поверхности σ:

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\},$$

если $\psi(M) = yz$, $\varphi(M) = xy + 1$.

Решение. По первой формуле Грина (5.10) имеем:

$$J = \iiint\limits_v (\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\,\nabla\varphi)\,dv,$$

где v — $\frac{1}{8}$ часть шара радиуса R, расположенная в 1 октанте.

Так как $\Delta\varphi = 0$, $\nabla\psi\nabla\varphi = xz$, то

$$J = \iiint\limits_v xz\,dv,$$

или, введя сферические координаты, получим

$$J = \iiint\limits_v r^2 \sin\theta\cos\varphi\cos\theta\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R r^4\,dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{R^5}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{R^5}{15}.$$

2.157. С помощью формулы Грина вычислить поверхностный интеграл

$$J = \oiint\limits_\sigma \left(\psi\,\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma$$

по полной поверхности цилиндра радиуса R и высоты H:

$$0 \leqslant z \leqslant H,\quad x^2 + y^2 = R^2,$$

если $\Phi(M) = \rho^2 + z$ $\psi(M) = \varphi + z^2$.

Решение. По формуле (5.11) имеем $J=\iiint(\psi\Delta\Phi-\Phi\Delta\psi)dv$, где интеграл берется по объему v данного цилиндра. Теперь вычислим $\Delta\psi$ и $\Delta\Phi$:

$$\Delta\psi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=\frac{1}{\rho}2\rho=2.$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+0+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]=\frac{1}{\rho}[4\rho+0+0]=4.\right.$$

Поэтому

$$J=\iiint[4(z^2+\psi)-2(z+\rho^2)]\,dv.$$

Так как

$$dv=\rho d\rho d\psi dz,$$

то

$$J=2\int_0^H dz\int_0^R\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}(2z^2-z+2\varphi-\rho^2)\,d\varphi=$$

$$=4\pi\int_0^H dz\int_0^R(2z^2\cdot\rho-z\rho+2\pi\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=2\pi R^2\int_0^H\left(2z^2-z+2\pi-\frac{R^2}{2}\right)dz=2\pi R^2H\left(\frac{2}{3}H^2-\frac{1}{2}H+2\pi-\frac{R^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2H(4H^2-3H-3R^2+12\pi).$$

2.158. Вычислить поверхностный интеграл $J=\iint\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$ по сфере радиуса R, если $\varphi(M)=\frac{1}{r}$.

Решение. I способ. Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=\frac{1}{r^2},$$

а на данной сфере

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{r=R}=\frac{1}{R^2}\text{ и }d\sigma=R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

то

$$J=\iint\frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{R^2}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=2\pi(-\cos\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

II способ. Как уже было установлено (см. задачу **2.148**), функция $\varphi(r)=\frac{1}{r}$ гармоническая ($\Delta\varphi=0$), и поэтому по формуле (5.12)

$$\oiint_{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma=\iiint\Delta\varphi dv=0.$$

2.159. Проверить справедливость формулы (5.12) для функции $\varphi(M)=xy-z^2$ в области V, являющейся шаром радиуса R с центром в начале 0.

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Комплексная плоскость. Напомним, что *комплексными* называются числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а $i^2 = -1$. Число x называется *действительной частью* комплексного числа z, а число y — коэффициент при i — *мнимой частью*. Приняты следующие обозначения действительной и мнимой частей:

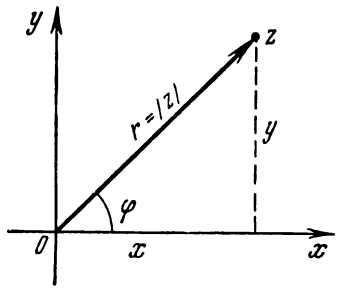


Рис. 64

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны отдельно их действительные и мнимые части. Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к числу $z = x + iy$. У сопряженных чисел равны действительные части, а мнимые отличаются только знаком.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой на плоскости xOy, имеющей координаты (x, y); при этом на оси Ox изображаются действительные числа $z = x$, а на оси Oy — чисто мнимые числа $z = iy$. Можно также сопоставить числу z вектор, направленный из начала O в точку z (рис. 64). Длина r этого вектора, т. е. расстояние от начала координат до точки z, называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $r = |z|$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ, образованный радиусом-вектором Oz с положительным направлением действительной оси Ox, называется *аргументом* числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Величина угла $\varphi = \operatorname{Arg} z$ определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Фиксируя один период изменения угла φ в пределах $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ (или $0 \leqslant \varphi < 2\pi$), выделяют *главную ветвь* аргумента, обозначаемую $\arg z$, так что

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тригонометрическая и *показательная* формы комплексного числа имеют вид

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Иногда рассматривают расширенную комплексную плоскость, добавляя к точкам $z = x + iy$ еще одну «точку» $z = \infty$.

3.1. Определить и начертить в комплексной плоскости линии, заданные уравнениями:

а) $|z|=1$, б) $|z-2+i|=3$.

Решение. а) По определению $|z|$ — расстояние от начала координат до точки z. Для данного множества точек это расстояние должно быть одним и тем же, равным 1. Поэтому искомая линия является окружностью с центром в начале координат и радиусом 1.

б) Так как $|z_1-z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2, то из равенства $|z-(2-i)|=3$ следует, что точки данной линии удалены от точки $2-i$ на расстояние, равное 3, т. е. данная линия — окружность с центром в точке $2-i$ радиуса 3 (рис. 65).

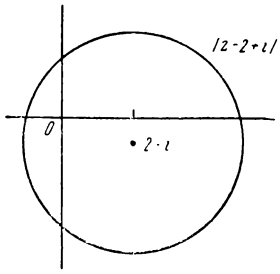


Рис. 65

3.2. Определить геометрические места точек, для которых

а) $\operatorname{Re} z=5$,

б) $\operatorname{Re}(z^2)=a^2$,

в) $\arg z=\frac{\pi}{3}$.

Решение. а) По определению $\operatorname{Re} z=x$, поэтому уравнение $\operatorname{Re} z=5$ можно переписать так: $x=5$. Это уравнение определяет прямую, параллельную оси Oy.

б) $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2-i2xy$. Отсюда $\operatorname{Re}(z^2)=x^2-y^2$. Следовательно, условие $\operatorname{Re}(z^2)=a^2$ равносильно уравнению $x^2-y^2=a^2$, которое, как известно, определяет равностороннюю гиперболу (рис 66).

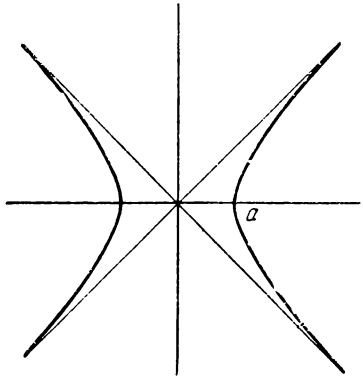


Рис. 66

в) Уравнению $\arg z=\frac{\pi}{3}$ удовлетворяют точки, расположенные на луче, выходящем из начала координат и образующем с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$.

В задачах **3.3** и **3.4** определить множества точек, удовлетворяющих следующим неравенствам, и построить их на плоскости.

3.3. 1) $|z-i|<3$, 2) $|z-i|\geqslant 1$, 3) $1\leqslant|z-1-i|\leqslant 3$.

Решение. 1) Неравенство $|z-i|<3$ означает, что расстояние от точки i до точки z меньше трех. Этому условию удовлетворяют точки круга с центром в точке i радиуса 3 (рис. 67) за исключением его границы, уравнение которой $|z-i|=3$.

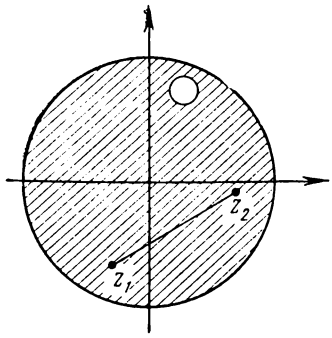


Рис. 67

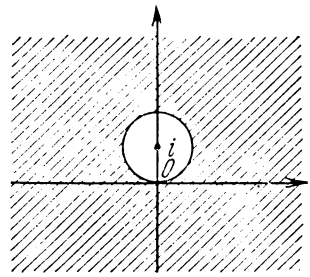


Рис. 68

2) Неравенство $|z-i|\geqslant 1$ означает, что расстояние от точки i до точек z должно быть не меньше 1. Поэтому искомое множество лежит вне круга с центром в точке радиуса 1 (рис. 68). Окружность $|z-i|=1$ принадлежит данному множеству, так как знак равенства по условию возможен.

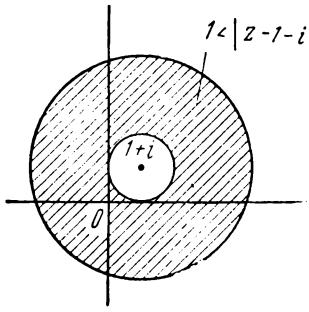


Рис. 69

3) Искомое множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям:

$$|z-1-i|\geqslant 1 \text{ и } |z-1-i|\leqslant 3.$$

Первое из этих условий определяет внешность единичного круга с центром в точке $1+i$, второе — круг радиуса 3 с центром в той же точке $1+i$ (рис. 69). Поэтому данное множество — кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиусов 1 и 3 с центром в точке $1+i$. Границы кольца включаются в это множество.

3.4.

$$1)\ \operatorname{Re} z<2,$$

$$2)\ -\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}.$$

Решение. 1. Так как $\operatorname{Re} z=x$, то точки искомого множества должны удовлетворять неравенству $x<2$. Это множество — левая полуплоскость (рис. 70), граница множества $x=2$ ему не принадлежит.

2. Для точек искомого множества значения аргументов заключены в пределах $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$. Поэтому это множество — угол, огра-

ниченный лучами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис. 71); сами лучи в данное множество не входят.

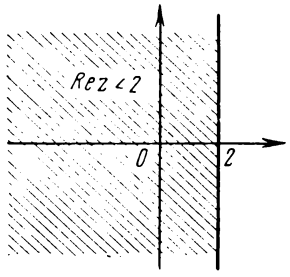


Рис. 70

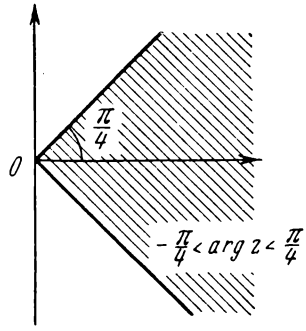


Рис. 71

3.5. Начертить в комплексной плоскости линии, точки которых удовлетворяют уравнениям:

а) $|z| = 8$,

б) $|z - 5 + 3i| = 2$,

в) $|z + i| = 5$,

г) $|z + 1| + |z - 2| = 5$,

д) $\operatorname{Re} z = 2$,

е) $\operatorname{Im} z = -3$,

ж) $\arg z = -\frac{\pi}{4}$,

з) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.

3.6. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z| > 2$, б) $|z + 1 + i| < 1$,

в) $2 < |z - 1 + 2i| < 4$, г) $|z - 1| + |z - 3| < 3$,

д) $\operatorname{Re} z < -1$, е) $\operatorname{Im} z < 1$,

ж) $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 5$, з) $0 < \operatorname{Im} z < 1$, и) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

2. Элементарные функции комплексного переменного. Если каждому z из области D соответствует одно или несколько значений w, то в области D определена *функция комплексного переменного*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительная и мнимая части функции $f(z)$. Если каждому z отвечает одно значение w, то функция называется *однозначной*, в противном случае — *многозначной*.

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами:

$$z^n = (x+iy)^n \quad (n - \text{целое}), \tag{1.1}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1.2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.3}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{1.4}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{1.5}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{1.6}$$

Функции e^z, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ имеют основной период $2\pi i$ *

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \operatorname{ch}(z+2\pi i) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh}(z+2\pi i) = \operatorname{sh} z.$$

Функции $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ — период πi:

$$\operatorname{th}(z+\pi i) = \operatorname{th} z, \quad \operatorname{cth}(z+\pi i) = \operatorname{cth} z.$$

Основной период функций $\cos z$ и $\sin z$ — 2π, а функций $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — π:

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \quad \operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z,$$
$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \operatorname{ctg}(z+\pi) = \operatorname{ctg} z.$$

Натуральный логарифм числа z определяется как обратная функция к экспоненте $e^{\operatorname{Ln} z} = z$, поэтому

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \tag{1.7}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Главное значение логарифма $\ln z = \ln r + i\varphi$. С помощью логарифмической функции определяются для любых комплексных чисел α и $a \neq 0$ показательная и степенная функции:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}; \quad z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \tag{1.8}$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Arc\,sin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2}); \\ &\operatorname{Arc\,cos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}); \\ &\operatorname{Arc\,tg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}, \quad z \neq \pm i. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Обратные гиперболические функции:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2+1}), \\ &\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}), \\ &\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad z \neq \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

---

* Ясно, что периодом будут служить и числа $2\pi ki$ ($k = 1, 2, \ldots$). Основной период получается при $k = 1$.

Логарифм, обратные тригонометрические и гиперболические функции являются бесконечнозначными функциями. Примером n-значной функции является корень n-й степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right] \qquad (1.11)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

3.7. Вычислить значение $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$, записать его модуль, действительную и мнимую части.

Решение. По формуле (1.2) находим

$$e^{-2+\frac{\pi}{3}i} = e^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\left(e^{-2+\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{1}{2e^2};\quad \operatorname{Im}\left(e^{-2+\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2e^2}.$$

Заметим, что модуль экспоненты (1.2) равен e^x, так как

$$|e^z| = \sqrt{(e^x\cos y)^2 + (e^x\sin y)^2} = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

В данном примере

$$\left|e^{-2+\frac{\pi}{3}i}\right| = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

3.8. Вычислить значения функций:

а) $\operatorname{Ln} i$; б) $\cos(2i+i)$; в) $\operatorname{ch}(1+2i)$; г) i^i.

Решение. а) Так как $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то по формуле (1.7) получаем

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i2\pi k = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

б) Применяя формулы (1.3) и (1.2), находим

$$\cos(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} + e^{-i(2+i)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2i-1} + e^{-2i+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2) + e(\cos 2 - i\sin 2)\right] = \frac{1}{2}(e + e^{-1})\cos 2 -$$

$$- i\frac{1}{2}(e - e^{-1})\sin 2 = \operatorname{ch} 1\cos 2 - i\operatorname{sh} 2 \approx -0{,}65 - i1{,}07.$$

в) По формулам (1.4) и (1.2) получаем

$$\operatorname{ch}(1+2i) = \frac{1}{2}\left[e^{1+2i} + e^{-(1+2i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e(\cos 2 + i\sin 2) +\right.$$

$$\left. + e^{-1}(\cos 2 - i\sin 2)\right] = \frac{1}{2}(e + e^{-1})\cos 2 + i\frac{1}{2}(e - e^{-1})\sin 2 =$$

$$= \operatorname{ch} 1\cos 2 + i\operatorname{sh} 1\sin 2 \approx -0{,}65 + i1{,}07.$$

г) Полагая в формуле (1.8) $a=i$, $z=i$, находим

$$i^i = e^{i\operatorname{Ln} i} = e^{i\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots.$$

3.9. Вычислить значения функций: а) $\operatorname{Arcsin} i$, б) $\operatorname{Arch} 2$.

Решение. а) В формуле (1.9) положим $z=i$. Мы получим

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\operatorname{Ln}\left(i^2 \pm \sqrt{1-i^2}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(-1 \pm \sqrt{2}\right).$$

Числа $-1+\sqrt{2}$ и $-1-\sqrt{2}$ — действительные, причем первое положительно, а второе отрицательное. Поэтому $|-1+\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$, $|-1-\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$, а $\arg\left(-1+\sqrt{2}\right)=0$, $\arg\left(-1-\sqrt{2}\right)=\pi$.

Подставляя эти значения в формулу (1.7), мы получаем две последовательности значений $\operatorname{Arcsin} i$:

$$-i\operatorname{Ln}\left(-1+\sqrt{2}\right) = -i\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+i2\pi k\right) = 2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$-i\operatorname{Ln}\left(-1-\sqrt{2}\right) = -i\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+i\pi+i2\pi k\right) = (2k+1)\pi - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right),$$

$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

б) Для вычисления значения $\operatorname{Arch} 2$ возьмем формулу (1.10) и положим в ней $z=2$. Тогда

$$\operatorname{Arch} 2 = \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{4-1}\right) = \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Оба числа $2\pm\sqrt{3}$ положительны, поэтому $|2\pm\sqrt{3}| = 2\pm\sqrt{3}$ и $\arg\left(2\pm\sqrt{3}\right)=0$. Применяя формулу (2.7), находим

$$\operatorname{Arch} 2 = \ln\left(2\pm\sqrt{3}\right) + i2\pi k,\qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

3.10. Найти корни уравнения $z^8 - 2\sqrt{3}\,z^4 + 4 = 0$ и построить их на комплексной плоскости.

Решение. Обозначим $z^4=t$, тогда данное уравнение превратится в квадратное уравнение относительно t:

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 4 = 0.$$

Его корни $t=\sqrt{3}\pm i$, следовательно, корни z исходного уравнения $\sqrt[4]{\sqrt{3}\pm i}$. Числа $\sqrt{3}+i$ и $\sqrt{3}-i$ комплексно сопряженные, поэтому у них модули одинаковые, а аргументы отличаются знаком:

$$\sqrt{3}\pm i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{6}}.$$

Извлечем корни четвертой степени, используя формулу (1.11):

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}\pm i}=\sqrt[4]{2}e^{\pm i\frac{\pi}{24}+i\frac{2\pi k}{4}}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Заметим, что все корни $z_1, z_2, \ldots, z_8$ имеют равные модули: $|z_k|=\sqrt[4]{2}$, $k=1, \ldots, 8$. Отсюда следует, что все они лежат на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[4]{2}$. Аргументы этих чисел $\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$, т. е. углы $\pm\frac{\pi}{24}$ поворачиваются трижды на 90°. Используем это замечание для построения корней. На окружности радиуса $\sqrt[4]{2}$ построим сначала точки $z_1=e^{i\frac{\pi}{24}}$ и $z_3=e^{-i\frac{\pi}{24}}$, впишем затем два квадрата в окружность $|z|=\sqrt[4]{2}$ так, чтобы точки z_1 и z_3 лежали в вершинах: z_1 — первого, а z_3 — второго квадрата. Остальные 6 вершин будут лежать в точках $z_2, z_3, z_4, z_6, z_7, z_8$ (рис. 72).

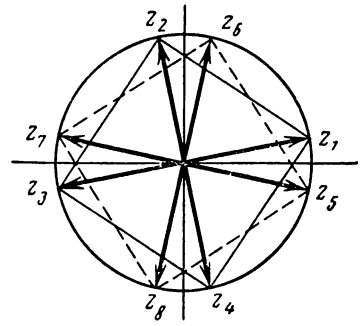


Рис. 72

3.11. Вычислить действительную и мнимую части функций e^{2z+3i} и $\sin(iz-1)$.

Решение. Преобразуем сначала показатель функции e^{2z+3i}. Полагая $z=x+iy$, мы получаем

$$2z+3i=2(x+iy)+3i=2x+i(2y+3).$$

Следовательно,

$$e^{2z+3i}=e^{2x+i(2y+3)}=e^{2x}\cos(2y+3)+ie^{2x}\sin(2y+3),$$

откуда находим

$$\operatorname{Re}e^{2z+3i}=e^{2x}\cos(2y+3);\quad \operatorname{Im}e^{2z+3i}=e^{2x}\sin(2y+3).$$

Так как

$$iz-1=i(x+iy)-1=-(y+1)+ix,$$

то, применяя формулу (1.3), получаем

$$\sin(iz-1)=\frac{1}{2i}\left[e^{[-(y+1)+ix]i}-e^{-[-(y+1)+ix]i}\right]=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[e^{-x-i(y+1)}-e^{x+i(y+1)}\right]=\frac{i}{2}\left[e^{-x}(\cos(y+1)-i\sin(y+1))-\right.$$

$$\left.-e^{x}(\cos(y+1)+\sin(y+1))\right]=-\frac{i}{2}\cos(y+1)(e^{-x}-e^{x})-$$

$$-\frac{1}{2}\sin(y+1)(e^{-x}+e^{x})=i\cos(y+1)\operatorname{sh}x-\sin(y+1)\operatorname{ch}x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\sin(iz-1)=-\operatorname{ch}x\sin(y+1),\quad \operatorname{Im}\sin(iz-1)=\operatorname{sh}x\cos(y+1).$$

3.12. Найти корни уравнения

$$\sin z=2,$$

лежащие в круге $|z|<5$, и построить их на комплексной плоскости.

Решение. По определению обратной тригонометрической функции $\operatorname{Arcsin}z$ мы имеем

$$z=\operatorname{Arcsin}2=-i\operatorname{Ln}\left(2i\pm\sqrt{1-4}\right)=-i\operatorname{Ln}\left[(2\pm\sqrt{3})i\right].$$

Таким образом, существуют две последовательности решений: первая

$$z_k^{(1)}=i\operatorname{Ln}\left[(2+\sqrt{3})i\right]=-i\left[\ln(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}i+i2\pi k\right]=$$

$$=\frac{4k+1}{2}\pi-i\ln(2+\sqrt{3}),\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

и вторая

$$z_k^{(2)}=-i\operatorname{Ln}\left[(2-\sqrt{3})i\right]=-i\left[\ln(2-\sqrt{3})+i\frac{\pi}{2}+i2\pi k\right]=$$

$$=\frac{4k+1}{2}\pi-i\ln(2-\sqrt{3}),\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Нас интересуют только те корни, которые лежат внутри круга $|z|<5$. Определим, для каких значений k это условие выполнено:

$$|z_k^{(1)}|^2=\left(\frac{4k+1}{2}\right)^2\pi^2+\ln^2(2+\sqrt{3})\leqslant 25.$$

Так как $\ln^2(2+\sqrt{3})>0$, то $\left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi^2\leqslant 25$, поэтому имеем

$$\frac{|4k+1|}{2}\leqslant\frac{5}{\pi},\quad |4k+1|\leqslant\frac{10}{\pi}\leqslant 4,\quad -4\leqslant 4k+1\leqslant 4,$$

$$-\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant\frac{3}{4},$$

т. е. для первой серии корней это значения

$$k=-1,\ 0.$$

Таким же образом находим значения k для второй серии:

$$\frac{|4k+1|}{2}\leqslant\frac{5}{\pi},\quad -\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant\frac{3}{4},\quad k=-1,\ 0.$$

Числа $z_k^{(1)}$ имеют одинаковые мнимые части $\operatorname{Im}z_k^{(1)}=-\ln(2+\sqrt{3})$, поэтому они лежат на одной прямой, параллельной действительной оси и отстоящей от нее на расстояние $\ln(2+\sqrt{3})$.

Действительные части чисел $z_k^{(1)}$ и $z_k^{(2)}$ при одном k совпадают, а мнимые отличаются знаком

$$-\ln(2-\sqrt{3})=\ln\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\ln(2+\sqrt{3}).$$

Числа $z_k^{(1)}$ и $z_k^{(2)}$ — комплексно сопряженные. Все $z_k^{(2)}$ располагаются на второй прямой, параллельной действительной оси (рис. 73).

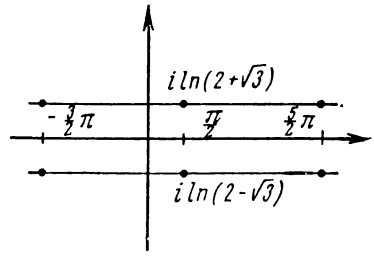


Рис. 73

3.13. Вычислить значения показательной функции:

$$e^{\frac{\pi}{2}i},\quad e^{-3+2i},\quad e^{2+3i},\quad e^{-8-7i}.$$

Определить их действительные и мнимые части.

3.14. Вычислить значения тригонометрических функций:

$$\sin(1-3i),\quad \cos 3i.$$

Указать их действительные и мнимые части.

3.15. Вычислить значения гиперболических функций:

$$\operatorname{th}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{6}\right),\quad \operatorname{sh}(-1+5i),\quad \operatorname{th}\left(\ln 5-\frac{\pi i}{4}\right).$$

3.16. Найти значения функций:

$$\operatorname{Ln}(1+7i);\quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i};\quad (3+4i)^{i-2}.$$

3.17. Вычислить значения:

$$\operatorname{Arcsin}2;\ \operatorname{Arccos}i;\ \operatorname{Arth}(1-i).$$

3.18. Найти все значения корней и построить их на комплексной плоскости:

$$\sqrt[3]{1};\ \sqrt[3]{27i};\ \sqrt[5]{-2+2i};\ \sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}.$$

3.19. Решить уравнения:

а) $z^2+i=0$; б) $z^4-16=0$; в) $z^6-4z^3+8=0$.

3.20. Решить уравнения и построить их корни на комплексной плоскости:

а) $\sin z=i$, б) $\cos z=\frac{\sqrt{3}}{2}$, в) $\operatorname{sh} z=-1$; г) $\operatorname{ch} z=\frac{\pi}{2}i$,

д) $e^{z^2}=i$.

3.21. Вывести формулы:

$$\operatorname{sh} z=-i\sin iz;\quad \operatorname{ch} z=\cos iz;$$

$$\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz;\quad \operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz.$$

3.22. Доказать равенства:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;\ \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z;$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z;\ \operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

3.23. Определить действительные и мнимые части функций:

$$e^{3iz-1};\ \sin(3z+2);\ \cos(z-i);\ z^3 + 5z - 1.$$

3. Геометрический смысл комплексной функции. Функция $w = f(z)$ каждой точке z из области определения D на комплексной плоскости $\{z\}$ ставит в соответствие некоторую точку w комплексной плоскости $\{w\}$. Следовательно, геометрически $w = f(z)$ определяет *отображение* точек одной комплексной плоскости на другую. Иногда удобно считать, что плоскости $\{z\}$ и $\{w\}$ — это одна и та же комплексная плоскость, и тогда функция $w = f(z)$ перемещает точки этой плоскости из положения z в положение w. Говорят, что w — *образ* точки z, а точка z — *прообраз* точки w при отображении $w = f(z)$.

3.24. При отображении $w = z^2$ найти образы линий

$$x = a,\ y = b,\ y = kx,\ |z| = R.$$

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции w:

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

т. е.

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

Когда точка z пробегает линию $x = a$ (прямую, параллельную мнимой оси), то соответствующая точка w пробежит на своей плоскости uOv линию

$$u = a^2 - y^2,\ v = 2ay\ (-\infty < y < \infty),$$

или, исключая параметр y,

$$u = \frac{1}{4a^2}(4a^4 - v^2).$$

Это уравнение определяет на плоскости $uO'v$ параболу с вершиной в точке $(a^2, 0)$, направленную в отрицательную сторону оси $O'u$. Раствор параболы можно определить точками ее пересечения с осью $O'v$: при $u = 0$ $v = \pm 2a^2$. Пусть $a > 0$, тогда y и v имеют одинаковые знаки, так что если точка z движется по прямой $x = a$ снизу вверх, то ее образ w проходит параболу также в общем направлении снизу вверх (см. рис. 74). В случае $a < 0$ парабола останется прежней, но направление обхода на ней изменится на противоположное.

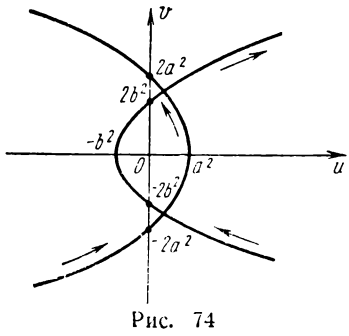


Рис. 74

Аналогично, прямая $y=b$, параллельная действительной оси на плоскости $\{z\}$, перейдет при отображении $w=z^2$ в параболу

$$u=x^2-b^2,\ v=2bx\ (-\infty<x<\infty),$$

или

$$u=\frac{1}{4b^2}(v^2-4b^2).$$

Эта парабола с направлением обхода при $b>0$ изображена на рис. 74.

Заметим, что если брать различные значения постоянных a и b, то на плоскости $\{z\}$ мы получим декартову координатную сетку, а на плоскости $\{w\}$ ей будет отвечать сетка направленных в противоположные стороны парабол. При этом с увеличением a, b раствор парабол увеличивается, а вершина отодвигается дальше от начала O'; при $a\to 0$ или $b\to 0$ соответствующие параболы сжимаются к отрицательной или положительной частям оси $O'u$.

Рассмотрим теперь прямую $y=kx$ на плоскости $\{z\}$. Она проходит через начало O под углом $\alpha=\operatorname{arctg} k$ к оси Ox. На плоскости $\{w\}$ соответствующая линия определяется уравнениями

$$u=(1-k^2)x^2;\ v=2kx^2,$$

или

$$v=\frac{2k}{1-k^2}u=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}u=\operatorname{tg}2\alpha\ (\text{при } k\neq\pm 1)\ \text{и}$$

$$u=0\ (\text{при } k=\pm 1).$$

Этими условиями определяется луч, исходящий из O' и образующий угол 2α с осью $O'u$.

Наконец, при $|z|=R$ $|w|=|z|^2=R^2$ так, что окружность радиуса R с центром в начале O перейдет снова в окружность, но радиуса R^2, в частности окружность единичного радиуса сохранит свой радиус.

Заметим, что из последних двух примеров вытекает, что полярная сетка на плоскости $\{z\}$ перейдет также в полярную сетку на $\{w\}$, произойдет только поворот лучей на удвоенный угол и расширение ($R>1$) или сжатие ($R<1$) окружностей.

3.25. Построить на комплексной плоскости $\{w\}$ образы точки $z_0=1+i$ при отображениях

а) $w=iz+1$,

б) $w=\frac{1}{z}$,

в) $w=e^{iz}$.

3.26. При отображении $w=\frac{z}{z-i}$ найти образы прямых:

а) $y=x$,

б) $y=x+1$

и окружностей

в) $|z|=1$,

г) $|z|=2$.

3.27. Найти образ декартовой координатной сетки плоскости при отображениях:

а) $w=e^z$,

б) $w=\cos z$,

в) $w=\operatorname{ch} z$.

3.28. Точка z движется от начала координат в положительную сторону мнимой оси. Что происходит при этом с точкой $w=\sin z$ и ее модулем?

§ 2. Дифференцирование функций комплексного переменного

1. Производная. Производная функции $w=f(z)$ определяется обычным образом:

$$w'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{2.1}$$

Все свойства и правила дифференцирования действительного анализа переносятся и на комплексный случай. В частности, сохраняется свойство линейности дифференцирования, правила дифференцирования произведения, дроби и сложной функции. Важно при этом отметить, что понятие предела, а вследствие этого и понятие производной применимо только к однозначным функциям $w=f(z)$. Поэтому если понадобится дифференцировать многозначную функцию, то предварительно следует выделить ту или иную однозначную ее ветвь и вести разговор именно об этой ветви.

Все рассмотренные выше основные элементарные (однозначные) функции дифференцируемы в области определения, причем имеют место формулы:

$$(z^n)'=nz^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.2}$$

$$(e^z)'=e^z. \tag{2.3}$$

$$(\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z. \tag{2.4}$$

$$(\operatorname{sh} z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z. \tag{2.5}$$

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}. \tag{2.6}$$

3.29. Исходя из определения производной, найти производную функции

$$z^2-2z+3.$$

Решение. Дадим z приращение Δz, тогда

$$f(z+\Delta z)=(z+\Delta z)^2-2(z+\Delta z)+3=z^2-2z+3+$$
$$+(2z-2)\Delta z+(\Delta z)^2.$$

По определению производной имеем

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(2z-2)\,\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=2z-2.$$

Мы видим, что производная функции z^2-2z+3 существует в каждой точке плоскости и равна $2z-2$.

3.30. Показать, что функция e^{2iz+1} дифференцируема при любом z. Найти ее производную.

Решение. Так как e^z и $2iz+1$ дифференцируемые функции при любом z, то дифференцируема и сложная функция, составленная из них, причем

$$(e^{2iz+1})' = e^{2iz+1}(2iz+1)' = 2ie^{2iz+1}.$$

3.31. Показать, что

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}; \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}; \quad (\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z};$$

$$(\operatorname{cth} z)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}.$$

Указание. Использовать правило дифференцирования дроби и формулы (2.4) и (2.5).

3.32. Доказать, что

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

дифференцируема при всех значениях z, кроме $z = -\frac{d}{c}$. Найти w'.

3.33. Установить формулу (2.2), применяя определение производной.

3.34. Вывести формулы (2.4) и (2.5) из (2.3).

2. Регулярные функции. *Теорема Коши-Римана.* Для того чтобы функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.7}$$

Условия (2.7) называются условиями Коши-Римана. При их выполнении

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Однозначная функция, дифференцируемая в каждой точке области D, называется *регулярной* в этой области.

3.35. Используя условия Коши-Римана, доказать регулярность функции e^z на всей плоскости, получить формулу (2.2).

Решение. Из определения (1.2) вытекает, что для e^z

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Ясно, что эти функции дифференцируемы при любых значениях x и y. Условия (2.7), очевидно, также выполнены:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Значит, e^z дифференцируемая в любой точке z, т. е. регулярна на всей комплексной плоскости. По формуле (2.8)

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Тем самым формула (2.2) установлена.

3.36. Показать, что функция $w = \operatorname{Re} z$ не является регулярной ни в какой области.

Решение. Так как

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (x + iy) = x,$$

то для данной функции $u = x$, $v = 0$, и условие Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

нигде не выполняется.

3.37. Показать, что функция $w = \bar{z}$ не является регулярной ни в какой области.

3.38. Доказать, что функции $w = z^2$, $w = \sin z$, $w = \operatorname{ch} z$ удовлетворяют условиям Коши-Римана на всей комплексной плоскости. Получить для них производные по формулам (2.8).

3.39. Установить, что функции $w = |z|$, $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ не являются регулярными ни в какой области.

3. Связь регулярных функций с гармоническими. Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ регулярна в области D, тогда из условий Коши-Римана вытекает, что

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{2.9}$$

т. е. действительная и мнимая части регулярной в D функции $f(z)$ являются *гармоническими* в этой области (см. гл. II, § 5, п. 3).

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются *гармонически-сопряженными*. Они определяют регулярную функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, причем если одна из них задана, то вторая определяется из условий Коши-Римана с точностью до постоянного слагаемого.

Пусть дано гармоническое плоское векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u(x, y), \quad \Delta u = 0. \tag{2.10}$$

Определив гармонически-сопряженную функцию $v(x, y)$, мы получим комплексный потенциал $w = u + iv$ поля $\boldsymbol{a}$.

3.40. Найти регулярную функцию $w = f(z)$, для которой

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x + y, \quad f(0) = i.$$

Решение. Проверим сначала, что $u(x, y)$ гармоническая на всей плоскости функция:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 1 - 1 = 0.$$

Из условий Коши-Римана найдем теперь гармонически-сопряженную ей функцию $v(x, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 1.$$

Проинтегрируем первое уравнение по y, считая x постоянным. Мы получим

$$v(x, y) = (2x + 3)\, y + C(x).$$

Но в силу второго условия

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 1,$$

поэтому

$$2y + C'(x) = 2y - 1,$$

откуда находим $C'(x) = -1$, $C(x) = -x + C_0$, C_0 — постоянная. Таким образом,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 3x + y + i\,[(2x + 3)\, y - x + C_0] = \\ = z^2 + (3 - i)\, z + iC_0.$$

По условию задачи $f(0) = i$, следовательно, $C_0 = 1$, и мы имеем

$$f(z) = z^2 + (3 - i)\, z + i.$$

3.41. Гармоническое плоское векторное поле имеет комплексный потенциал $w = f(z)$. Указать смысл линий $\operatorname{Re} w = \text{const}$ и $\operatorname{Im} w = \text{const}$.

Решение. По определению комплексного потенциала $w = u(x, y) + iv(x, y)$ поле $\boldsymbol{a}$ имеет вид

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{j}.$$

Следовательно, линии $u(x, y) = \text{const}$ являются линиями уровня скалярного поля u, вектор же $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ в каждой точке $M(x, y)$ перпендикулярен проходящей через нее линии уровня (см. гл. II, § 2).

Вдоль линии $v(x, y) = \text{const}$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = 0.$$

Используя условия Коши-Римана, перепишем это равенство в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = 0$$

или

$$\frac{\frac{dx}{\partial u}}{\frac{\partial x}{}} = \frac{\frac{dy}{\partial u}}{\frac{\partial y}{}}.$$

Последнее означает, что линии $v = \text{const}$ являются векторными линиями (линиями тока) поля $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ (см. гл. II, § 3).

3.42. Электростатическое поле задано комплексным потенциалом $w = q \ln z$. Найти эквипотенциальные и силовые линии этого поля.

Решение. Так как по определению главной ветви логарифма

$$w = q \ln z = q \ln |z| + qi \arg z,$$

то эквипотенциальные линии определяются из уравнения (задача 3.41) $q \ln |z| = \text{const}$, откуда следует $|z| = \text{const}$. Это окружности с центром в начале координат O.

Силовые линии определяются условием $q \arg z = \text{const}$, т. е. $\arg z = \text{const}$. Это лучи, выходящие из точки O.

3.43. Найти регулярную функцию $f(z)$, если

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3y^2x + 2$, $f(0) = 2 + i$;

б) $\operatorname{Im} f(z) = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2(1 + i)$;

в) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 6 + i$ $(|z| > 0)$;

г) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$;

д) $\operatorname{Im} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$.

Указание. Проверить предварительно, что данные функции гармонические в области своего определения. Затем использовать условия Коши-Римана.

3.44. Дан комплексный потенциал w поля скоростей потока жидкости. Найти эквипотенциальные линии и линии тока этого поля.

а) $w = (1 + i) z^2$; б) $w = z + \frac{1}{z}$.

§ 3. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Отображение, осуществляемое регулярной функцией. Если функция $w = f(z)$ регулярна в области Q, то осуществляемое ей отображение обладает следующими свойствами:

1. Всякую область D из Q функция $w = f(z)$ переводит в область D' на плоскости $\{w\}$, причем граница области D отображается в границу области D' с сохранением обхода *.

2. Всякая непрерывная (соответственно, гладкая) кривая γ из области D отображается в непрерывную (соответственно, гладкую) кривую γ' в D'.

3. Пусть $w_0 = f(z_0)$ и кривые γ_1 и γ_2, выходящие из точки z_0, перешли в кривые γ_1' и γ_2', выходящие из w_0. Тогда угол между γ_1 и γ_2 в точке z_0

* Это значит, что если точка z движется по границе так, что область D остается слева, то точка $w(z)$ движется по границе области D' так, что D' тоже остается слева.

равен углу между γ_1' и γ_2' в точке w_0, причем относительно действительной оси этот угол повернулся на величину $\arg f'(z_0)$.

4. Пусть γ — кривая, соединяющая точки z_0 и z, под действием отображения $w=f(z)$ перешла в кривую γ', соединяющую соответствующие точки w_0 и w. Коэффициентом искажения длин в точке z_0 называется предел

$$k=\lim_{z\to z_0}\frac{\text{длина }\gamma'}{\text{длина }\gamma}.$$

Если $k>1$, то при переходе от z_0 к w_0 происходит растяжение длин, если $k<1$, то — сжатие. Для регулярной функции коэффициент $k=|f'(z_0)|$ и, следовательно, при $f'(z_0)\neq 0$ не зависит от направления исходной кривой γ.

Отображение, обладающее свойствами 3 и 4, называется *конформным*. Следовательно, регулярная функция, производная которой не обращается в нуль, осуществляет конформное отображение, причем модуль производной $f'(z_0)$ есть коэффициент искажения длин в точке z_0, а аргумент производной $f'(z_0)$ равен углу поворота лучей, выходящих из этой точки.

3.45. Найти угол поворота Θ лучей и коэффициент искажения длин k в точке $z_0=1+i$ под действием отображения $w=z^2$.

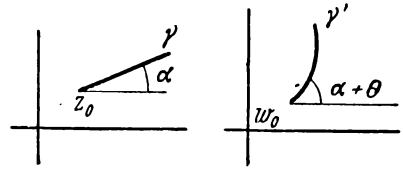


Рис. 75

Решение. Функция $w=z^2$ регулярная и $w'=2z$. Под действием этой функции точка z_0 перейдет в точку $w_0=(1+i)^2=2i$. Следовательно, по свойству 2 луч γ, выходящий из $z_0=1+i$, отобразится в некоторую кривую γ', исходящую из $w_0=2i$, причем относительно действительной оси γ' в точке w_0 повернется на угол (рис. 75)

$$\Theta=\arg w'(z_0)=\arg[2(1+i)]=\arg(2+2i)=\frac{\pi}{4}.$$

Коэффициент искажения длин при переходе от z_0 к w_0 равен по свойству 4:

$$k=|w'(z_0)|=|2+2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}.$$

Поскольку $k>1$, то под действием данного отображения происходит растяжение длин в точке z_0.

3.46. Какая часть плоскости сжимается и какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w=z^2+2z$?

Решение. Так как коэффициент искажения k равен $|f'(z)|$, то для тех точек, в которых происходит сжатие, должно выполняться условие $|2z+2|<1$, или $|z+1|<\frac{1}{2}$. Следовательно, при отображении внутренности круга $|z+1|<\frac{1}{2}$ происходит сжатие, а его внешности — растяжение.

3.47. В каких точках нарушается конформность отображения $w=z^3-6z^2+9z-3$?

Решение. Функция $w(z)$ регулярна во всей плоскости, поэтому конформность отображения нарушается только в тех точках, в которых производная данной функции обращается в нуль, т. е. в точках, где

$$w'(z) = 3z^2 - 12z + 9 = 0.$$

Это точки $z_1 = 1$, $z_2 = 3$.

3.48. Определить угол поворота Θ и коэффициент искажения длин k в точках $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 2 + 3i$ при отображении $w = z^3$.

3.49. Указать, какая часть плоскости сжимается при отображениях:

$$w = z^2, \quad w = -z^2 + 3z + 8, \quad w = \frac{2}{z}.$$

3.50. Указать точки плоскости, в которых нарушена конформность отображений:

$$w = z^3 + 5z, \quad w = \cos 3z, \quad w = \sin z.$$

2. Дробно-линейное и линейное отображение. *Дробно-линейная функция* $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ $(ad \neq cb)$ конформно отображает плоскость $\{z\}$ на плоскость $\{w\}$, причем бесконечно удаленная точка $z = \infty$ отображается в точку $w = \dfrac{a}{c}$, а точка $z = -\dfrac{d}{c}$ переходит в $w = \infty$. Дробно-линейное отображение обладает следующими свойствами:

1. Каждая прямая и каждая окружность плоскости $\{z\}$ отображается в прямую или окружность плоскости $\{w\}$.

2. Любая пара симметричных относительной прямой или окружности * C точек переходит в симметричную относительно образа C пару точек.

3. Существует только одно дробно-линейное преобразование, переводящее плоскость $\{z\}$ в плоскость $\{w\}$ так, что три данные точки z_1, z_2, z_3 переходят соответственно в три данные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение записывается в виде равенства отношений

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{3.1}$$

Если одна из точек z_k или w_k является бесконечно удаленной, то в формуле (3.1) нужно разности, в которые входят эти w_k и z_k, заменить единицами, например, если $z_2 = \infty$, $w_3 = \infty$, то

$$\frac{w - w_1}{1} \frac{1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{1}{1}.$$

Линейная функция $w = az + b$ является частным случаем дробно-линейной (при $c = 0$, $d = 1$); точку $z = \infty$ она переводит в $w = \infty$, поэтому линейная функция прямую переводит в прямую, а окружность в окружность.

---

* Точки A и B называются симметричными относительно окружности радиуса R, если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности O, на расстояниях от O, удовлетворяющих условию $OA \cdot OB = R^2$.

3.51. Выяснить геометрический смысл параметров a и b линейного отображения $w = az + b$.

Решение. Отображение $w = az + b$ разобьем на два последовательных отображения: $w_1 = az$, $w = w_1 + b$.

Пусть

$$a = \alpha e^{i\beta}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Тогда

$$w_1 = \alpha e^{i\beta} re^{i\varphi} = \alpha re^{i(\varphi+\beta)}, \text{ т. е. } |w_1| = \alpha r, \ \arg w_1 = \varphi + \beta.$$

Следовательно, при отображении $w_1 = az$ вектор $\boldsymbol{z}$ поворачивается на угол $\beta = \arg a$ и изменяется в длине в $\alpha = |a|$ раз (удлиняется при $\alpha > 1$ или уменьшается при $\alpha < 1$) (рис. 76).

Второе отображение $w = w_1 + b$ осуществляет параллельный перенос точки w_1 на вектор $\boldsymbol{b}$ (рис. 77).

Таким образом, чтобы найти образ точки z при отображении $w = az + b$,

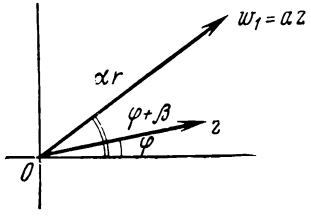


Рис. 76

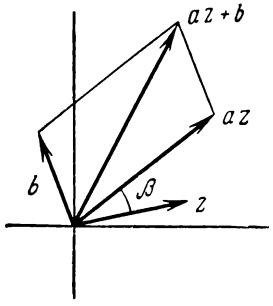


Рис. 77

нужно вектор $\boldsymbol{z}$ повернуть на угол $\beta = \arg a$, изменить его длину в $\alpha = |a|$ раз и параллельно перенести на вектор $\boldsymbol{b}$ (см. рис. 77).

3.52. Будем считать, что плоскости z и w совпали. Неподвижной точкой отображения $w = f(z)$ называется такая конечная точка, для которой $w = z$. Найти неподвижную точку линейного отображения.

Решение. По определению неподвижной точки имеем

$$z = az + b.$$

Если $a \neq 1$, то $z = \frac{b}{1-a}$. Если же $a = 1$, $b \neq 0$, то неподвижной точки нет. В случае $a = 1$, $b = 0$ $w = z$ — все точки неподвижные.

3.53. Найти линейное отображение с неподвижной точкой $-2i$, переводящее точку $z = 1$ в точку $w = 1 + i$.

Решение. Для линейного отображения $w = az + b$ неподвижной точкой является точка $z_0 = \frac{b}{1-a}$ (см. решение задачи **3.52.**)

Следовательно,

$$\frac{b}{1-a}=-2i,$$

а так как точка 1 переходит в точку $1+i$, то

$$1+i=a+b.$$

Из полученной системы уравнений определяем

$$a=\frac{7+i}{5},\quad b=\frac{2-4i}{5}.$$

Искомое отображение

$$w=\frac{7+i}{5}z+\frac{2-4i}{5}.$$

3.54. Найти линейную функцию, отображающую круг $|z+i|<1$ в круг $|w-1|<3$.

Решение. Представим линейную функцию в виде $w-w_0=a(z-z_0)$. Из этого представления видно, что если точки z удовлетворяют условию $|z-z_0|<r$, то для соответствующих им точек выполняется неравенство $|w-w_0|<|a|r$; это значит, что это отображение переводит круг с центром в точке z_0 радиуса r в круг с центром в точке w_0 радиуса $|a|r$. Поэтому полагаем $z_0=-i$, $w_0=1$, $r=1$; по условию задачи должно быть $|a|r=3$, т. е. $|a|=3$, следовательно, $a=3e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число. Искомое отображение имеет вид $w-1=3e^{i\alpha}(z+i)$, или $w=3e^{i\alpha}z+1+3ie^{i\alpha}$.

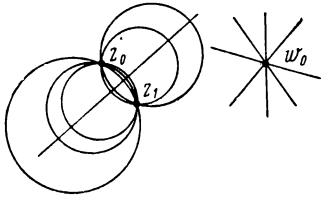


Рис. 78

3.55. Выяснить, какие прямые при отображении

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

переходят в окружности и какие окружности переходят в прямые.

Решение. Точка $z_1=-\frac{d}{c}$ переходит при отображении $w=\frac{az+b}{cz+d}$ в бесконечно удаленную точку, поэтому все окружности и все прямые, проходящие через эту точку z_1, отобразятся в прямые, так как они могут перейти только в окружности или прямые при дробно-линейном отображении, а каждая окружность лежит в ограниченной части плоскости $\{w\}$.

Отметим, также, что семейство окружностей, проходящих через точку $z_1=-\frac{d}{c}$ и произвольную точку z_0, отобразится в пучок прямых, пересекающихся в точке $w_0=\frac{az_0+b}{cz_0+d}$ (рис. 78). В силу конформности отображения углы между окружностями и соответствующими им прямыми будут одинаковыми.

Те прямые и окружности, которые не проходят через точку $z_1 = -\frac{d}{c}$, отобразятся в окружности, так как в этом случае все значения $|w|$ будут ограничены.

3.56. Выяснить, во что переводит полярную сетку $|z-a|=R$, $\arg(z-a)=\alpha$ функция $w=\frac{1}{z-a}+b$.

Решение. Лучи $\arg(z-a)=\alpha$ выходят из точки $z=a$, которая при отображении $w-b=\frac{1}{z-a}$ переходит в бесконечно удаленную точку, поэтому их образами будет пучок лучей, выходящих из точки $w=b$ (при $z\to\infty$, $w\to b$).

Окружность $|z-a|=R$ при этом отображении снова переходит в окружность

$$|w-b|=\frac{1}{|z-a|}=\frac{1}{R}.$$

Ее центр в точке $w=b$, радиус $\frac{1}{R}$.

Таким образом, полярная сетка с полюсом в точке $z=a$ переходит в полярную сетку с полюсом в точке $w=b$.

3.57. Отобразить внешность круга $|z-a|>r$ на внутренность круга $|w-b|<R$.

Решение. Функция

$$w-b=\frac{Rr}{z-a}$$

переводит окружность $|z-a|=r$ в окружность

$$|w-b|=\frac{Rr}{|z-a|}=\frac{Rr}{r}=R.$$

Кроме того, ясно, что $z=\infty$ переходит в $w=b$. Это значит, что внешность круга $|z-a|>r$ переходит во внутренность круга $|w-b|<R$.

3.58. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ в круг $|w-i|<3$ так, чтобы точки границы $|z|=1$: $z_1=-1$, $z_2=+i$, $z_3=1$ перешли соответственно в точки $w_1=-3+i$, $w_2=4i$, $w_3=3+i$ границы $|w-i|=3$.

Решение. Построим дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1=-1$, $z_2=i$, $z_3=1$ соответственно в точки $w_1=-3+i$, $w_2=4i$, $w_3=3+i$. Это отображение задается формулой (3.1). Подставив значения z_k и w_k, $k=1, 2, 3$, получим

$$\frac{w+3-i}{w-3-i}\,\frac{4i-3-i}{4i+3-i}=\frac{z+1}{z-1}\,\frac{i-1}{i+1},$$

или

$$\frac{w+3-i}{w-3-i}=\frac{z+1}{z-1}.$$

Из последнего равенства выразим w через z:

$$w=3z+i.$$

Мы получили линейную функцию — частный случай дробно-линейной. Это отображение перевело три точки окружности $|z|=1$ в три точки окружности $|w-i|=3$. Если точка z движется по окружности $|z|=1$ из точки z_1 через точку z_2 в точку z_3, то область $|z|<1$ остается справа, при этом образ ее $w(z)$ движется по границе так (рис. 79), что область $|w-i|<3$ тоже остается справа. Направление обхода границы сохранено; следовательно, область $|z|<1$ отображается в область $|w-i|<3$.

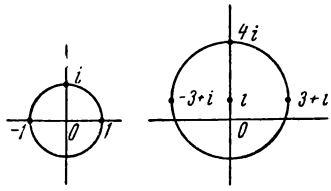


Рис. 79

3.59. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$ так, чтобы точки границы области $\operatorname{Im} z>0$:

$$\infty,\ 0,\ 1$$

перешли в точки границы $\operatorname{Re} w>0$:

$$0,\ -i,\ \infty.$$

Решение. Полагая $z_1=\infty$, $z_2=0$, $z_3=1$, заметим, что если точка z движется по границе области $\operatorname{Im} z>0$ из точки $z_1=\infty$ в точку $z_3=1$ через точку $z_2=0$, область остается слева, при этом образ ее должен двигаться из точки $w_1=0$ в точку $w_3=\infty$ через точку $w_2=-i$, следовательно, область $\operatorname{Re} w>0$ также останется слева. Поэтому, чтобы осуществить требуемое отображение, достаточно перевести точку z_k в w_k, $k=1, 2, 3$, тогда область $\operatorname{Im} z>0$ перейдет в $\operatorname{Re} w>0$. Используя формулу (3.1), находим

$$\frac{w-0}{1}\,\frac{1}{-i-0}=\frac{1}{z-1}\,\frac{0-1}{1},\quad \frac{w}{i}=\frac{1}{z-1},$$

откуда

$$w=\frac{i}{z-1}.$$

3.60. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ в круг $|w|<1$ так, чтобы точки границы $-i$, 0, i перешли в точки окружности -1, i, 1.

Решение. Обозначим $z_1=-i$, $z_2=0$, $z_3=i$, тогда $w_1=-1$, $w_2=i$, $w_3=1$. Если двигаться по прямой $\operatorname{Re} z=0$ от точки z_1 через точку z_2 в точку z_3, то область $\operatorname{Re} z>0$ остается справа. То же самое мы получаем, если пойдем по окружности $|w|=1$ от точки w_1 в точку w_3 через w_2. Круг $|w|<1$ остается справа. Поэтому чтобы отобразить полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ в круг $|w|<1$, достаточно перевести точки z_k в точки w_k, $k=1, 2, 3$. Это отображение задается формулой (3.1). Подставив значе-

ния z_k и w_k, находим

$$\frac{w+1}{w-1}\frac{i-1}{i+1}=\frac{z+i}{z-i}\frac{0-i}{0+i},$$

или

$$\frac{w+1}{w-1}=i\frac{z+i}{z-i},$$

откуда

$$w=-i\frac{z-1}{z+1}.$$

3.61. Отобразить единичный круг $|z|<1$ в единичный круг $|w|<1$ так, чтобы точка $z=a$ перешла в центр круга $w=0$.

Решение. Точка $z=a$ должна перейти в центр круга, поэтому симметричная ей точка $z=a^*$ должна перейти в точку, симметричную $w=0$. Бесконечно удаленная точка симметрична центру окружности. Найдем a^*. Эта точка лежит на одном луче с точкой a, выходящем из начала координат, поэтому $\arg a^*=\arg a$, а модуль $|a^*|$ определим из равенства $|a||a^*|=1$: $|a^*|=\frac{1}{|a|}$. Следовательно,

$$a^*=|a^*|e^{i\arg a^*}=\frac{1}{|a|}e^{i\arg a}=\frac{1}{|a|e^{i\arg a}}=\frac{1}{\bar{a}}.$$

Искомое отображение можно записать в виде

$$w=k\frac{z-a}{z-a^*}=k_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

где k и k_1 — некоторые постоянные. По условию задачи, точки окружности $|z|=1$ должны перейти в точки окружности $|w|=1$, следовательно, $|w(1)|$ должен равняться единице, т. е.

$$|w(1)|=|k_1||\frac{1-a}{1-\bar{a}}|=|k_1||\frac{1-a}{\overline{(1-a)}}|=|k_1|=1.$$

Таким образом, $k_1=e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число, и мы имеем

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

3.62. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z+i|<1$ в круг $|w-i|<3$ так, чтобы точка $z=-\frac{i}{2}$ перешла в точку $w=1+i$.

Решение. Точка $z_0=-\frac{i}{2}$ должна перейти в точку $w_0=1+i$, поэтому симметричная ей точка z_0^* должна перейти в w_0^*, симметричную точке $w_0=1+i$ относительно окружности $|w-i|=3$. Найдем z_0^* и w_0^*. Будем искать решение в общем виде. Дана окружность $|z-a|=r$ и точка z_0, лежащая внутри

этой окружности (рис. 80). Точки a, z_0 и z_0^* должны лежать на одном луче, поэтому $\arg(z_0^* - a) = \arg(z_0 - a)$. Расстояния от точек z_0 и z_0^* до a связаны соотношением $|z_0 - a|\,|z_0^* - a| = r^2$, поэтому $|z_0^* - a| = \dfrac{r^2}{|z_0 - a|}$. Отсюда следует, что

$$z_0^* - a = \frac{r^2}{|z_0 - a|} e^{i\arg(z_0 - a)} = \frac{r^2}{|z_0 - a|\, e^{-i\arg(z_0 - a)}} = \frac{r^2}{(z_0 - a)}.$$

Если здесь положить $z_0 = \dfrac{-i}{2}$, $a = -i$, то получим

$$z_0^* = -i + \frac{1}{\left(-\frac{i}{2} + i\right)} = -i + \frac{2}{-i} = -i + 2i = i.$$

Аналогично по той же формуле найдем, что

$$w_0^* = i + \frac{9}{(1 + i - i)} = i + 9 = 9 + i.$$

Мы должны построить дробно-линейную функцию, переводящую две точки z_0 и z_0^* в две точки w_0 и w_0^*. Используем формулу (3.1). Полагая $z_1 = z_0$, $z_3 = z_0^*$, $w_1 = w_0$, $w_3 = w_0^*$ (значения z_2 и w_2 нам неизвестны), найдем

$$\frac{w - w_0}{w - w_0^*} = k\frac{z - z_0}{z - z_0^*},$$

где

$$k = \frac{z_2 - z_0^*}{z_2 - z_0}\,\frac{w_2 - w_0}{w_2 - w_0^*}$$

— некоторая неизвестная постоянная. Мы имеем

$$\frac{w - 1 - i}{w - 9 - i} = k\frac{z + \frac{i}{2}}{z - i}.$$

Потребуем теперь, чтобы точки окружности $|z + i| = 1$ перешли в точки окружности $|w - i| = 3$. На первой окружности $z = -i + e^{i\alpha}$, на второй $w = i + 3e^{i\beta}$, где α и β — некоторые действительные постоянные. Подставив эти значения, получаем

$$\frac{i + 3e^{i\beta} - 1 - i}{i + 3e^{i\beta} - 9 - i} = k\frac{-i + e^{i\alpha} + i/2}{-i + e^{i\alpha} + i}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}\,\frac{3e^{i\beta} - 1}{e^{i\beta} - 3} = k\frac{e^{i\alpha} - i/2}{e^{i\alpha} - 2i}.$$

Возьмем модуль от обеих частей. Так как

$$\left|\frac{3e^{i\beta} - 1}{e^{i\beta} - 3}\right| = \left|\frac{e^{i\alpha} - \frac{i}{2}}{e^{i\alpha} - 2i}\right| = 1$$

(проверьте непосредственным вычислением), то

$$|k|=\frac{1}{3},\quad k=\frac{1}{3}e^{i\gamma},$$

где γ — некоторая действительная постоянная. Таким образом, заданное отображение осуществляется функцией $w(z)$, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{w-1-i}{w-9-i}=\frac{1}{3}e^{i\gamma}\,\frac{z+i/2}{z-i}.$$

3.63. Найти дробно-линейную функцию, которая переводит полуплоскость $\operatorname{Re} z>1$ в круг $|w-1|<1$ так, чтобы точка $z=2$ перешла в точку $w=1$.

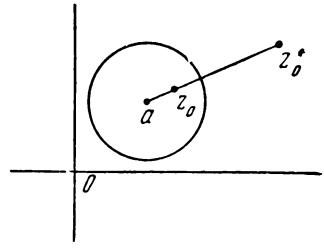


Рис. 80

Решение. Точка $z=2$ должна перейти в центр круга $|w-1|=1$, поэтому симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} z=1$ точка z^* должна перейти в бесконечно удаленную точку. Так как действительная ось перпендикулярна прямой $\operatorname{Re} z=1$ и точки $z=2$ и $z=0$ одинаково удалены от нее, то $z^*=0$ симметрична точке $z=2$ относительно этой прямой (рис. 81). Поэтому отображение

$$w-1=k\cdot\frac{z-2}{z}$$

переводит прямую $\operatorname{Re} z=1$ в окружность с центром в точке $w=1$, так как эта прямая не проходит через точку $z=-\frac{d}{c}=0$ (см. задачу **3.55**). Симметричные точки $z=2$ и $z^*=0$ перешли соответственно в точки $w=1$ и $w^*=\infty$, симметричные относительно окружности, поэтому $w=1$ — ее центр.

Точка прямой $\operatorname{Re} z=1: z=1$ должна лежать на окружности $|w-1|=1$, поэтому

$$|w(1)-1|=|k|\cdot\left|\frac{1-2}{1}\right|=|k|=1,$$

откуда $k=e^{i\alpha}$, где α — произвольная действительная постоянная. Окончательно имеем

$$w-1=e^{i\alpha}\,\frac{z-2}{z}.$$

3.64. Найти дробно-линейную функцию, отображающую область $D\{|z+1|>1,\ |z+2|<2\}$ (рис. 82) на полосу k:

$$0<\operatorname{Im} w<1.$$

Решение. Чтобы превратить конечную луночку D в бесконечную полосу k, надо отобразить точку $z=0$, в которой схо-

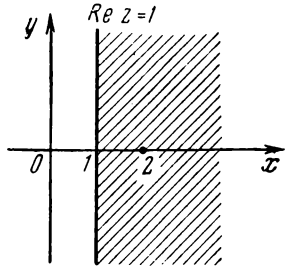


Рис. 81

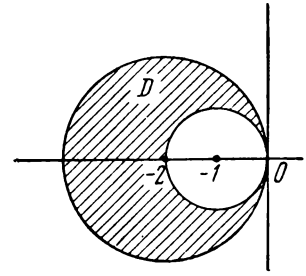


Рис. 82

дятся обе границы D в точку $w=\infty$. Это осуществляется функцией

$$w=\frac{az+b}{z}.$$

При этом обе окружности C_1 и C_2 перейдут в прямые, а так как других общих точек, кроме $z=0$, C_1 и C_2, не имеют, то соответствующие прямые не могут пересекаться, т. е. будут параллельны. Значит написанная функция переводит луночку D в некоторую полосу k. Надо выбрать теперь a и b так, чтобы полоса была заданной. Для этого заметим, что окружности C_1 и C_2 перпендикулярны оси Ox, а их образы должны быть перпендикулярны оси Ov. Так как углы сохраняются, то чтобы полоса k стала параллельной действительной оси на плоскости w, надо, чтобы действительная ось плоскости z перешла в мнимую ось плоскости w, т. е. при действительных z

$$w=\frac{az+b}{z}$$

было чисто мнимым. Это, очевидно, соблюдается только в случае чисто мнимых a и b:

$$a=ni,\ b=mi,$$

и тогда

$$w=i\,\frac{nz+m}{z},$$

где n и m — действительные.

Наконец, n и m подбираются так, чтобы C_1 перешла в $\operatorname{Im} w=0$, а C_2 — в $\operatorname{Im} w=1$. Для этого достаточно потребовать, чтобы при $z=-2$ $w=0$, а при $z=-4$ $w=i$. Из этих условий получим $n=\frac{1}{2}$, $m=2$, и окончательно

$$w=2i\cdot\frac{z+2}{z}.$$

Так как $z=-\frac{3}{2}$ отображается в $w=-\frac{2}{3}i$, то все внутренние точки области D переходят во внутренние точки полосы k. Это и есть искомое отображение.

3.65. Найти неподвижные точки отображений:

$$w=iz-5;$$
$$w=(3i+1)z-i;$$
$$w=2z-i.$$

3.66. Найти линейные отображения с неподвижной точкой $z_0=1-i$, переводящие точку z_1 в точку w_1 для случаев:

а) $z_1=2-i$, $w_1=i$; б) $z_1=-\frac{i}{2}$, $w_1=2$; в) $z_1=5i$, $w_1=-1+i$.

3.67. Найти линейные функции, отображающие:

а) круг $|z-2i|<2$ на круг $|w-1|<4$;

б) круг $|z|<1$ на круг $|w-1+i|<1$;

в) круг $|z+i|<3$ на круг $|w-i|<\frac{1}{3}$.

3.68. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точки -1, 1, i перешли в точки ∞, -1, 2.

3.69. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z-1|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w<1$ так, чтобы точки 0, $1+i$, 2 перешли в точки $1+i$, 1, $1-i$.

3.70. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ на круг $|w-1|<1$ так, чтобы точки -1, $-i$, 1 перешли в точки 0, 2, $1+i$.

3.71. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z-2i|<1$ в круг $|w|<2$ так, что точки i, $1+2i$, $3i$ перешли в точки 2, $2i$, $-2i$.

3.72. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$ так, чтобы точки i, $-i$, $-2i$ перешли в точки -1, 0, 2.

3.73. Отобразить полуплоскость $\operatorname{Im} z<3$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>-1$ так, чтобы точки $3i$, $3i-2$, $3i+1$ перешли в точки $-i$, $-i+1$, $-i+5$.

3.74. Отобразить с помощью дробно-линейной функции область $|z-1+i|<1$ на область $|w-1|>3$.

3.75. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z-1+2i|<2$ на круг $|w-5|<1$ так, чтобы точка z_0 перешла в точку w_0 для случаев: а) $z_0=1+i$, $w_0=5$; б) $z_0=-2i$, $w_0=5$; в) $z_0=\frac{1}{2}-2i$, $w_0=5$.

3.76. Отобразить с помощью дробно-линейной функции единичный круг $|z|<1$ на единичный круг $|w|<1$ так, чтобы

а) точка $z=\frac{1}{2}$ перешла в точку $w=0$,

б) точка $z=\frac{i}{2}$ перешла в точку $w=-\frac{1}{2}$,

в) точка $z=-\frac{i}{2}$ перешла в точку $w=\frac{i}{3}$.

3.77. Найти дробно-линейную функцию, переводящую полуплоскость $\operatorname{Im} z<1$ в круг $|w+i|<2$ так, чтобы точка $z=0$ перешла в точку $w=1-i$.

3.78. Найти дробно-линейную функцию, переводящую круг $|z+2i|<1$ в полуплоскость $\operatorname{Re} w<-1$ так, чтобы точка $z=-\frac{3}{2}i$ перешла в точку $w=-3i-2$.

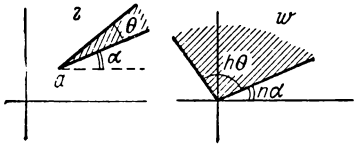


Рис. 83

3.79. Найти дробно-линейную функцию, отображающую луночку $\{|z+i|>1,\ |z+3i|<3\}$ в полосу $0<\operatorname{Re} w<5$.

3. Отображение с помощью степенной функции и функции Жуковского. *Степенная функция* $w=(z-a)^n$ отображает взаимно однозначно и конформно внутренность угла с вершиной в точке $z=a$, раствор которого Θ не превосходит $\frac{2\pi}{n}$, на внутренность угла с вершиной в начале координат раствора $n\Theta$ (рис. 83).

Функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает взаимно однозначно и конформно как внутренность, так и внешность единичного круга $|z|<1$ на внешность отрезка $|\operatorname{Re} w|\leqslant 1$. При этом каждая окружность $|z|=r<1$ переходит в эллипс с центром в точке $w=0$ и полуосями $a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$, а окружности $|z|=r>1$ в эллипсы с центром в точке $w=0$ и полуосями $a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$.

3.80. Найти степенную функцию, отображающую область $0<\arg z<\frac{\pi}{6}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

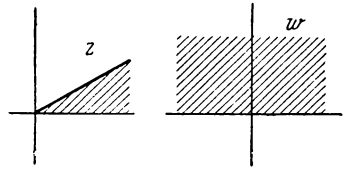


Рис. 84

Решение. Мы должны отобразить угол с вершиной в нуле, раствор которого $\Theta=\frac{\pi}{6}$, на угол раствора π (рис. 84). Поэтому нужна функция $w=z^n$, где $n\Theta=n\frac{\pi}{6}=\pi$. Следовательно, $n=6$,

$w = z^6$. При этом отображении луч $\arg z = 0$ переходит в луч $\arg w = 0$, а луч $\arg z = \frac{\pi}{6}$ в луч $\arg w = \pi$.

3.81. Отобразить область $-\frac{\pi}{4} < \arg(z - i) < 0$ на область $0 < \arg w < \frac{3}{4}\pi$.

Решение. Раствор угла в плоскости z равен $\Theta = \frac{\pi}{4}$. Функция $w_1 = (z - i)^n$ переводит этот угол в угол раствора $n\Theta = \frac{n\pi}{4}$ с вершиной в начале координат. Нам нужен угол в плоскости w раствора $\frac{3\pi}{4}$, поэтому $\frac{\pi n}{4} = \frac{3\pi}{4}$, $n = 3$.

Функция $w_1 = (z - i)^3$ переводит луч $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$ в луч $\arg w_1 = -\frac{\pi}{4} \cdot 3 = -\frac{3\pi}{4}$, а нужно в луч $\arg w = 0$. Умножим эту функцию на $e^{\frac{3}{4}\pi i}$, тогда функция $w = e^{\frac{3}{4}\pi i} w_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}(z - i)^3$ переведет луч $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{4}$ в луч $\arg w = 0$ и луч $\arg(z - i) = 0$ в луч $\arg w = \frac{3}{4}\pi$. Действительно, $\arg w = \frac{3}{4}\pi + 3\arg(z - i)$, поэтому на первом луче

$$\arg w = \frac{3}{4}\pi - 3\frac{\pi}{4} = 0,$$

на втором

$$\arg w = \frac{3}{4}\pi - 3 \cdot 0 = \frac{3}{4}\pi.$$

3.82. Найти функцию, отображающую луночку D между окружностями $|z - 1| = 1$, $|z + i| = 1$ в полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ (рис. 85).

Решение. Точка $z_0 = 1 - i$ лежит на обеих окружностях (см. рис. 85). Отображение $w_1 = \frac{z}{z - 1 + i}$ переводит точку $z = 0$ в $w_1 = 0$, точку $z_0 = 1 + i$ в $w = \infty$. При этом окружности $|z - 1| = 1$ и $|z + i| = 1$ переходят в две ортогональные прямые, проходящие через точку $w = 0$, так как окружности пересекаются в точке $z = 0$ под прямым углом, а отображение в точке $z = 0$ конформно. Заметив, что точка $z = \frac{1 - i}{2}$ переходит в точку $w_1 = -1$, приходим к выводу, что область D отобразилась в область D_1 (рис. 86). Но тогда функция

$$w_2 = -w_1 = -\frac{z}{z - 1 + i}$$

переводит область D_1 в область D_2 (см. рис. 86).

Для того чтобы развернуть полученный угол в полуплоскость, возведем отображающую функцию в квадрат; мы получим

$$w = w_2^2 = \left(-\frac{z}{z-1+i}\right)^2 = \left(\frac{z}{z-1+i}\right)^2.$$

Это и есть искомая функция.

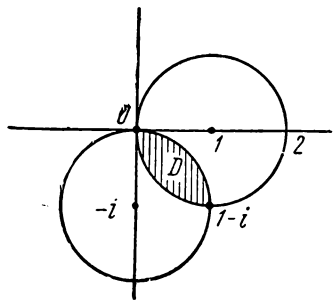


Рис. 85

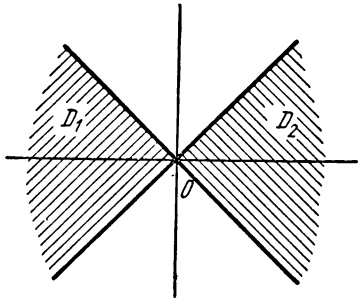


Рис. 86

3.83. Показать, что функция Жуковского отображает полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$.

Решение. Функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ переводит внутренность единичного круга $|z|<1$ на внешность отрезка $\operatorname{Im} w=0$, $|\operatorname{Re} w|\leqslant 1$, при этом дуга окружности $z=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ переходит в линию

$$w=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+\frac{1}{e^{i\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)=\cos\varphi \quad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

Это отрезок $[-1, 1]$ прямой $\operatorname{Im} w=0$.

Функция Жуковского переводит действительную ось в действительную ось плоскости w, причем отрезок действительной оси $[-1, 1]$ взаимно однозначно отображается на два луча $\operatorname{Im} w=0$, $\operatorname{Re} w\geqslant 1$ и $\operatorname{Im} w=0$, $\operatorname{Re} w\leqslant -1$, так как при $z\to 0$ $w\to\infty$, а при $z\to\pm 1$, $|z|<1$ $w\to\pm 1$.

Иными словами, граница полукруга $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ отображается функцией Жуковского в действительную ось $\operatorname{Im} w=0$. Точка $z=\frac{i}{2}$ переходит в точку

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}+\frac{2}{i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}-2i\right)=-\frac{3}{4}i,$$

следовательно, данный полукруг переводится в нижнюю полуплоскость.

3.84. Найти степенные функции, которые отображают области

а) $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{8}<\arg z<\frac{\pi}{8}$;

в) $-\frac{\pi}{16}<\arg(z+2i)<\frac{\pi}{16}$; г) $0<\arg(z+2)<\frac{\pi}{8}$

в область $|\arg w|<\frac{\pi}{8}$.

3.85. Отобразить полукруг $|z|<2$, $\operatorname{Im} z<0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

Указание. С помощью дробно-линейной функции отобразить полукруг на первую четверть (точку $z=-2$ перевести в $w=0$, $z=2$ в $w=\infty$), а затем, возведя в квадрат, развернуть прямой угол в полуплоскость.

3.86. Отобразить луночку $D\{|z-3i|<3,\ |z+3|<3\}$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$.

3.87. Отобразить луночку $D\{|z+2|<2,\ |z+2i|<2\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$.

3.88. Отобразить полукруг $|z|<3$, $\operatorname{Re} z<0$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$.

3.89. Отобразить полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z<0$ на круг $|w|<1$.

Указание. Сначала отобразить полукруг на полуплоскость, а затем полуплоскость в круг.

3.90. Показать, что при отображении с помощью функции Жуковского верхняя полуплоскость с удаленным единичным полукругом (рис. 87) переходит в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

Указание. Рассмотреть, во что переходит при отображении функцией Жуковского граница данной области: отрезки действительной оси и дуга окружности.

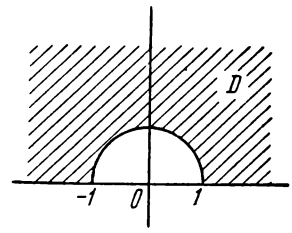


Рис. 87

3.91. Используя функцию Жуковского, найти функции, отображающие на верхнюю полуплоскость области: а) $|z-1|<1$, $\operatorname{Im} z<0$, б) $|z+2|<1$, $\operatorname{Im} z>0$.

4. Экспоненциальное отображение. *Показательная функция* $w=e^z$ отображает взаимно однозначно и конформно любую полосу, параллельную действительной оси, ширины $h<2\pi$, на угол раствора h с вершиной в начале координат.

3.92. Выяснить, во что преобразуется при отображении $w=e^z$

а) полуполоса $0<x<\infty$, $0<y<\frac{\pi}{2}$;

б) прямоугольник $0<x<1$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим, во что переходят границы заданных областей при отображении $w=e^z$.

а) Прямые $\operatorname{Im} z = y = 0$ и $\operatorname{Im} z = y = \frac{\pi}{2}$ переходят в отрезки лучей: $w = e^x$, $0 < x < \infty$ — это отрезок действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$, $1 < \operatorname{Re} w < \infty$ и $w = e^x\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = ie^x$, $0 < x < \infty$ — это отрезок мнимой оси $1 < \operatorname{Im} w < \infty$, $\operatorname{Re} w = 0$. Отрезок прямой $\operatorname{Re} z = 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ переходит в дугу окружности $|w| = 1$ с концами в точках $w_1 = 1$ (соответствует точке $z = 0$) и $w_2 = i$ $\left(\text{соответствует } z = \frac{\pi i}{2}\right)$.

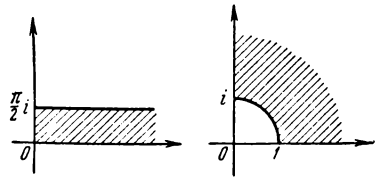


Рис. 88

Следовательно, образом данной полуполосы является первая четверть плоскости w, из которой удалена четверть круга радиуса 1 (рис. 88).

б) Прямые $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{Im} z = -\frac{\pi}{2}$ переходят в отрезки лучей

$$w = e^x\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$w = e^x\left[\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right] = -ie^x$$

(см. рис. 89) с концами в точках $w_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $w_2 = e^{1+\frac{\pi i}{4}} = e\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $w_3 = -i$, $w_4 = -ie$. Отрезки прямых $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$ переходят в дуги окружностей радиусов $R_1 = e^0 = 1$, $R_2 = e^1 = e$, соединяющие точки w_1 и w_3, w_2 и w_4. Следовательно, прямоугольник D отобразился на кольцевой сектор (рис. 89).

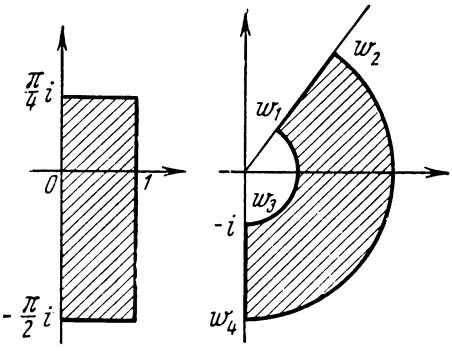


Рис. 89

3.93. Отобразить круговую луночку $D\{|z+1| > 1, |z+2| < 2\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение. При решении задачи **3.64.** мы нашли, что функция $w_1 = 2i\frac{z+2}{z}$ отображает заданную область D на полосу D_1: $0 < \operatorname{Im} w_1 < 1$. Функция $w_2 = \pi w_1$ переводит полосу D_1 единичной ширины в полосу D_2, ширина которой π. Показательная функция $w = e^{w_2}$ отображает полосу шириной π в угол раствора π, т. е. в полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

А так как точка полосы D_2 $w_2=\frac{\pi i}{2}$ переходит в точку $w=i$, лежащую в верхней полуплоскости, то функция

$$w=e^{w_2}=e^{\pi w_1}=e^{2\pi i\frac{z+2}{z}}$$

осуществляет отображение луночки $D\{|z+1|>1,\ |z+2|<2\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

3.94. Отобразить полуполосу $0<x<2,\ y>0$ на верхний полукруг $|w|<1,\ \operatorname{Im} w>0$.

Решение. Сначала переведем данную полуполосу с помощью функции $w_1=\frac{\pi i}{2}z$ в горизонтальную полуполосу D_1:

$$-\infty<\operatorname{Re} w_1<0,\ 0<\operatorname{Im} w_1<\pi,$$

ширины π.

Показательная функция $w=e^{w_1}$ переводит область D_1 в верхний полукруг $|w|<1,\ \operatorname{Im} w>0$.

В самом деле, образом действительной полуоси

$$\operatorname{Im} w_1=0,\ -\infty<\operatorname{Re} w_1\leqslant 0$$

является отрезок

$$0<\operatorname{Re} w<1,\ \operatorname{Im} w=0,$$

так как $w=e^{\operatorname{Re} w_1}$ и $0<w<1$. Образом прямой

$$\operatorname{Im} w_1=\pi,\quad -\infty<\operatorname{Re} w_1\leqslant 0$$

будет отрезок $-1<\operatorname{Re} w<0,\ \operatorname{Im} w=0$, так как на ней

$$w=e^{\pi i+\operatorname{Re} w_1}=-e^{\operatorname{Re} w_1}.$$

Отрезок мнимой оси

$$0<\operatorname{Im} w_1<\pi$$

переходит в дугу окружности

$$w=e^{i\operatorname{Im} w_1},\ 0<\operatorname{Im} w_1<\pi.$$

Заметим также, что внутренняя точка области D_1

$$w_1=-1+\frac{\pi i}{2}$$

переходит в точку

$$w=ie^{-1},$$

лежащую внутри полукруга, поэтому функция

$$w=e^{w_1}=e^{\frac{\pi i}{2}z}$$

отображает полуполосу $0<x<2,\ y>0$ на верхний полукруг.

3.95. Отобразить на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ полуполосу $0<\operatorname{Re} z<2,\ \operatorname{Im} z>0$.

Решение. В решении задачи 3.94 мы показали, что функция $w_1 = e^{\frac{\pi i}{2} z}$ отображает данную полуполосу в полукруг $|w_1| < 1$, $\operatorname{Im} w_1 > 0$. Функция Жуковского $w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$ переводит полукруг $|w_1| < 1$, $\operatorname{Im} w_1 > 0$ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w_2 < 0$ (см. решение задачи 3.83). Поэтому функция

$$w = -w_2 = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi i z}{2}} + e^{-\frac{\pi i z}{2}}\right) = -\cos\frac{\pi z}{2}$$

реализует отображение полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

3.96. Выяснить, во что переходит при отображении $w = e^z$

а) полуполоса $0 < x < \infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

б) прямоугольник $1 < x < 2$, $-\frac{\pi}{3} < y < \pi$.

3.97. Отобразить полуполосу $-1 < x < 0$, $y < 0$ на полукруг $|w| < 2$, $\operatorname{Im} w < 0$.

3.98. Отобразить на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ круговую луночку

$$\{|z-1| > 1,\ |z-3| < 3\}.$$

3.99. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку

$$\{|z| < 1,\ |z-i| < 1\}.$$

3.100. Отобразить на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ полуполосу $x < 1$, $0 < y < h$.

3.101. Отобразить на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 1$ полуполосу $0 < x < 1$, $y > 0$.

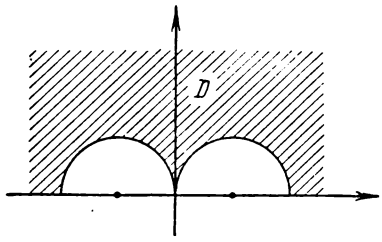


Рис. 90

3.102. Показать, что функция $w = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{z-2}{z}$ отображает область D $\{|z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ (рис. 90) на верхнюю полуплоскость.

Указание. Рассмотреть, во что переходят при данном отображении отрезки прямых и дуги окружностей, лежащие на границе.

3.103. Отобразить полуполосу

$$2 < y < 3,\ x > 0$$

на область $\operatorname{Im} w < 2$.

3.104. Отобразить на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ круговую луночку

$$\{|z| > 1,\ |z-i| < 1\}.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Интеграл от функции комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по линии L определяется, как обычно, с помощью предела интегральных сумм, а вычисляется по формуле

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_L v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \quad (4.1)$$

Поэтому все свойства криволинейных интегралов по координатам полностью переносятся на интегралы (4.1).

Теорема Коши (для односвязной области). Если функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, то

$$\int_L f(z)\,dz = 0,$$

где L — произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, лежащий в области D.

Теорема Коши (для многосвязной области). Если функция $f(z)$ регулярна в конечной замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кусочно-гладкими контурами $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$ (рис. 91), то

$$\int_{L_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)\,dz.$$

Направление обхода контуров — против стрелки часов.

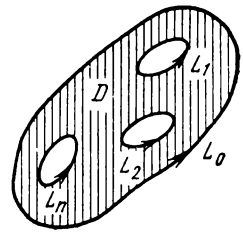


Рис. 91

Для функции $f(z)$, регулярной внутри замкнутого кусочно-гладкого контура L и на L, имеют место следующие представления:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz, \quad (4.2)$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (4.3)$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Здесь точка a лежит внутри контура L, направление обхода которого — против часовой стрелки. Эти формулы носят названия интегральных формул Коши.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, и L — произвольный путь с началом в точке A и концом B, тогда

$$\int_L f(z)\,dz = F(B) - F(A), \quad (4.4)$$

где $F'(z) = f(z)$. Эта формула — полный аналог формулы Ньютона—Лейбница для определенных интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$.

3.105. Вычислить интеграл

$$\int_L \operatorname{Im} z\,dz$$

по следующим путям интегрирования:

а) L_1 — отрезок действительной оси от точки $z_0 = 3$ до точки $z_1 = -3$;

б) L_2 — полуокружность $|z|=3$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

Решение. Отметим прежде всего, что формулу (4.4) здесь применить нельзя, так как $w=\operatorname{Im} z$ — нерегулярная функция. Из (4.1) находим

$$\int\limits_L \operatorname{Im} z\, dz = \int\limits_L y\, dz = \int\limits_L y\, dx + i \int\limits_L y\, dy.$$

а) На действительной оси $y=0$, поэтому

$$\int\limits_{L_1} \operatorname{Im} z\, dz = 0.$$

б) На кривой L_2 введем параметрическое представление, полагая $x=3\cos\varphi$, $y=3\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Тогда

$$\int\limits_{L_2} \operatorname{Im} z\, dz = \int\limits_0^{\pi} 3\sin\varphi\,(-3\sin\varphi)\, d\varphi + i \int\limits_0^{\pi} 3\sin\varphi\, 3\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= -9 \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi + 9i \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = -9\,\frac{\pi}{2} + 9i\,\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}(\pi - i).$$

Заметим, что оба пути соединяют одни и те же точки $z_0=3$ и $z_1=-3$, но интегралы по L_1 и L_2 имеют различные значения.

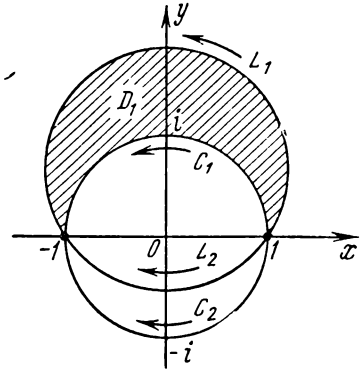


Рис. 92

3.106. Какие значения принимает

$$\int\limits_L \frac{dz}{z}$$

по всевозможным путям L, соединяющим точки $z_0=1$ и $z_1=-1$?

Решение. Путь L не может проходить через $z=0$, так как там подынтегральная функция терпит разрыв, и интеграл не существует. В остальном путь L можно выбрать произвольно. Рассмотрим сначала два пути C_1 и C_2 по верхней и нижней полуокружности $|z|=1$. На ней $z=e^{i\varphi}$, $dz=ie^{i\varphi}\,d\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ на C_1, $0 \geqslant \varphi \geqslant -\pi$ на C_2 и

$$\int\limits_{C_1} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{\pi} i\, d\varphi = \pi i, \qquad \int\limits_{C_2} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{-\pi} i\, d\varphi = -\pi i.$$

Пусть теперь L_1 — любой путь, соединяющий данные точки и обходящий начало координат сверху (рис. 92). Между C_1 и L_1 образуется односвязная область D_1, в которой подынтегральная

функция регулярна. Поэтому теорема Коши дает

$$0=\int\limits_{C_1-L_1}\frac{dz}{z}=\int\limits_{C_1}\frac{dz}{z}+\int\limits_{-L_1}\frac{dz}{z}=\int\limits_{C_1}\frac{dz}{z}-\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z}.$$

Здесь $-L_1$, как и ранее (гл. II), означает путь L_1 с противоположным направлением обхода. Из этого равенства находим

$$\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z}=\int\limits_{C_1}\frac{dz}{z}=\pi i.$$

Аналогично доказывается и второе равенство:

$$\int\limits_{L_2}\frac{dz}{z}=\int\limits_{C_2}\frac{dz}{z}=-\pi i,$$

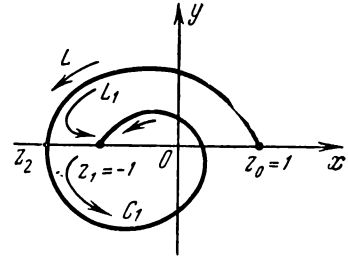


Рис. 93

где L_2 — любой из рассматриваемых путей, обходящих $z=0$ снизу (см. рис. 92).

Но это еще не все. Возможны такие пути, которые обходят вокруг начала $z=0$ один раз, например изображенный на рис. 93. Такой путь, дополненный перемычкой z_2z_1, состоит из L_1 и контура C, обходящего $z=0$ в положительном направлении. Интеграл по L_1 нам известен, а интеграл по контуру C вычисляется с помощью формулы Коши (4.2) при $f(z)=1$, $a=0$:

$$\int\limits_{L}\frac{dz}{z}=\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z}+\int\limits_{C}\frac{dz}{z}=\pi i+2\pi i.$$

Аналогично, если L обходит $z=0$ в отрицательном направлении, то

$$\int\limits_{L}\frac{dz}{z}=\int\limits_{L_2}\frac{dz}{z}+\int\limits_{-C}\frac{dz}{z}=-\pi i-2\pi i.$$

Нетрудно теперь понять, что если путь L обходит вокруг начала не один, а несколько раз, то добавляется соответствующее количество слагаемых $2\pi i$ или $-2\pi i$. Таким образом, общее значение данного интеграла:

$$\int\limits_{L}\frac{dz}{z}=\pm(\pi i+2k\pi i)=\pm\pi i(2k+1)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

3.107. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{L}ze^z\,dz,$$

где L — произвольная линия, соединяющая точки $z=0$, $z=\frac{\pi i}{2}$.

Решение. Подынтегральная функция ze^z регулярна во всей комплексной плоскости, поэтому интеграл можно записать в виде

$$\int_L ze^z\,dz = \int_0^{\frac{\pi i}{2}} ze^z\,dz,$$

так как интеграл не зависит от выбора пути L.

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{\frac{\pi i}{2}} ze^z\,dz = ze^z\Big|_0^{\frac{\pi i}{2}} - \int_0^{\frac{\pi i}{2}} e^z\,dz = \frac{\pi i}{2}e^{\frac{\pi i}{2}} - e^z\Big|_0^{\frac{\pi i}{2}} =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\,i - e^{\frac{\pi i}{2}} + 1 = -\frac{\pi}{2} + 1 - i.$$

3.108. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,dz,$$

где L — окружность $|z-1|=1$.

Решение. Контур L — единичная окружность с центром в точке $z=1$. Подынтегральная функция $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}$ представляется в виде двух сомножителей:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\cdot\frac{1}{z-1},$$

причем $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}$ — регулярная внутри данного контура функция. По формуле Коши (4.2) получаем, положив $f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}$, $a=1$:

$$\int_L \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\,\frac{dz}{z-1} = 2\pi i\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right)_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

3.109. Вычислить интеграл

$$\int_L (2z+1)\,\bar{z}\,dz,$$

где L — единичная окружность $|z|=1$.

3.110. Вычислить интеграл

$$\int_L \operatorname{Re} z\,dz$$

по дуге параболы L: $y=2x^2$, начало которой в точке $z=0$ и конец в точке $z=1+2i$.

3.111. Вычислить интеграл

$$\int_L (z-1)\cos z\,dz$$

по произвольной линии, соединяющей точки $z_1=-\frac{\pi}{2}$, $z_2=\frac{\pi}{2}$.

3.112. Вычислить интеграл

$$\int_L (iz^2-2z)\,dz,$$

где L — произвольная линия, соединяющая точки $z_1=i$ и $z_2=1$.

3.113. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{e^{2z}}{z-\pi i}\,dz,$$

где: а) L_1 — окружность $|z|=4$; б) L_2 — окружность $|z+i|=1$.

3.114. Какие значения принимают данные интегралы, если в качестве L брать всевозможные непрерывные пути, соединяющие точки $z_0=0$ и $z_1=1$?

$$\text{а)}\ \int_L \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}; \qquad \text{б)}\ \int_L \frac{dz}{1+z^2}.$$

Указание. См. задачу **3.106.**

§ 5. КОМПЛЕКСНЫЕ РЯДЫ

1. Числовые ряды с комплексными членами. Последовательность комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, ..., $z_n=x_n+iy_n$, ... называется *сходящейся*, а число $z=x+iy$ ее пределом: $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если существуют конечные пределы $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Ряд с комплексными членами

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} w_k=w_1+w_2+\ldots+w_n$$

сходится; число $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется его суммой. Ряд с комплексными членами $\sum\limits_{1}^{\infty} w_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|w_n|$ $\left(\text{в этом случае ряд } \sum\limits_{1}^{\infty} w_n \text{ также сходится}\right)$.

Для рядов с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ справедливы следующие признаки сходимости.

1. Если для всех $n \geqslant n_0$ выполнено условие $|w_n| \leqslant a_n$, $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится абсолютно.

2. Если существует

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = l,$$

то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится, а при $l > 1$ расходится (признак Даламбера).

3. Если существует $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|w_n|} = l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится, а при $l > 1$ расходится (признак Коши).

3.115. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}.$$

Решение. Общий член ряда

$$w_n = \frac{\cos n + i \sin n}{n^2},$$

его модуль

$$|w_n| = \left| \frac{\cos n + i \sin n}{n^2} \right| = \sqrt{\frac{\cos^2 n + \sin^2 n}{n^4}} = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится; следовательно, рассматриваемый ряд абсолютно сходится.

3.116. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^{n^2}.$$

Решение.

$$\sqrt[n]{|w_n|} = \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2-i}{3} \right)^{n^2} \right|} = \sqrt[n]{\left| \frac{2-i}{3} \right|^{n^2}} =$$

$$= \left| \frac{2-i}{3} \right|^n = \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n \to 0 < 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поэтому (на основании признака Коши) рассматриваемый ряд абсолютно сходится.

Исследовать на сходимость следующие ряды:

3.117. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

3.118. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

3.119. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{i(2n+i)}{4n}\right]^n$.

2. Степенные ряды с комплексными членами. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

где z — комплексное переменное, а c_n и a — комплексные числа. При $a=0$ имеем степенной ряд вида

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n.$$

Те значения z, при которых ряд сходится, называются точками сходимости, те значения, при которых ряд расходится — точками расходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости.

Для каждого степенного ряда существует круг с центром в точке a, внутри которого степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ сходится, а вне его расходится. На границе круга степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Этот круг называется *кругом сходимости*, его радиус R — *радиусом сходимости* степенного ряда ($R=\infty$, если степенной ряд сходится во всей плоскости; $R=0$, если он сходится лишь в центре круга, в точке a).

Во всех точках внутри круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится и его сумма $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ регулярна. Если степенной ряд абсолютно сходится в какой-нибудь точке границы круга сходимости, он абсолютно сходится во всех точках этой границы.

Для отыскания радиуса сходимости степенного ряда могут применяться признаки сходимости Даламбера и Коши.

Областью сходимости степенного ряда по отрицательным степеням $(z-a)$

$$\frac{b_1}{z-a}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-a)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$$

является внешность круга с центром в точке a некоторого радиуса R.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ сходится в круге $|z-a|<R$, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$ сходится вне круга $|z-a|>r$, то при $0 \leqslant r < R < \infty$ областью сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

является кольцо $r<|z-a|<R$; при $r>R$ этот ряд всюду расходится.

3.120. Найти круг и радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Решение. Общий член этого ряда $w_n = \frac{z^n}{n!}$, поэтому

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1.$$

при $n \to \infty$. Это значит (в силу признака Даламбера), что степенной ряд сходится во всех точках комплексной плоскости. Роль круга сходимости выполняет вся плоскость. Радиус сходимости $R=\infty$.

3.121. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n (n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

Решение. Рассмотрим отдельно ряды по положительным и отрицательным степеням $(z-2i)$. Для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n (n+1)}$$

общий член

$$w_n = \frac{(z-2i)^n}{2^n (n+1)},$$

поэтому

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{|z-2i|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{2^n (n+1)}{|z-2i|^n} = \frac{n+1}{n+2} \frac{|z-2i|}{2} \to \frac{|z-2i|}{2}, \quad n \to \infty.$$

Этот ряд сходится в круге $|z-2i|<2$.

Выпишем теперь общий член ряда, содержащего отрицательные степени $(z-2i)$:

$$w_n = \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

Применяя признак Даламбера, получаем

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{(n+1)^2+5}{|z-2i|^{n+1}} \cdot \frac{|z-2i|^n}{n^2+5} = \frac{(n+1)^2+5}{n^2+5} \frac{1}{|z-2i|} \to \frac{1}{|z-2i|}, \quad n \to \infty,$$

следовательно, область сходимости этого ряда $|z-2i|>1$.

Таким образом, весь ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-2i)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n (n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}$$

будет сходиться в кольце

$$1<|z-2i|<2.$$

В задачах 3.122 — 3.131 найти область сходимости ряда.

3.122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

3.123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

3.124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$.

3.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} (z-2)^n$.

3.126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2}$.

3.127. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

3.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)\,2^n}}$.

3.129. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$.

3.130. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{3^n (n-i)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{(z+1+i)^n}$.

3.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(z-1)^n}$.

3. Ряды Тейлора и Лорана. Функция $f(z)$, регулярная в круге $|z-a|<R$, $0 \leqslant R < \infty$, разлагается в ряд по степеням $(z-a)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n, \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, \ldots,$$

где $0<r<R$. Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$.

Если функция $f(z)$ регулярна в области D, а точка a принадлежит этой области, то ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

функции $f(z)$ сходится к ней внутри максимального круга с центром в точке a, лежащего в области D (рис. 94).

Функция $f(z)$, регулярная внутри кольца $r<|z-a|<R$, $0\leqslant r<R\leqslant\infty$, разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n,\quad A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,\quad n=0,\pm 1,\ldots,$$

где $r<\rho<R$. Этот ряд называется *рядом Лорана* функции $f(z)$.

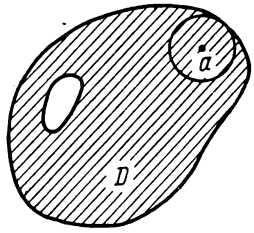


Рис. 94

Ряды Тейлора и Лорана определяются единственным образом. В частности, это означает, что каким бы способом мы ни разлагали $f(z)$ в ряд Тейлора или Лорана, этот ряд будет одним и тем же. Ряды Тейлора и Лорана в области их сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

3.132. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функции

а) e^{az}; б) $\sin z$.

Решение. а) Функция e^{az} регулярна во всей комплексной плоскости, поэтому она разлагается в ряд Тейлора, сходящийся к ней при всех значениях z. Коэффициенты этого ряда $A_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{a^n}{n!}$, так как $(e^{az})^{(n)}=a^ne^{az}$. Поэтому

$$e^{az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}z^n=1+az+\frac{a^2z^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}z^n+\ldots$$

б) По определению

$$\sin z=\frac{1}{2i}[e^{iz}-e^{-iz}].$$

Функции e^{iz} и e^{-iz} разлагаются в следующие ряды (см. пункт а):

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^n;\quad e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{n!}z^n.$$

Поэтому

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{n!}z^n\right\}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n[1-(-1)^n]}{n!}z^n.$$

Заметим, что при $n=2m$ множитель $1-(-1)^n$ равен нулю. Это значит, что ряд функции $\sin z$ не содержит четных степеней z. Далее, для нечетных $n=2m+1$ имеем

$$\frac{i^n[1-(-1)^n]}{n!}=\frac{(i^2)^m\cdot i\cdot 2}{(2m+1)!}=\frac{2i(-1)^m}{(2m+1)!},$$

Таким образом,

$$\sin z = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n[1-(-1)^n]}{n!}z^n = \frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}.$$

Этот ряд сходится к $\sin z$ при любом значении z.

3.133. Разложить в ряд по степеням z функции:

а) $z^3e^{\frac{1}{z}}$; б) $(1-z+2z^2)\sin\frac{1}{z^2}$.

Решение. а) Функция $e^{\frac{1}{z}}$; следовательно, и $z^3e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z=0$ нерегулярна. В окрестности этой точки ее можно разложить в ряд Лорана. Так как

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n$$

(см. задачу 3.132), то полагая $w=\frac{1}{z}$, находим

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\ldots$$

Следовательно,

$$z^3e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{z^3}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-3}} = z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!\,z}+\ldots$$

Этот ряд сходится в области $0<|z|<\infty$, так как в этом кольце функция $z^3e^{\frac{1}{z}}$ регулярна.

б) Для функции $\sin w$ в задаче **3.132** мы получили представление

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1}.$$

Полагая $w=\frac{1}{z^2}$, из него получаем

$$\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2(2n+1)}}.$$

Умножим этот ряд на $(1-z+2z^2)$ и раскроем скобки. Мы будем иметь

$$(1-z+2z^2)\sin\frac{1}{z^2}=(2z^2-z+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}}=$$

$$=2-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3z^4}+\frac{1}{6}\frac{1}{z^5}-\frac{1}{6}\frac{1}{z^6}+\ldots$$

Этот ряд сходится в области $0<|z|<\infty$.

3.134. Разложить функцию $e^{z+\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$.

Решение. Функция $e^{z+\frac{1}{z}}$ является произведением двух функций e^z и $e^{\frac{1}{z}}$, для которых

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n, \quad |z|<\infty,$$

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^{-m}, \quad 0<|z|<\infty.$$

Перемножая ряды, находим

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,m!}z^{n-m}\underset{k=n-m}{=\!=}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^k\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(|k|+m)!}\right),$$

так как коэффициент при степени z^{n-m} имеет значение $\frac{1}{n!\,m!}$ независимо от знака $n-m=k$. Ряд сходится в области $0<|z|<\infty$, в которой функция $e^{z+\frac{1}{z}}$ регулярна.

3.135. Разложить функцию $\frac{1}{z-2}$ по степеням z в областях: а) $|z|<2$; б) $2<|z|<\infty$.

Решение. а) Функция $\frac{1}{z-2}$ внутри круга $|z|<2$ регулярна. Поэтому она разлагается в этом круге в ряд Тейлора по степеням z.

Используя формулу для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q|<1$, находим

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \ldots$$

при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. при $|z|<2$. Полученный ряд и будет рядом Тейлора функции $\frac{1}{z-2}$ в силу единственности разложения в ряд Тейлора.

б) В кольце $2<|z|<\infty$ функция $\frac{1}{z-2}$ регулярна, поэтому ее можно разложить в этом кольце в ряд Лорана:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

при $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>2$. В силу единственности разложения этот ряд и будет рядом Лорана функции $\frac{1}{z-2}$, сходящимся при $|z|>2$.

3.136. Разложить в ряд по степеням z функцию $\frac{1}{(z-1)^2}$ в круге $|z|<1$.

Решение. Функция $\frac{1}{1-z}$ в единичном круге $|z|<1$ разлагается в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

как сумма бесконечной геометрической прогрессии. Продифференцировав обе части этого равенства по z, получим

$$\frac{1}{(z-1)^2} = 1 + 2z + \ldots + nz^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}.$$

Данный ряд и будет рядом Тейлора функции $\frac{1}{(z-1)^2}$ в круге $|z|<1$ в силу единственности разложения.

3.137. Разложить функцию $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ в ряд в окрестности точек:

а) $z=0$;

б) $z=i$;

в) $z=1$.

Решение. Функция $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ разлагается на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{z+i}+\frac{\frac{1}{4}}{z-i}. \qquad (*)$$

а) В окрестности точки $z=0$, а именно в круге $|z|<1$, функция $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ регулярна, регулярно и каждое слагаемое в правой части равенства (*). Разложим каждое из слагаемых в ряд Тейлора:

$$\frac{-\frac{1}{2}}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \quad |z|<1,$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{z+i}=\frac{1}{4i}\frac{1}{1-iz}=-\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n, \quad |z|<1,$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{z-i}=-\frac{1}{4i}\frac{1}{1+iz}=\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n, \quad |z|<1.$$

Ряд для функции

$$\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}$$

найдем почленным дифференцированием ряда функции $\frac{1}{z-1}$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-z}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}\underset{k-1=n}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \qquad |z|<1.$$

Таким образом, в круге $|z|<1$ имеем

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n+\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[1+(n+1)-\frac{i^{n+1}}{2}(1-(-1)^n)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[n+2-i^{n+1}\frac{1-(-1)^n}{2}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^{2m}+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\left(p+\frac{3+(-1)^p}{2}\right)z^{2p+1}.$$

Здесь мы выписали отдельно суммы четных и нечетных степеней.

б) В окрестности точки $z=i$ функция

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

не является регулярной, но она регулярна в кольце $0<|z-i|<|1-i|=\sqrt{2}$ (рис. 95). Разложим ее в ряд Лорана по степеням $z-i$.

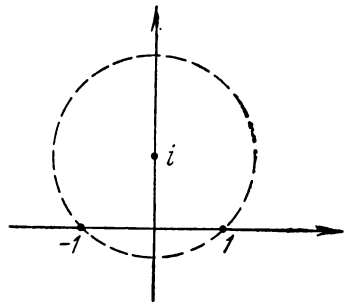


Рис. 95

В формуле (*) первые три слагаемых $-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}$, $\frac{1}{4}\frac{1}{z+i}$ регулярны в круге $|z-i|<\sqrt{2}$, поэтому они разлагаются в ряд по положительным степеням $(z-i)$. Действительно,

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-i-z+i}=\frac{1}{2(1-i)}\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}=$$

$$=\frac{1+i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^n};$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{d}{dz}\frac{\frac{1}{2}}{1-z}=\frac{1+i}{4}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(z-i)^{k-1}}{(1-i)^k}\underset{k-1=n}{=}$$

$$=\frac{(1+i)}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n,$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{4}\frac{1}{2i+z-i}=\frac{1}{4\cdot 2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=$$

$$=-\frac{i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}=-\frac{i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{(z-i)^n}{2^n}$$

при $|z-i|<\sqrt{2}$.

Таким образом,

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{z-i}+\frac{1+i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^n}+$$

$$+\frac{1+i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n-\frac{i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}(z-i)^n=\frac{1}{4}\frac{1}{z-i}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^n\left[\frac{1+i}{4(1-i)^n}+\frac{(n+1)(1+i)}{4(1-i)^{n+1}}-\frac{i^{n+1}}{2^{n+3}}\right].$$

в) В окрестности точки $z=1$ функция разлагается в ряд Лорана, сходящийся в кольце $0<|z-1|<|1-i|=\sqrt{2}$. Первые два слагаемых в формуле (*) уже являются членами ряда Лорана. Функции

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z-i} \text{ и } \frac{1}{4}\frac{1}{z+i}$$

регулярны в круге $|z-1|<\sqrt{2}$, поэтому они разлагаются в ряды по положительным степеням $(z-1)$:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z-i}=-\frac{1}{4}\frac{1}{1-i-(z-1)}=-\frac{1}{4(1-i)}\frac{1}{1-\frac{z-1}{1-i}}=$$

$$=-\frac{1+i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(1-i)^n};$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+i+z-1}=\frac{1}{4(1+i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}}=$$

$$=\frac{1-i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^n}.$$

Следовательно, в кольце $0<|z-1|<\sqrt{2}$ функция

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

представляется рядом

$$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1+i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(1-i)^n}+$$

$$+\frac{1-i}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(1+i)^n}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\left\{-\frac{1+i}{8(1-i)^n}+\frac{1-i}{8(1+i)^n}\right\}.$$

3.138. Разложить в ряд по степеням z функции:

а) $\cos 2z$; б) $\sin(2z-1)$.

Указание. Применить формулу $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

3.139. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(z-a)$ следующие функции:

а) e^{3z-2}, $a=1$; б) $z\cos 2z$, $a=-1$; в) $\sin(z+i)$, $a=i$; г) z^3-z^3+2z-3, $a=2$.

3.140. Разложить в ряд Лорана в области $0 \leqslant |z-a| < \infty$ следующие функции:

а) $e^{\frac{1}{z^2}}$, $a=0$; г) $(z+1)\sin\frac{1}{z+1}$, $a=-1$;

б) $\cos\frac{1}{z+1}$, $a=-1$; д) $e^{\frac{1}{z-1}}(z-1)^3$, $a=1$;

в) $\sin\frac{1}{(z-i)^3}$, $a=i$; е) $(z+i)^2\cos\frac{1}{z+i}$, $a=-i$.

3.141. Разложить в ряд Тейлора или Лорана в окрестности точки $z=a$ следующие функции:

1) $\frac{1}{z-3}$; а) $a=0$, б) $a=3$,

2) $\frac{1}{z(z+2)}$; а) $a=0$, б) $a=-2$,

3) $\frac{1}{(z+1)^3}$; а) $a=0$, б) $a=-1$,

4) $\frac{1}{(z-1)^n}$, $n \geqslant 0$ — целое; а) $a=0$, б) $a=1$,

5) $\frac{z}{(z+1)(z-2)^2}$; а) $a=-1$, б) $a=2$,

6) $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$; а) $a=1$, б) $a=2$.

§ 6. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Нули. Изолированные особые точки. Точка a называется *нулем* n-го порядка регулярной функции $f(z)$, если

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

Для того чтобы функция $f(z)$, регулярная в некоторой окрестности точки a, имела в этой точке нуль n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее представление:

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z), \tag{6.1}$$

где $\varphi(z)$ регулярна в окрестности точки a и $\varphi(a)\neq 0$.

Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки a. Вследствие регулярности в этой окрестности функция разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{-k}}{(z-a)^k}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n. \tag{6.2}$$

Первая сумма, содержащая только отрицательные степени $(z-a)$, называется *главной частью* ряда Лорана.

Точка a называется *устранимой особой точкой*, если в разложении (6.2) отсутствует главная часть, т. е. $A_{-1}=A_{-2}=\ldots=0$. В этом случае особенность устраняется, если доопределить функцию $f(z)$ в точке $z=a$,

положив $f(a)=A_0$. Полученная функция будет регулярной как в окрестности точки a, так и в самой этой точке.

Особая точка a называется *полюсом* функции $f(z)$, если главная часть ряда (6.2) состоит из конечного числа слагаемых, причем, если $A_{-n}\neq 0$, а $A_{-(n+1)}=A_{-(n+2)}=\ldots=0$, то точка a называется *полюсом n-го порядка*. Если же главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество слагаемых, то точка a называется *существенно особой точкой* функции.

Если регулярная функция $f(z)$ имеет в точке a нуль n-го порядка, то функция $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке полюс n-го порядка.

3.142. Найти нули и определить их порядок для следующих функций:

а) $\cos z$; б) $\operatorname{tg}^3 z$; в) $(z^3+1)^2$; г) $\dfrac{(z^2+1)(z^2-3z+2)^2}{z+1}$.

Решение. а) Функция $\cos z$ обращается в нуль в точках

$$z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

А так как в этих точках производная $(\cos z)'=-\sin z$ не равна нулю

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-\cos \pi k=(-1)^{k+1}\neq 0,$$

то это нули первого порядка, т. е. простые нули.

б) Нули функции $\operatorname{tg}^3 z$ совпадают с нулями $\sin^3 z$ и имеют ту же кратность. Функция $\sin z$ имеет в точках $z_k=\pi k$, $k=0$, ± 1, ... простые нули, так как ее производная в этих точках в нуль не обращается: $\cos \pi k=(-1)^k\neq 0$. Поэтому функция $\sin^3 z$ имеет в этих точках нули третьего порядка. Таким образом, точки $z=\pi k$, $k=0$, ± 1, ... являются нулями третьего порядка функции $\operatorname{tg}^3 z$.

в) Функцию $(z^3+1)^2$ можно записать в следующем виде:

$$[(z+1)(z^2-z+1)]^2=(z+1)^2\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Эта функция имеет нули второго порядка в точках $z=-1$, $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в силу формулы (6.1).

г) Запишем функцию

$$\frac{(z^2+1)(z^2-3z+2)^2}{z+1}$$

следующим образом:

$$\frac{(z^2+1)(z^2-3z+2)^2}{z+1}=\frac{(z-i)(z+i)(z-1)^2(z-2)^2}{z+1}.$$

Из этого представления видно, что данная функция имеет два простых нуля в точках $z_1=i$ и $z_2=-i$ и два нуля второго порядка в точках $z_3=1$ и $z_4=2$ (см. формулу (6.1)).

3.143. Найти все особые точки, указать их характер, в случае полюса — его порядок, для функций:

$$\text{а) } \frac{1}{z-z^3}; \quad \text{б) } \frac{z^4}{1+z^4}; \quad \text{в) } \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} \quad \text{г) } e^{\frac{z}{1-z}};$$

$$\text{д) } \frac{\sin z}{z}; \quad \text{е) } \frac{1}{z(1-e^{2z})}; \quad \text{ж) } \operatorname{tg} 2z.$$

Решение. а) Полагая $f(z)=\frac{1}{z-z^3}$, определим нули функции $\frac{1}{f(z)}$:

$$\frac{1}{f(z)}=z-z^3=z(1-z)(1+z).$$

Она имеет три простых нуля в точках: $z_1=0$, $z_2=1$ $z_3=-1$. Следовательно, функция $\frac{1}{z-z^3}$ имеет три простых полюса в этих точках.

б) Нули функции $\frac{1+z^4}{z^4}$ совпадают с нулями ее числителя $1+z^4$. Найдем эти нули:

$$z^4+1=0, \quad z=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos(\pi+2\pi k)+i\sin(\pi+2\pi k)}=$$

$$=\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно,

$$z_{1,\,2,\,3,\,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Эти нули простые, поэтому функция $\frac{z^4}{1+z^4}$ имеет четыре полюса первого порядка в этих точках.

в) Функция $z^3(z^2+4)^2=z^3(z+2i)^2(z-2i)^2$ имеет три нуля:

$z=0$ — третьего порядка,

$z=-2i$ и $z=2i$ — второго.

Поэтому функция $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ имеет три полюса:

в точке $z=0$ — третьего порядка,

в точках $z=-2i$ и $z=2i$ — второго порядка.

г) Функция $e^{\frac{z}{1-z}}$ определена и регулярна всюду, кроме точки $z=1$. Разложим эту функцию в ряд Лорана по степеням $z-1$. Так как

$$\frac{z}{1-z}=-\frac{1-z-1}{1-z}=-1-\frac{1}{z-1},$$

то

$$e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1}e^{-\frac{1}{z-1}} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{(z-1)^k} = e^{-1} - \frac{e^{-1}}{z-1} + \frac{e^{-1}}{2!\,(z-1)^2} - \ldots$$

Главная часть этого разложения — бесконечный ряд. Следовательно, точка $z=1$ является существенно особой точкой функции $e^{\frac{z}{1-z}}$.

д) Особая точка функции $\frac{\sin z}{z}$ при $z=0$. Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$. Так как

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

то

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

В этом разложении главная часть отсутствует, следовательно, точка $z=0$ является устранимой особой точкой функции $\frac{\sin z}{z}$.

е) Определим нули знаменателя функции $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$:

$$z(1-e^{2z}) = 0,$$

откуда

$$z_0 = 0,\ e^{2z} = 1,\ 2z = 2\pi ik,\ z_k = \pi ki,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В точке $z_0=0$ функция $z(1-e^{2z})$ и ее производная $1-e^{2z}-2ze^{2z}$ обращаются в нуль, но вторая производная $-4[1+z]e^{2z}$ не равна нулю. Следовательно, $z_0=0$ — нуль второго порядка. В точках $z_k=\pi ki$, $k\pm 1, \pm 2, \ldots$ производная $1-e^{2z}-2ze^{2z}$ в нуль не обращается, это простые нули.

Таким образом, функция

$$\frac{1}{z(1-e^{2z})}$$

имеет в точке $z_0=0$ полюс второго порядка, а в точках $z_k=\pi ki$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ — простые полюсы.

ж) Знаменатель функции

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{\sin 2z}{\cos 2z}$$

обращается в нуль в точках

$$2z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Эти нули простые. Поэтому функция $\operatorname{tg} 2z$ имеет простые полюсы в точках $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$.

3.144. Найти все нули и определить их порядок для функций:

а) $(z^2 + 2z + 1)^3$, в) $\cos 2z$,
б) $\sin^3 3z$, г) $\operatorname{ctg}^4 z$.

3.145. Найти все особые точки данных функций, определить их характер, для полюсов указать порядок

а) $\frac{1}{z^2 - 4z + 3}$, г) $\frac{z^2 + 1}{\sin^2 z \cos^2 z}$,

б) $\frac{\sin z}{(z + \pi)(z^2 - 1)}$, д) $\sin \frac{1}{z}$,

в) $\frac{2z^2 - 1}{z^5 (z^2 + 9)^3}$, е) $\frac{1}{\cos z - 1}$.

2. Вычеты. *Вычетом функции* $f(z)$ в изолированной особой точке a называется коэффициент A_{-1} ряда Лорана этой функции (6.2):

$$\operatorname{res}_a f(z) = A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz,$$

где C — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку a, внутри которого функция $f(z)$ регулярна, за исключением точки a. Вычеты вычисляются по следующим формулам. Если a — простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z). \tag{6.3}$$

В частности, если $f(z)$ представляется в виде $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в точке a, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, но $\psi'(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_a \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{6.4}$$

Для полюса порядка n

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - a)^n f(z)\} \tag{6.5}$$

В тех случаях, когда разложение $f(z)$ в ряд Лорана (6.2) не вызывает затруднений, проще, конечно, пользуясь определением, взять коэффициент A_{-1} этого ряда.

3.146. Найти вычеты в каждой из особых точек следующих функций:

а) $\frac{1}{z - z^3}$; б) $\frac{z^4}{1 + z^4}$; в) $\frac{1}{z^3 (z^2 + 4)^2}$;

г) $e^{\frac{z}{1-z}}$; д) $\frac{\sin z}{z}$; е) $\operatorname{tg} 2z$; ж) $\frac{1}{z(1 - e^{2z})}$.

Решение. а) Функция $\frac{1}{z - z^3}$ имеет три простых полюса в в точках $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$ (см. **3.143**). Вычеты в простых

полюсах найдем по формуле (6.4), положив $\varphi(z)=1$, $\psi(z)=z-z^3$. Так как $\psi'(z)=1-3z^2$, то

$$\operatorname{res}_0\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{1-3z^2}\Big|_{z=0}=1,$$

$$\operatorname{res}_{-1}\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{1-3z^2}\Big|_{z=-1}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res}_1\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{1-3z^2}\Big|_{z=1}=-\frac{1}{2}.$$

б) Функция $\frac{z^4}{1+z^4}$ имеет четыре простых полюса в точках

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\quad z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\quad z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{и}\quad z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

(см. **3.143**). Вычеты в этих точках найдем по формуле (6.4), полагая $\varphi(z)=z^4$, $\psi(z)=1+z^4$. Тогда $\psi'(z)=4z^3$ и мы имеем

$$\operatorname{res}_{z_k}\frac{z^4}{1+z^4}=\frac{z^4}{4z^3}\Big|_{z=z_k}=\frac{1}{4}z_k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{z_1}\frac{z^4}{1+z^4}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i);\quad \operatorname{res}_{z_3}\frac{z^4}{1+z^4}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i);$$

$$\operatorname{res}_{z_2}\frac{z^4}{1+z^4}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i);\quad \operatorname{res}_{z_4}\frac{z^4}{1+z^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i).$$

Заметим, что $z_3=\bar{z}_2$, а $z_4=\bar{z}_1$, поэтому и вычеты в этих точках получились сопряженными. Здесь существенно, конечно, что коэффициенты в числителе и знаменателе действительные*.

в) Особыми точками функции $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ являются: $z_1=0$ — полюс третьего порядка и $z_{2,3}=\pm 2i$ — полюсы второго порядка. Вычеты найдем по формуле (6.5), полагая в первом случае $n=3$, во втором и третьем $n=2$. Мы получим

---

*Если функция $f(z)$ на действительной оси принимает действительные значения и z_0 и $\bar{z}_0$ — ее особые точки, то

$$\operatorname{res}_{\bar{z}_0} f(z)=\overline{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}\quad\text{и}\quad \operatorname{res}_{z_0} f(z)+\operatorname{res}_{\bar{z}_0} f(z)=2\operatorname{Re}\operatorname{res}_{z_0} f(z),\ \operatorname{Im} z_0>0.$$

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{(z^2+4)^2}\right\}' =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left\{4\frac{5z^2-4}{(z^2+4)^4}\right\} = -\frac{1}{32},$$
$$\operatorname{res}_{2i} \frac{1}{z^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left\{(z-2i)^2\frac{1}{z^3(z-2i)^2(z+2i)^2}\right\} =$$
$$= \lim_{z\to 2i}\left\{\frac{1}{z^3(z+2i)^2}\right\}' = \lim_{z\to 2i}\left\{-\frac{5z+6i}{z^4(z+2i)^3}\right\} = \frac{1}{64};$$
$$\operatorname{res}_{-2i}\frac{1}{z^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{64}.$$

Последний вычет можно написать без вычислений, так как $z_3 = \bar{z}_2$, а $\frac{1}{64}$ — действительное число — сопряжено самому себе.

г) В задаче **3.143** мы нашли ряд Лорана функции $e^{\frac{z}{1-z}}$. Он имеет вид

$$e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(z-1)^n} = e^{-1} - \frac{e^{-1}}{z-1} + \ldots,$$

поэтому $A_{-1} = -e^{-1}$ и $\operatorname{res}_1 e^{\frac{z}{1-z}} = -e^{-1}$ по определению вычета.

д) Функция $\frac{\sin z}{z}$ имеет в точке $z=0$ устранимую особую точку. Следовательно, ее ряд Лорана не имеет главной части, т. е. $A_{-1}=0$ и $\operatorname{res}_0\frac{\sin z}{z}=0$.

е) Функция $\operatorname{tg} 2z$ имеет простые полюсы в точках $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k=0, \pm 1; \ldots$ (см. **3.143**). Вычет в точке z_k найдем по формуле (6.4)

$$\operatorname{res}_{z_k}\operatorname{tg} 2z = \left[\frac{\sin 2z}{(\cos 2z)'}\right]_{z_k} = \frac{\sin 2z_k}{-2\sin 2z_k} = -\frac{1}{2},\quad k=0; \pm 1; \ldots$$

ж) Функция $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$ имеет в точке $z=0$ полюс второго порядка и простые полюсы в точках $z_k = \pi i k$, $k = \pm 1; \pm 2; \ldots$ Вычет в точке $z=0$ найдем по формуле (6.5):

$$\operatorname{res}_0\frac{1}{z(1-e^{2z})} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{1}{z(1-e^{2z})}\right] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{1-e^{2z}}\right)' =$$
$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{1-1-2z-2z^2-\frac{8}{3!}z^3-\ldots}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{-2\left(1+z+\frac{2}{3}z^2+\ldots\right)}\right)' =$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2\left(1+z+\frac{2}{3}z^2+\ldots\right)^2}\left(1+\frac{4}{3}z+\ldots\right) = \frac{1}{2}.$$

Здесь использовано разложение e^{2z} в ряд по степеням z.

Вычеты в точках $z_k = \pi ik$ найдем по формуле (6.4):

$$\operatorname{res}_{\pi ik} \frac{1}{z(1-e^{2z})} = \frac{1}{1-e^{2z}-2ze^{2z}}\Big|_{z=\pi ik} = -\frac{1}{2\pi ike^{2\pi ik}} = \frac{i}{2\pi k},$$

$$k = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$$

3.147. Найти вычеты во всех особых точках функций:

а) $\dfrac{1}{\sin z - \dfrac{1}{2}}$.

б) $\dfrac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}$.

в) $\dfrac{1}{(z^2+4)^2(z+2)^3}$.

г) $\dfrac{\sin 3z}{\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$.

д) $\dfrac{1}{\cos z}$.

е) $\dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}}$.

3. Вычисление интегралов с помощью вычетов. *Основная теорема о вычетах.* Если функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих в области D, то

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z), \qquad (6.6)$$

где L — граница области D.

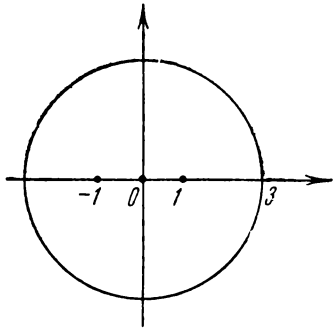


Рис. 96

3.148. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{dz}{z^5 - z^3},$$

где L — окружность $|z| = 3$.

Решение. Особыми точками подынтегральной функции

$$\frac{1}{z^5-z^3} = \frac{1}{z^3(z-1)(z+1)}$$

являются: $z_1 = 0$ — полюс третьего порядка, $z_{2,3} = \pm 1$ — полюса первого порядка. Все эти точки лежат внутри контура интегрирования (рис. 96); следовательно, в силу формулы (6.6) имеем

$$\int_L \frac{dz}{z^5-z^3} = 2\pi i\left[\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^5-z^3} + \operatorname{res}_1 \frac{1}{z^5-z^3} + \operatorname{res}_{-1} \frac{1}{z^5-z^3}\right].$$

Вычеты в точках $z = \pm 1$ определяем по формуле (6.4):

$$\operatorname{res}_1 \frac{1}{z^5-z^3} = \frac{1}{5z^4-3z^2}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{z^5-z^3} = \frac{1}{5z^4-3z^2}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{2}.$$

Вычет в точке $z=0$ находим по формуле (6.5):

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^5-z^3}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\frac{1}{z^5-z^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^2-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{6z^2+2}{(z^2-1)^3}\right]=-1.$$

Таким образом,

$$\int_L \frac{dz}{z^5-z^3}=2\pi i\left[-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=0.$$

3.149. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

где L — окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция имеет три особые точки: $z=1$ — полюс второго порядка, $z_{2,3}=\pm i$ — простые полюса. Внутри контура L (рис. 97) находятся точки $z_1=1$ и $z_2=i$. Точка $z_3=-i$ лежит вне этого контура. По основной теореме о вычетах

$$\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left[\operatorname{res}_1\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{res}_i\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right].$$

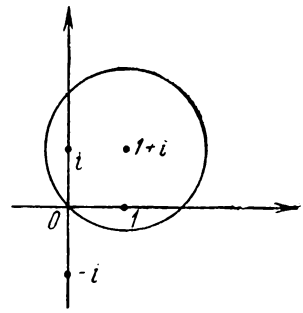


Рис. 97

Вычет в точке $z_1=1$ находим по формуле (6.5):

$$\operatorname{res}_1\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2},$$

а вычет в точке $z=i$ — по формуле (6.4):

$$\operatorname{res}_i\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{2i(i-1)^2}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\int_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=-\frac{\pi i}{2}.$$

3.150. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z-1}\,dz,$$

где L — ромб с вершинами в точках $z_1=2$, $z_2=i$, $z_3=-2$, $z_4=-i$.

Решение. Особые точки функции $\frac{\operatorname{tg} z}{z-1}$: $z_0'=1$, $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \ldots$ — все простые полюсы. Внутри ромба L (рис. 98) лежат точки $z_0'=1$, $z_0=\frac{\pi}{2}$,

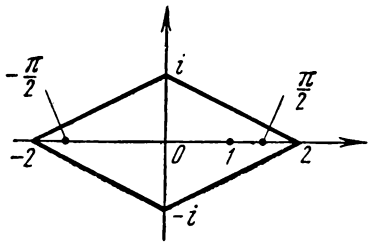


Рис. 98

$z_{-1}=-\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{z-1}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{res}_1 \frac{\operatorname{tg} z}{z-1} + \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} z}{z-1} + \operatorname{res}_{-\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} z}{z-1}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[(\operatorname{tg} z)_{z=1} + \left(\frac{\sin z}{z-1}\cdot\frac{1}{-\sin z}\right)_{z=\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\sin z}{z-1}\cdot\frac{1}{-\sin z}\right)_{z=-\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\operatorname{tg} 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}-1} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}\right] = 2\pi i\left[\operatorname{tg} 1 - \frac{2\pi}{\pi^2-4}\right].$$

Вычислить следующие интегралы:

3.151. $\displaystyle\int_L \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+9)}$,

где L — окружность $|z+1|=2$.

3.152. $\displaystyle\int_L \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$,

где L — окружность $|z|=1$.

3.153. $\displaystyle\int_L \frac{z^3 dz}{4z^4+1}$,

где L — окружность $|z|=1$.

3.154. $\displaystyle\int_L \frac{\operatorname{sh} 2z}{(z-1)(z^2+7z+12)^3}\,dz$,

где L — прямоугольник с вершинами в точках $-1+i$, $-1-i$, $3+i$, $3-i$.

3.155. $\displaystyle\int_L \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$,

где L — окружность $|z-1|=5$.

3.156. $\int\limits_L \frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz$,

где L — окружность $|z+i|=\frac{3}{2}$.

3.157. $\int\limits_L \frac{ze^{2z}dz}{z^4+8z^2-9}$,

где L — окружность $|z+i\sqrt{2}|=2$.

3.158. $\int\limits_L e^{\frac{z}{1-z}}dz$,

где L — окружность $|z|=2$.

3.159. $\int\limits_L z\sin\frac{1}{z^2}\,dz$,

где L — прямоугольник с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $1-2i$, $-1-2i$.

4. Вычисление несобственных интегралов. Основная теорема о вычетах в ряде случаев переносится на интегралы по неограниченным контурам. Для оценок отдельных интегралов часто применяется следующая *лемма Жордана.* Если C_R — дуга окружности $|z|=R$, $\operatorname{Im} z>a$, и если

$$M_R=\max_{C_R}|f(z)|$$

стремится к нулю при $R\to\infty$, то для любого положительного числа α

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,e^{i\alpha z}\,dz=0.$$

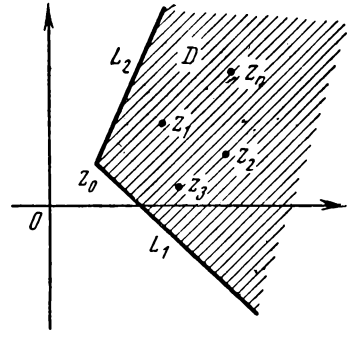


Рис. 99

3.160. Доказать теорему. Пусть область D — внутренность угла $\varphi_1<\arg(z-z_0)<\varphi_2$, ограниченная линией L, состоящей из лучей L_1: $\arg(z-z_0)=\varphi_1$ и L_2: $\arg(z-z_0)=\varphi_2$, и пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и непрерывна на ее границе, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих в D (рис. 99). Обозначим $M_R=\max_{C_R}|f(z)|$, где C_R — дуга окружности $|z-z_0|=R$, лежащая в D. Тогда если $\lim\limits_{R\to\infty} RM_R=0$, то

$$\int\limits_L f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из C_R и L_R — части L, лежащей в круге $|z-z_0|\leqslant R_0$. Выбрав n настолько большим, чтобы все точки $z_1, \ldots, z_n$ лежали внутри контура и применяя к этому контуру основную теорему о вычетах, получим

$$\int_{L_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z). \qquad (*)$$

Оценим интеграл по дуге окружности C_R, учитывая, что на ней $z = Re^{i\varphi}$, $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$ и $|dz| = Rd\varphi$:

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \leqslant \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_R R d\varphi = RM_R(\varphi_2 - \varphi_1).$$

При $R \to \infty$ по условию $RM_R \to 0$, а $(\varphi_2 - \varphi_1)$ — величина постоянная, поэтому

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Переходя теперь к пределу в равенстве (*) при $R \to \infty$ и учитывая, что правая часть при этом не меняется, получим в пределе требуемое равенство:

$$\int_{L} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

3.161. Доказать следующее утверждение. Если дробно-рациональная функция $\frac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов на действительной оси и степень числителя $P(z)$, по крайней мере, на две единицы меньше степени знаменателя $Q(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули знаменателя, лежащие в верхней полуплоскости.

Решение. Это утверждение вытекает как частный случай из теоремы задачи **3.160**, если принять $z_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, тогда L совпадает с действительной осью. По условию

$$\frac{P(z)}{Q(z)}$$

не имеет на L полюсов, т. е. непрерывна. Область D является верхней полуплоскостью, в ней дробно-рациональная функция имеет конечное число особых точек (полюсов), так как их конечное число на всей плоскости (знаменатель — многочлен, он обращается в нуль не более чем в n точках, где n — его степень). Наконец, поскольку степень знаменателя больше степени числителя, то на C_R при подстановке $z = Re^{i\varphi}$ и умножении на R мы

получим в знаменателе многочлен от R степени по крайней мере на одну единицу большей, чем в числителе. Поэтому при $R\to\infty$ будет выполнено условие $RM_R\to 0$. Записывая для данного случая заключение теоремы, мы получим требуемое равенство.

3.162. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Решение. Дробно-рациональная функция $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ удовлетворяет требованиям задачи **3.161**. Ее особые точки $z_1=i$, $z_2=-i$ не лежат на действительной оси, и степень числителя 0, знаменателя 6. В силу утверждения задачи **3.161**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\operatorname{res}_i\frac{1}{(z^2+1)^3}=2\pi i\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]=$$

$$=\pi i\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=\frac{3}{8}\pi.$$

Обратите внимание на то, что вычеты берутся здесь только в особых точках из верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

3.163. Доказать, что если функция $f(z)$ комплексного переменного z:

1) регулярна во всей верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z\geqslant 0$), за исключением конечного числа полюсов,

2) не имеет полюсов на действительной оси,

3) $M_R=\max_{C_R}|f(z)|$ при $R\to\infty$, где C_R — полуокружность $z=Re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}\,dx=2\pi i\sum\operatorname{res}f(z)e^{i\alpha z}\quad(\alpha>0),$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах, находящихся в верхней полуплоскости.

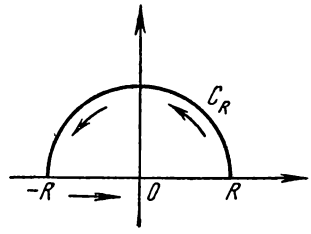


Рис. 100

Решение. Рассмотрим замкнутый контур L, состоящий из отрезка действительной оси $(-R, R)$ и полуокружности $z=Re^{i\varphi}$, проходимый в положительном направлении (рис. 100). Выберем радиус R так, чтобы все полюсы функции $f(z)e^{i\alpha z}$, расположенные в верхней полуплоскости, содержались внутри контура L. По основной теореме о вычетах получим

$$\int_L f(z)\,d^{i\alpha z}\,dz=\int_{-R}^{R}f(x)e^{i\alpha x}\,dx+\int_{C_R}f(z)e^{i\alpha z}\,dz=$$

$$=2\pi i\sum\operatorname{res}f(z)e^{i\alpha z},$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах, находящихся в верхней полуплоскости. Если в этом равенстве $R \to \infty$, то

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx, \quad \int_{C_R} f(z)\, e^{i\alpha x}\, dz \to 0$$

в силу леммы Жордана, условия которой здесь выполнены. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{res} f(z)\, e^{i\alpha z},$$

что и требовалось доказать.

3.164. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx.$$

Решение. В силу четности функции $\frac{\cos x}{1+x^2}$ и нечетности $\frac{\sin x}{1+x^2}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx + i\, \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx.$$

К последнему интегралу применим утверждение предыдущей задачи, так как

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

удовлетворяет всем указанным там требованиям. В результате получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = \pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2} =$$

$$= \pi i \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{2} e^{-1} = \frac{\pi}{2e}.$$

Заметим, что учитывался только полюс, лежащий в верхней полуплоскости. Вычет подсчитан по формуле (6.4).

3.165. Вычислить интеграл

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+4}\, dz,$$

где путь интегрирования — прямая $x = 2$, проходимая снизу вверх.

Решение. Рассмотрим контур Γ_R, состоящий из дуги C_R окружности $|z|=R$, $R\geqslant 3$ и отрезка прямой $x=2$ (рис. 101) с концами в точках $2-iA$, $2+iA$.

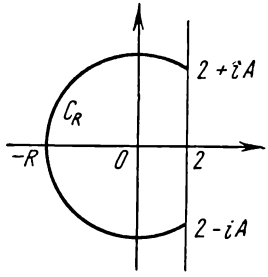


Рис. 101

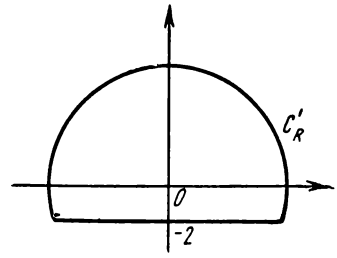


Рис. 102

По основной теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz=2\pi i\left[\operatorname{res}_{2i}\frac{e^{tz}}{z^2+4}+\operatorname{res}_{-2i}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{2it}}{4i}+\frac{e^{-2it}}{-4i}\right]=i\pi\sin 2t.$$

В интеграле

$$\int\limits_{C_R}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz$$

сделаем замену $z=+i\zeta$ при этом линия C_R (рис. 102) перейдет в дугу C'_R окружности $|\zeta|=R$, $\operatorname{Im}\zeta\geqslant -2$ и интеграл примет вид

$$\int\limits_{C_R}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz=\int\limits_{C'_R}\frac{e^{it\zeta}}{-\zeta^2+4}\,i\,d\zeta.$$

К этому интегралу применима лемма Жордана при любом положительном t. Поэтому

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R}\frac{e^{it\zeta}}{-\zeta^2+4}\,i\,d\zeta=0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{2-iA}^{2+iA}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz=\lim_{R\to\infty}\left[\int\limits_{\Gamma_R}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{C_R}\frac{e^{tz}}{z^2+4}\,dz\right]=i\pi\sin 2t.$$

3.166. Показать, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \qquad (\alpha > 0).$$

Решение. Функция $\frac{\sin \alpha x}{x}$ — четная, поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_{R, r} = \int_{\Gamma_{R, r}} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\, dz,$$

где $\Gamma_{R, r}$ образован верхними половинами окружностей $C_R: |z| = R$ и $C_r: |z| = r$ и отрезками действительной оси $[-R, -r]$ и

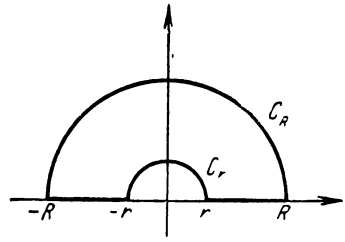


Рис. 103

$[r, R]$ (рис. 103). Мы можем записать

$$I_{R, r} = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\alpha x}}{x}\, dx + \int_r^R \frac{e^{i\alpha x}}{x}\, dx + \int_{C_r} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\, dz + \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\, dz.$$

Интеграл $\int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\, dz$ при $R \to \infty$ стремится к нулю в силу леммы Жордана, так как

$$\max_{|r| = R} |f(z)| = \max_{|z| = R} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R} \to 0$$

при $R \to \infty$, а $\alpha > 0$.

Вычислим

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\, dz.$$

Разложим функцию

$$\frac{e^{i\alpha z}}{z}$$

в ряд Лорана по степеням z:

$$\frac{e^{i\alpha z}}{z}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i\alpha z)^k=$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{i\alpha}{1!}-\frac{\alpha^2 z}{2!}+\ldots+\frac{(i\alpha)^k z^{k-1}}{k!}+\ldots=\frac{1}{z}+\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — регулярная в окрестности нуля функция. Имеем

$$\int_{C_r}\frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz=\int_{C_r}\frac{dz}{z}+\int_{C_r}\varphi(z)\,dz.$$

Ясно, что

$$\left|\int_{C_r}\varphi(z)\,dz\right|\leqslant\max_{C_r}|\varphi(z)|\int_{C_r}|dz|=M_r\int_0^{\pi}r\,d\varphi=M_r\pi r\leqslant Mr,$$

где M — некоторая постоянная. Следовательно,

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi(z)\,dz=0.$$

Далее

$$\int_{C_r}\frac{dz}{z}=\int_{\pi}^{0}\frac{re^{i\varphi}i\,d\varphi}{re^{i\varphi}}=i\int_{\pi}^{0}d\varphi=-i\pi,$$

поэтому

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz=-i\pi.$$

Интегралы по отрезкам $[-R,\ -r]$ и $[r,\ R]$ дают

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx+\int_{r}^{R}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx=\int_{R}^{r}\frac{e^{-i\alpha x}}{x}\,dx+\int_{r}^{R}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx=$$

$$=\int_{r}^{R}\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{x}\,dx=2i\int_{r}^{R}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

(в первом интеграле мы заменили x на $-x$).

Таким образом,

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}I_{R,r}=\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left\{\int_{-R}^{-r}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx+\int_{r}^{R}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx\right\}+$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz+\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz=2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx-i\pi.$$

С другой стороны, функция

$$\frac{e^{i\alpha z}}{z}$$

внутри контура $\Gamma_{R,r}$ регулярна, поэтому $I_{R,r}=0$ при всех R, r. Это значит, что

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx - i\pi = 0,$$

откуда находим

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислить следующие интегралы.

3.167. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ **3.169.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}.$

3.168. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$ **3.170.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$

Указание. См. задачу **3.161.**

3.171.

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx.$$

Указание. Рассмотреть интеграл от функции

$$\frac{ze^{iz}}{z^2+1}$$

(см. задачу **3.163**).

3.172.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx.$$

Указание. Рассмотреть интеграл от функции $\frac{e^{iz}}{1+z^4}$.

3.173.

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}}{(z+1)(z-3)}\,dz,$$

где путь интегрирования — прямая $x=1$, проходимая снизу вверх.

Указание. См. задачу **3.165.**

3.174. Вычислить интегралы Френеля

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx.$$

Указание. Применить теорему задачи **3.160** к функции $f(z)=e^{iz^2}$, полагая $z_0=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$. Учесть регулярность $f(z)$ внутри угла. При интегрировании по лучу $\varphi=\frac{\pi}{4}$ использовать значение интеграла Пуассона

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5. Логарифмические вычеты. Принцип аргумента. *Логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно контура L называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{6.7}$$

Логарифмический вычет равен числу полных оборотов вокруг нуля вектора $w=f(z)$, когда точка z опишет контур L в положительном направлении.

Принцип аргумента. Если $f(z)$ — регулярная функция внутри контура L и на нем, за исключением конечного числа полюсов внутри L, не имеет на этом контуре ни одного нуля или полюса, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P, \tag{6.8}$$

где N — число нулей, P — число полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри L. Каждый нуль и полюс считается столько раз, какова его кратность.

Если, в частности, $f(z)$ регулярна внутри L, то $P=0$, из принципа аргумента вытекает, что внутри L она содержит столько нулей, сколько раз вектор $w=f(z)$ проделает полный оборот вокруг начала, когда точка z пройдет весь контур L в положительном направлении.

3.175. Доказать, что если $f(z)$ имеет в точке $z=a$ нуль порядка n или полюс порядка k, то логарифмическая производная имеет в этой точке простой полюс. Найти его вычет.

Решение. Если $z=a$ нуль порядка n, то функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z), \quad \varphi(a)\neq 0.$$

Отсюда

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-\alpha)^{n-1}\varphi(z)+(z-a)^n\varphi'(z)}{(z-a)^n\varphi(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Второе слагаемое—регулярная к окрестности точки a функция (в силу $\varphi(a)\neq 0$) — раскладывается в ряд Тейлора в этой окрестности:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots$$

Отсюда по определению и вытекает, что $z=a$ — полюс первого порядка функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$, причем

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = n$$

— коэффициент A_{-1} разложения Лорана этой функции.

Аналогично, в случае полюса

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k} = (z-a)^{-k}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ регулярна в окрестности точки a и $\varphi(a) \neq 0$ и ∞. Поэтому, рассуждая, как и выше, получим

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \ldots,$$

т. е. $z=a$ — простой полюс для

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

и

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = -k.$$

Заметим, что формула (6.8) получается из доказанного применением основной теоремы о вычетах к контуру L.

3.176. Найти логарифмический вычет функции

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{(z^3+8)(z+4)}$$

относительно контура $|z|=3$.

Решение. Внутри контура функция $f(z)$ имеет один нуль кратности 2 и три простых полюса, в точках $z_1=-2$, $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ (корни уравнения $z^3+8=0$). Полюс $z=-4$ находится вне данного контура L.

Следовательно, по формуле (6.8) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2-3 = -1.$$

3.177. Доказать *теорему Руше*. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — регулярные функции в замкнутой области D, ограниченной контуром L, и во всех точках контура L выполняется неравенство $|f(z)| > |\varphi(z)|$, то $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ имеют внутри L одинаковое число нулей. Каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Доказательство. Заметим сначала, что ни $f(z)$ ни $f(z)+\varphi(z)$ на L не имеют нулей, так как по условию на контуре

$$|f(z)| > |\varphi(z)| \geqslant 0, \quad |f(z)+\varphi(z)| \geqslant |f(z)| - |\varphi(z)| > 0.$$

Поэтому к этим функциям можно применить принцип аргумента. Обозначим $\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)$ — приращение аргумента $f(z)$ при обходе точкой z контура L в положительном направлении. Вследствие принципа аргумента

$$\tilde{N} = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg} (f(z) + \varphi(z)),$$

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg} f(z),$$

где $\tilde{N}$ и N — число нулей внутри L функций $f(z) + \varphi(z)$ и $f(z)$. Преобразуем правую часть первого равенства:

$$\tilde{N} = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg}\left[f(z)\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_L \left\{\operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg} f(z) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = N + \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right).$$

Но по условию на контуре $L \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$, поэтому точка $w = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ при любом $z \in L$ не может удалиться от точки $w = 1$ на расстояние, большее единицы (рис. 104). Следовательно, когда точка z пробегает контур L, вектор $w = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ заключен внутри окружности с центром в 1 и радиусом 1 и не может поэтому сделать ни одного оборота вокруг начала $w = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = 0,$$

а тогда $\tilde{N} = N$, что и доказывает теорему.

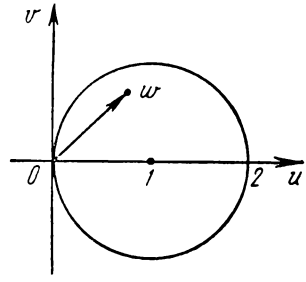


Рис. 104

3.178. Найти число корней многочлена $P(z) = z^5 + 5z - 1$, лежащих в круге $|z| < 1$; в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение. Обозначим $f(z) = 5z$ и $\varphi(z) = z^5 - 1$. На окружности $|z| = 1$ будет выполнено:

$$|f(z)| = 5, \quad |\varphi(z)| \leqslant |z|^5 + 1 = 2;$$

т. е.

$$|f(z)| > |\varphi(z)|.$$

По теореме Руше функция

$$P(z) = f(z) + \varphi(z)$$

имеет внутри окружности $|z|=1$ столько же нулей, сколько функция $f(z)=5z$, т. е. ровно один нуль, причем на самой окружности $|z|=1$ многочлен корней не имеет.

Рассмотрим теперь окружность $|z|=2$, на ней $|z^5|=|z|^5=32$, $|5z-1|\leqslant|5z|+1=11$, т. е. $|z^5|>|5z-1|$.

Следовательно, по теореме Руше $P(z)$ имеет в круге $|z|<2$ столько же нулей, сколько $f(z)=z^5$, т. е. пять нулей (учитывая кратность). Сопоставляя полученные результаты, мы видим, что все пять корней многочлена $P(z)$ лежат в круге $|z|<2$, причем один лежит в круге $|z|<1$, а остальные четыре — в кольце $1<|z|<2$.

ГЛАВА IV

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ГАММА-ФУНКЦИЯ

1. Основные формулы. *Гамма-функция* $\Gamma(z)$ комплексного аргумента z при $\operatorname{Re} z > 0$ определяется формулой

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{1.1}$$

Этот интеграл абсолютно сходится в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и представляет там регулярную функцию.

Формула приведения для гамма-функции

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{1.2}$$

позволяет определить $\Gamma(z)$ в полосе $-1 < \operatorname{Re} z \leqslant 0$, так как при этом $0 < \operatorname{Re}(z+1) \leqslant 1$ и $\Gamma(z+1)$ определяется из (1.1). Применяя формулу приведения несколько раз к $\Gamma(z+n)$, определяют $\Gamma(z)$ в полосе $-n < \operatorname{Re} z \leqslant -n+1$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}. \tag{1.3}$$

Полученная функция регулярна на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), в которых $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы.

При использовании гамма-функции важную роль играют формула дополнения

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{1.4}$$

и формулы для логарифмической производной от $\Gamma(z)$:

$$\frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{1+t} \right] \frac{dt}{t}, \tag{1.5}$$

(формула Коши)

$$\frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1-t}\, dt - \gamma, \tag{1.6}$$

(формула Гаусса)

где $\gamma = 0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера.

4.1. Вывести формулу приведения (1.2) при $\operatorname{Re} z > 0$.

Решение. Подставляя в формулу (1.1) $z+1$ вместо z, находим

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt.$$

Интегрируем по частям:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z),$$

так как $t^z e^{-t}\Big|_0^\infty = 0$. В самом деле,

$$t^z = e^{z \ln t} = e^{(x+iy)\ln t} = e^{x \ln t}[\cos(y \ln t) + i \sin(y \ln t)]$$

и

$$|t^z| = e^{x \ln t}, \quad |t^z e^t| = e^{x \ln t - t}.$$

Ввиду того, что по условию $x = \operatorname{Re} z > 0$, при $t \to 0$ и $t \to \infty$ $|t^z e^{-t}| \to 0$. Значит и $(t^z e^{-t})_{t=0} = 0$, и $(t^z e^{-t})_{t=\infty} = 0$.

Итак, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, что и требовалось доказать.

4.2. Показать, что $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$ можно определить одним из интегралов:

$$\text{а)}\ \Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt,$$

$$\text{б)}\ \Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt.$$

Указание. Сделать в (1.1) замену переменной для а) $u = e^{-t}$, для б) $u = \sqrt{t}$.

4.3. Доказать формулу

$$\frac{\Gamma(z)}{s^z} = \int_0^\infty e^{-su} u^{z-1} du, \quad s > 0, \ \operatorname{Re} z > 0.$$

Указание. Сделать замену $t = su$ в формуле (1.1).

4.4. Показать справедливость тождества

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}.$$

Указание. Положить в (1.4) $z = \frac{1}{2} + w$.

4.5. Используя формулы (1.4) и (1.2), показать справедливость равенств:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z},$$

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}.$$

4.6. Найти вычеты гамма-функции в полюсах $z=-k\,(k=0, 1, 2, \ldots)$.

4.7. Разлагая функцию $\frac{1}{1-t}$ в формуле Гаусса (1.6) в ряд по степеням t, записать разложение в ряды функций $\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}$ и $\ln\Gamma(z)$.

Решение.

$$\frac{1-t^{z-1}}{1-t}=(1-t^{z-1})(1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots)=\sum_{k=0}^{\infty}(t^k-t^{z+k-1}).$$

Интегрируя это разложение почленно от 0 до 1 и учитывая равенство (1.6), будем иметь

$$\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{z+k}\right)-\gamma.$$

Это и есть искомое разложение в ряд логарифмической производной от гамма-функции. Интегрируя его почленно от 1 до z, получим разложение для $\ln\Gamma(z)$:

$$\ln\Gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{k+1}-\ln\frac{z+k}{k+1}\right)-$$

$$-\gamma(z-1).$$

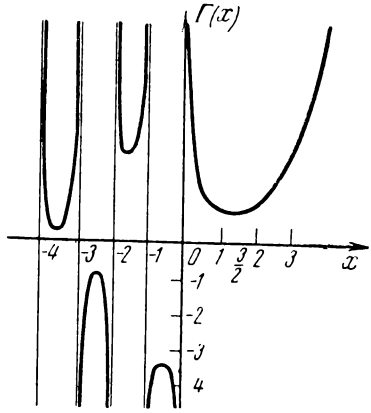


Рис. 105

2. Гамма-функция действительного аргумента. Функция $\Gamma(x)$ определяется формулами (1.1) и (1.3) при $z=x$, т. е.

$$\begin{cases}\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt, & x>0;\\ \Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}, & -n<x<-n+1.\end{cases}\tag{1.7}$$

Разумеется, все формулы п. 1 справедливы, в частности, при $z=x$. Общий вид графика функции $\Gamma(x)$ показан на рис. 105.

4.8. Доказать, что $\Gamma(1)=1$ и $\Gamma(2)=1$.

Решение. Полагая в интеграле (1.7) $x=1$ и интегрируя, будем иметь:

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=0-(-1)=1.$$

Если теперь в формулу приведения (1.2) подставить $z=1$, то получим $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(1)=1$.

4.9. Доказать, что $\Gamma(n+1)=n!$.

Решение. По формуле приведения

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=$$
$$=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots$$
$$\ldots=n(n-1)(n-2)\ldots 2\Gamma(2)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1=n!$$

4.10. Найти $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Подставив в формулу дополнения (1.4) $z=\frac{1}{2}$, найдем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}};\quad \text{т. е.}\quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi.$$

Заметим, что при любом положительном x подынтегральная функция в (1.7) также положительна, поэтому $\Gamma(x)>0$ при $x>0$, в частности, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$. Значит, извлекая корень, получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Замечание. Этот результат позволяет сразу получить значение известного интеграла Эйлера—Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt$. В самом деле, полагая $z=\frac{1}{2}$ в формуле б) задачи **4.2**, обнаружим, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.11. Показать, что если n — целое положительное число, то

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\ *$$

Указание. Использовать формулу (1.2) и результат задачи **4.10**.

4.12. Найти $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Используя определение $\Gamma(x)$ для отрицательных x при $n=1$, получим

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}.$$

---

* Символом $N!!$ обозначается произведение чисел одной четности с N от 1 или 2 до N. Например, $5!!=1\cdot 3\cdot 5$, $8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$.

4.13. Доказать, что

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}.$$

4.14. Вычислить пределы

$$\lim_{x\to+0}\Gamma(x) \text{ и } \lim_{x\to-0}\Gamma(x).$$

Решение. Из формулы (1.2) следует, что

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

При $x\to 0$ $\Gamma(x+1)\to\Gamma(1)=1$, поэтому

$$\lim_{x\to+0}\Gamma(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\Gamma(x+1)}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-0}\Gamma(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\Gamma(x+1)}{x}=-\infty.$$

4.15. Вычислить пределы $\lim\limits_{x\to-n+0}\Gamma(x)$ и $\lim\limits_{x\to-n-0}\Gamma(x)$, где n — целое положительное число, используя формулу (1.3) и результат задачи **4.14.**

4.16. Показать, что на отрезке [1, 2] функция $\Gamma(x)$ имеет минимум.

Указание. Применить теорему Ролля, дифференцируя (1.7) под знаком интеграла; показать, что $\Gamma''(x)>0$ при $x>0$.

4.17. С точностью 0,01 определить значения $\Gamma(2{,}58)$, $\Gamma(0{,}2)$, $\Gamma(-3{,}25)$.

Указание. Использовать формулу (1.2) и таблицу на стр. 506.

4.18. Найти следующие значения гамма-функции с точностью 0,01:

$\Gamma(2{,}42)$; $\Gamma(3{,}5)$; $\Gamma(0{,}7)$; $\Gamma(-0{,}28)$; $\Gamma(-1{,}43)$; $\Gamma(-3{,}5)$.

4.19. Показать, что $\Gamma'(1)=-\gamma$, где γ — постоянная Эйлера.

Указание. В формуле Гаусса (1.6) положить $z=1$.

4.20. Показать, что

$$\gamma=\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+t}-e^{-t}\right]\frac{dt}{t}.$$

Указание. Использовать формулу Коши (1.5) и результат задачи **4.19.**

4.21. Постоянная Эйлера обычно определяется с помощью предела

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n), \quad \text{где} \quad H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

— частичная сумма гармонического ряда, который, как известно, расходится. Вывести это выражение γ из формулы (1.6).

Решение. В задаче **4.7** с помощью формулы (1.6) было получено разложение в ряд функции $\ln\Gamma(z)$. Полагая в этом разложении $z=2$ и учитывая, что $\ln\Gamma(2)=\ln 1=0$, найдем:

$$\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\ln\frac{k+2}{k+1}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\ln\frac{m+1}{m}\right).$$

Выпишем частичную сумму последнего ряда и преобразуем ее:

$$S_n=(1-\ln 2)+\left(\frac{1}{2}-\ln 3+\ln 2\right)+\left(\frac{1}{3}-\ln 4+\ln 3\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln n\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-$$

$$-\ln(n+1)=H_n-\ln n-\ln\frac{n+1}{n}=H_n-\ln n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Так как $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ стремится к нулю, то

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n).$$

3. Бета-функция и ее связь с гамма-функцией. *Бета-функция* $B(x, y)$ для $x>0$ и $y>0$ определяется следующей формулой:

$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{1.8}$$

4.22. Показать, что

$$B(x, y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi.$$

Решение. В формуле (1.8) положим $t=\cos^2\varphi$. Тогда

$$1-t=1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi,\quad dt=-2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi;\quad t=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2};$$

$$t=1,\quad \varphi=0.$$

Поэтому получаем

$$B(x, y)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^{2(x-1)}\varphi\sin^{2(y-1)}\varphi\,2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi.$$

4.23. Показать, что

$$B(x, y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad x>0,\ y>0. \tag{1.9}$$

Решение. Представим $\Gamma(x)$ и $\Gamma(y)$ по формуле б) задачи **4.2**

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}\,du,\quad \Gamma(y)=2\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv$$

и перемножим эти равенства. Мы получим

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=4\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}\,du\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv=4\iint_D e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv,$$

где D $(u>0,\ v>0)$ — первый квадрант плоскости uOv. В полученном интеграле перейдем к полярной системе координат, полагая $u=\rho\cos\varphi$, $v=\rho\sin\varphi$ и заменяя элемент площади на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. В области D $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho<\infty$ и

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2x+2y-1}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,d\rho=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi\cdot 2\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2(x+y)-1}\,d\rho=B(x,\ y)\,\Gamma(x+y),$$

так как

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi=B(x,\ y)\ \text{(см. задачу 4.22)},$$

$$2\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2(x+y)-1}\,d\rho=\Gamma(x+y)\ \text{(см. задачу 4.2б)}.$$

4.24. Показать, что

$$B(x,\ y)=\int_0^\infty\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du\qquad(x>0,\ y>0).$$

Указание. В формуле (1.8) положить $t=\frac{u}{1+u}$.

4.25. Доказать, что бета-функция симметрична относительно своих аргументов, т. е.

$$B(x,\ y)=B(y,\ x).$$

4.26. Показать, что

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\pi.$$

Указание. Использовать формулу (1.9) (задача **4.23**).

4.27. Показать, что для любых целых положительных чисел n и m

$$B(m,\ n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4.28. Показать, что при любом $x>0$ и целом положительном n

$$B(x,\ n+1)=\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

4.29. Показать справедливость формул

$$B(x,\ y)=\frac{y-1}{x+y-1}B(x,\ y-1),\quad y>1,\ x>0;$$

$$B(x,\ y)=\frac{x-1}{x+y-1}B(x-1,\ y),\quad x>1,\ y>0;$$

$$B(x,\ y+1)=\frac{y}{x}B(x+1,\ y),\quad x>0,\ y>0.$$

Указание. Применить к определению (1.8) интегрирование по частям.

4.30. Показать, что

$$B(x,\ 1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Указание. Использовать формулы (1.4) и (1.9).

4.31. Показать, что если $x>0$, $y>0$, $m>0$, то

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t^m)^{y-1}\,dt=\frac{1}{m}B\left(\frac{x}{m},\ y\right).$$

Указание. Положить $t^m=u$ в (1.8).

4.32. Вывести формулу Лежандра

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

Решение. По формуле (1.8) выпишем выражение для $B(x,\ x)$ и преобразуем его:

$$B(x,\ x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,dt=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt.$$

В силу симметрии подынтегральной функции относительно точки $t=\frac{1}{2}$ — середины промежутка интегрирования — можно записать:

$$B(x,\ x)=2\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt.$$

Проводя здесь замену $\frac{1}{2}-t=\frac{1}{2}\sqrt{u}$, получим

$$B(x,\ x)=2\int_1^0\left(\frac{1-u}{4}\right)^{x-1}\left(-\frac{du}{4\sqrt{u}}\right)=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{x-1}\,du.$$

Следовательно,

$$B(x,\ x)=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},\ x\right).$$

В обеих частях последнего равенства перейдем к гамма-функции с помощью связи (1.9):

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{1}{2^{2x-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

Учитывая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, отсюда и получим требуемое равенство:

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x).$$

4. Вычисление некоторых интегралов. Через гамма- и бета-функции выражается ряд определенных интегралов. Рассмотрим примеры.

4.33. Выразить через гамма-функцию интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx\quad(\alpha>-1,\ \beta>-1).$$

Решение. Замена $t=\sin^2 x$ приводит к искомому выражению:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\beta+1}{2}-1}\,dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\ \frac{\beta+1}{2}\right).$$

Если учесть формулу (1.9), то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$

4.34. Вычислить интеграл

$$\int_0^a t^{2n}\sqrt{a^2-t^2}\,dt\qquad(a>0).$$

Решение. Положим $u=\frac{t^2}{a^2}$. Тогда

$$\int_0^a t^{2n}\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\int_0^1 a^{2n}u^n(1-u)^{\frac{1}{2}}\frac{a}{2\sqrt{u}}\,du=$$

$$=\frac{1}{2}a^{2n+1}\int_0^1 u^{2n-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}a^{2n+1}B\left(2n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right).$$

Но в силу формулы (1.8) и результата задачи **4.11**:

$$B\left(2n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2n+2)}=\frac{1\cdot 3\ldots(4n-1)}{(2n+1)!\,2^{2n+2}}\pi=\frac{(4n-1)!!\,\pi}{(2n+1)!\,2^{2n+2}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^a t^{2n}\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{(4n-1)!!}{(2n+1)!\,2^{2n+3}}a^{2n+1}\pi.$$

4.35. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\,t^a},\quad 0<a<1.$$

Решение. Сделаем замену переменной интегрирования $t=\frac{u}{1-u}$. Тогда $u=\frac{t}{1+t}$; $1+t=\frac{1}{1-u}$; $dt=\frac{du}{(1-u)^2}$; при $t=0$ $u=0$; при $t\to\infty$ $u\to 1$. Мы получаем

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\,t^a}=\int_0^1 \frac{(1-u)(1-u)^a}{(1-u)^2u^a}\,du=\int_0^1 \frac{(1-u)^{a-1}}{u^a}du=B(-a+1,\ a)=$$

$$=B(1-a,\ a)=B(a,\ 1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}$$

(см. задачу **4.30**).

4.36. Вычислить интеграл

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}.$$

Решение. Положим $\cos\theta=1-2\sqrt{t}$. Тогда $t=\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2=$ $=\sin^4\frac{\theta}{2}$; при $\theta=0$ $t=0$; при $\theta=\pi$ $t=1$. Так как $\theta=2\arcsin t^{1/4}$, то

$$d\theta=\frac{dt}{2\sqrt[4]{t^3}\sqrt{1-\sqrt{t}}},$$

$$\sqrt{3-\cos\theta}=\sqrt{3-1+2\sqrt{t}}=\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{t}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{t}}\,2\sqrt[4]{t^3}\sqrt{1-\sqrt{t}}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{2}} t^{-\frac{3}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

По формуле (1.4)

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2},$$

поэтому

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}.$$

4.37. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt = \frac{\pi}{b \sin\frac{a}{b}\pi}.$$

Указание. Положить $t^b = \frac{u}{1-u}$ и использовать формулу задачи 4.30.

4.38. Выразить через гамма-функцию интегралы

$$\text{а)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x\, dx, \quad \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} x\, dx, \quad \text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^b x\, dx.$$

$$(a > 0,\ |b| < 1).$$

Указание. См. задачу **4.33**.

4.39. Вычислить интегралы

$$\text{а)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx, \quad \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx, \quad \text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\, dx.$$

$$(m,\ p,\ q = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Указание. Использовать формулу задачи **4.33** и выражение гамма-функции в задачах **4.9** и **4.11**. Результат зависит от четности показателей m, p, q.

4.40. Вычислить интегралы

а) $\int_0^\infty t^b e^{-at}\,dt$, б) $\int_0^\infty t^b e^{-at^2}\,dt$ $(a>0,\ b>-1)$,

в) $\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n}\,dt$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

С помощью указанных подстановок вычислить интегралы:

4.41. $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{1+x^4}$ $(t=x^4)$,

4.42. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}}$ $a>0$ $(t=x^a)$,

4.43. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$ $(t=x^m)$.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Интегральные синус, косинус, логарифм, показательная функция *Интегральные синус* и *косинус* определяются формулами:

$$\mathrm{Si}\,(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{(рис. 106)}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Ci}\,(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \text{(рис. 107)}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) определяет значения интегрального косинуса только для $x>0$, так как при $x=0$ интеграл расходится. Иногда вместо функции $\mathrm{Si}\,(x)$ рас-

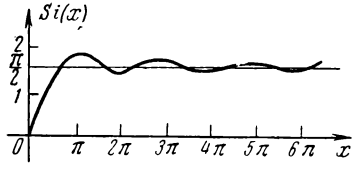


Рис. 106

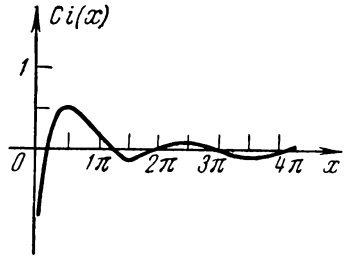


Рис. 107

сматривают функцию

$$\mathrm{si}\,(x)=-\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Ясно, что $\mathrm{Si}\,(x)=\mathrm{si}\,(x)+\frac{\pi}{2}$, так что оба определения совпадают с точностью до сдвига на $\frac{\pi}{2}$ вдоль оси Oy.

Интегральные логарифм и *показательная функция* (рис. 108 и 109) задаются формулами:

$$\mathrm{Li}\,(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} \quad (x>0) \quad \text{(рис. 108)}, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Ei}\,(x)=\int\limits_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad (x<0) \quad \text{(рис. 109)}. \tag{2.4}$$

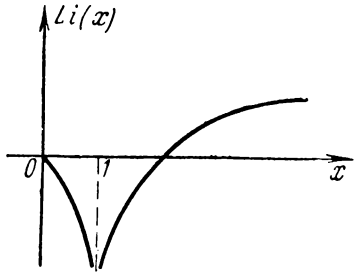


Рис. 108

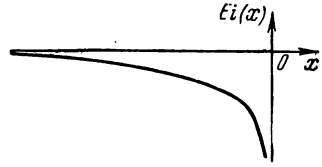


Рис. 109

При $x=1$ функция $\mathrm{Li}\,(x)$ обращается в бесконечность, а при $x>1$ интеграл (2.3) понимается в смысле главного значения, т. е. как предел

$$\mathrm{Li}\,(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right].$$

4.44. Построить график функции $\mathrm{Si}\,(x)$.

Решение. Функция $\mathrm{Si}\,(x)$ определена формулой (2.1) на всей числовой оси, причем $\mathrm{Si}\,(0)=0$.

$$\mathrm{Si}\,(\infty)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},\ ^*$$

а

$$\mathrm{Si}\,(-x)=\int\limits_0^{-x}\frac{\sin t}{t}\,dt\underset{t=-u}{=}-\int\limits_0^x\frac{\sin u}{u}\,du=-\mathrm{Si}\,(x).$$

Следовательно, функция $\mathrm{Si}\,(x)$ нечетная, и ее график — симметричен относительно начала координат, так что для построения этого графика достаточно ограничиться случаем $x>0$.

---

* См. задачу **3.193.**

Дифференцируя интеграл (2.1) по верхнему пределу, получим

$$\mathrm{Si}'(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

Производная $\mathrm{Si}'(x)$ положительна на интервалах $(2\pi n, (2n+1)\pi)$, отрицательна на интервалах $((2n+1)\pi, (2n+2)\pi)$ и обращается в нуль в концах этих интервалов $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Следовательно, $\mathrm{Si}(x)$ возрастает на первых из этих интервалов, убывает на вторых и имеет экстремумы на их концах. Приближенные значения интегрального синуса в точках экстремума равны:

$\mathrm{Si}(\pi)=1{,}85$ (max) $\quad\mathrm{Si}(2\pi)=1{,}46$ (min)
$\mathrm{Si}(3\pi)=1{,}67$ (max) $\quad\mathrm{Si}(4\pi)=1{,}49$ (min)
$\mathrm{Si}(5\pi)=1{,}63$ (max) $\quad\mathrm{Si}(6\pi)=1{,}52$ (min)
. . . . . .

Учитывая эти данные и нечетность функции $\mathrm{Si}(x)$, получаем ее график, изображенный на рис. 106.

4.45. Найти производные функции $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Li}(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$. Исследуя эти производные, показать, что графики функций $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Li}(x)$, $\mathrm{Ei}(x)$ имеют вид, изображенный на рис. 107, 108, 109.

4.46. Установить соотношение

$$\mathrm{Ei}(\ln x)=\mathrm{Li}(x), \qquad x<1.$$

Решение. По определению функции $\mathrm{Ei}(x)$ имеем:

$$\mathrm{Ei}(\ln x)=\int\limits_{-\infty}^{\ln x}\frac{e^t}{t}\,dt, \qquad \ln x<0,$$

так как $\mathrm{Ei}(\xi)$ определена только для $\xi<0$, то $\ln x<0$, откуда ясно, что $x<1$. В интеграле сделаем замену переменной интегрирования, положив $t=\ln u$. Мы получим

$$\mathrm{Ei}(\ln x)=\int\limits_{-\infty}^{\ln x}\frac{e^t}{t}\,dt=\int\limits_{0}^{x}\frac{u\,du}{u\ln u}=\int\limits_{0}^{x}\frac{du}{\ln u}=\mathrm{Li}(x), \quad x<1.$$

4.47. Показать справедливость следующих равенств:

а) $\mathrm{Li}(e^x)=\mathrm{Ei}(x), \qquad x<0;$

б) $\int\limits_{0}^{x}\mathrm{Ei}(-mt)\,dt=x\,\mathrm{Ei}(-mx)-\frac{1-e^{-mx}}{m}.$

Указание. Проинтегрировать по частям.

4.48. Функция $\mathrm{Ei}(z)$ комплексного переменного z определяется формулой

$$\mathrm{Ei}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{e^u}{u}\, du,$$

путь интегрирования от z до ∞ нужно взять так, чтобы вдоль него $\lim\limits_{u\to\infty} \arg u = \beta$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Показать, что

$$\mathrm{Ei}(ix) = \mathrm{Ci}(x) + i\,\mathrm{Si}(x) - \frac{\pi i}{2} = \mathrm{Ci}(x) + i\,\mathrm{si}(x).$$

4.49. Получить следующее разложение в ряд функции $\mathrm{Ei}(z)$:

$$\mathrm{Ei}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!} + \ln z + \gamma - \pi i$$

(γ — постоянная Эйлера).

Решение. Выберем фиксированную комплексную точку a и в определении $\mathrm{Ei}(z)$ (задача **4.59**) возьмем путь L интегрирования, проходящий через a. Тогда

$$\mathrm{Ei}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{e^u}{u}\, du = -\int_z^{a} \frac{e^u}{u}\, du - \int_a^{\infty} \frac{e^u}{u}\, du = \int_a^{z} \frac{e^u}{u}\, du + \ldots,$$

где многоточие заменяет постоянные слагаемые, которые мы пока не будем выписывать. Преобразуем далее подынтегральную функцию, разлагаем e^u в степенной ряд и интегрируем его почленно. В результате получим:

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_a^{z} \left[\frac{e^u - 1}{u} + \frac{1}{u}\right] du + \ldots = \int_a^{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{k!}\, du + \ln u \Big|_a^z + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!} \Big|_a^z + \ln z + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!} + \ln z + C,$$

где C — суммарная постоянная. Чтобы доказать, что разложение имеет нужный вид, осталось получить равенство $C = \gamma - \pi i$. Положим для этого $z = -1$ в полученном разложении, тогда

$$\mathrm{Ei}(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot k!} + \ln(-1) + C.$$

Так как $\ln(-1) = \pi i$, то отсюда

$$C = -\pi i + \mathrm{Ei}(-1) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot k!}.$$

Следовательно, надо показать, что два последних члена справа дают постоянную Эйлера γ. Запишем эти члены в интегральной форме и применим интегрирование по частям:

$$\mathrm{Ei}(-1)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot k!}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^u}{u}\,du+\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt=$$

$$=-\int_1^{\infty}e^{-t}\,d\ln t+\int_0^1(1-e^{-t})\,d\ln t=-\underbrace{(e^{-t}\ln t\Big|_1^{\infty}}_{=0}+\int_1^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt)+$$

$$+\underbrace{(1-e^{-t})\ln t\Big|_0^1}_{=0}-\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt=-\int_1^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt-$$

$$-\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt=-\int_0^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt=-\Gamma'(1)=\gamma.$$

Здесь были использованы выражения производной гамма-функции (см. (1.7)):

$$\Gamma'(x)=\int_0^{\infty}e^t t^{x-1}\ln t\,dt$$

и результат задачи **4.19.**

4.50. Показать справедливость следующих разложений:

$$\mathrm{Ei}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k\cdot k!}+\ln(-x)+\gamma\qquad(x<0),$$

$$\mathrm{Li}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^k}{k\cdot k!}+\ln|\ln x|+\gamma\qquad(x>0),$$

$$\mathrm{Si}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!},$$

$$\mathrm{Ci}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k(2k)!}+\ln x+\gamma\qquad(x>0).$$

Указание. Воспользоваться разложением задачи **4.49**, формулами задач **4.46** и **4.48.**

4.51. Доказать эквивалентность при $x\to 0$ бесконечно малых функций:

$$\mathrm{Li}(x)\sim\frac{x}{\ln x}.$$

Решение. По определению

$$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t}.$$

Проинтегрируем один раз по частям, полагая $u=\frac{1}{\ln t}$, $dv=dt$:

$$\operatorname{Li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}=\frac{t}{\ln t}\Big|_0^x+\int_0^x \frac{t\,dt}{t\ln^2 t}=\frac{x}{\ln x}+\int_0^x \frac{dt}{\ln^2 t},$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln t}=\lim\limits_{t\to 0} t=0$ (применяем правило Лопиталя). Оценим последний интеграл. Функция $\frac{1}{\ln^2 t}$, $0<t<1$ монотонно возрастает, поэтому

$$\frac{1}{\ln^2 t}\leqslant\frac{1}{\ln^2 x},\qquad t<x<1.$$

Подставив в интеграл вместо функции ее наибольшее значение, получаем оценку

$$\int_0^x \frac{dt}{\ln^2 t}\leqslant\int_0^x \frac{dt}{\ln^2 x}=\frac{x}{\ln^2 x}=\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}.$$

Этот интеграл для малых значений x есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{x}{\ln x}$, ввиду того, что $\frac{1}{\ln x}\to 0$ при $x\to 0$. Следовательно, функции $\operatorname{Li}(x)$ и $\frac{x}{\ln x}$ эквивалентны *.

4.52. Доказать, эквивалентность при $x\to 0$ $\operatorname{Si}(x)\sim x$.

Указание. Использовать разложение $\operatorname{Si}(x)$ в ряд.

4.53. Показать, что при $x\to\infty$ $\operatorname{Ei}(-x)\sim-\frac{e^{-x}}{x}$.

Решение. По определению

$$\operatorname{Ei}(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{e^t}{t}\,dt.$$

В этом интеграле сделаем замену переменной интегрирования, положив $t=-u$:

$$\operatorname{Ei}(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{e^t}{t}\,dt=-\int_{\infty}^{x}\frac{e^{-u}}{-u}\,du=-\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Полученный интеграл три раза проинтегрируем по частям:

$$-\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du=\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-u}}{u^2}+2\frac{e^{-u}}{u^3}\right)\Big|_x^{\infty}-6\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^4}\,du=$$

$$=-\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-6\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^2}\,\frac{du}{u^2},$$

---

* Напомним, что если $\alpha-\beta$ (α, β — бесконечно малые) есть величина более высокого порядка малости по сравнению с β, то α эквивалентно β.

так как на верхнем пределе проинтегрированные члены обращаются в нуль.

Заметим, что $\frac{e^{-u}}{u^2}$ — монотонно убывающая функция и поэтому $\frac{e^{-u}}{u^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{x^2}$, $x \leqslant u < \infty$. Следовательно,

$$\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^2}\frac{du}{u^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{x^2}\int_x^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}\left(-\frac{1}{u}\right)_x^\infty = \frac{e^{-x}}{x^3} = \frac{e^{-x}}{x}\cdot\frac{1}{x^2},$$

откуда ясно, что этот интеграл — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\frac{e^{-x}}{x}$ при $x \to \infty$. Следовательно, разность

$$\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + 6\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^2}\frac{du}{u^2}$$

есть величина бесконечно малая более высокого порядка малости при $x \to \infty$, чем $\frac{e^{-x}}{x}$, т. е. функции

$$\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \quad \text{и} \quad \frac{e^{-x}}{x}$$

эквивалентны.

4.54. Показать, что при $x \to \infty$ справедливы следующие формулы:

а) $\mathrm{Si}\,(x) \sim -\frac{\cos x}{x}$,

б) $\mathrm{Ci}\,(x) \sim \frac{\sin x}{x}$.

4.55. Выразить через интегральные функции следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\ln x}$; б) $\int \frac{\cos x}{x}dx$; в) $\int \frac{\sin x}{x}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\ln ax}$; д) $\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}dx$; е) $\int \frac{e^{mx}}{x}dx$;

ж) $\int \frac{e^x}{x-a}dx$; з) $\int \frac{\sin x}{x-a}dx$; и) $\int \frac{\cos x}{x-a}dx$.

4.56. Показать справедливость следующих рекуррентных формул:

$$\int \frac{e^x}{(x-a)^n}dx = -\frac{e^x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^x}{(x-a)^{n-1}}dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{(x-a)^n}dx = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{(x-a)^{n-1}}dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{(x-a^n)}dx = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{(x-a)^{n-1}}dx.$$

Указание. Проинтегрировать по частям.

4.57. Вычислить интегралы

а) $\int \frac{e^{5x}}{(x+2)^3}\,dx$; б) $\int \frac{\sin 2x}{(x+1)^3}\,dx$; в) $\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}+3}{(x+1)(x-1)^3}\,dx$;

г) $\int \frac{2x-1}{\ln x}\,dx$; е) $\int \frac{x^2-x+2}{\ln x}\,dx$.

4.58. С помощью интегрирования по частям вычислить следующие интегралы:

а) $\int \sin \alpha x \operatorname{Ci}(\beta x)\,dx$, д) $\int \operatorname{Ci}(\alpha x) \operatorname{Ci}(\beta x)\,dx$,

б) $\int \cos \alpha x \operatorname{Si}(\beta x)\,dx$, е) $\int \operatorname{Ci}(\alpha x) \operatorname{Si}(\beta x)\,dx$,

в) $\int \sin \alpha x \operatorname{Si}(\beta x)\,dx$, ж) $\int \operatorname{Si}(\alpha x) \operatorname{Si}(\beta x)\,dx$.

г) $\int \cos \alpha x \operatorname{Ci}(\beta x)\,dx$,

2. Эллиптические интегралы. *Эллиптическим* называется всякий интеграл вида $\int R(x, w)\,dx$, где R — рациональная функция от x и w, а $w = \sqrt{P(x)}$, $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени *. Специально подобранной подстановкой $t = \frac{x-\alpha}{x-\beta}$ (в случае, когда $P(x)$ имеет 4-ю степень) или $t^2 = x - \alpha$ (если $P(x)$ многочлен 3-й степени) этот интеграл сводится к виду

$$\int R\left(t, \sqrt{\pm (t^2 - A)(t^2 - B)}\right) dt.$$

Последний интеграл рядом преобразований превращается в сумму интегралов, выражающихся через элементарные функции и эллиптические интегралы трех канонических видов **:

$$\text{I.} \int \frac{dt}{\sqrt{\pm (t^2 - A)(t^2 - B)}};$$

$$\text{II.} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{\pm (t^2 - A)(t^2 - B)}}; \qquad (2.5)$$

$$\text{III.} \int \frac{dt}{(1 + \lambda t^2)\sqrt{\pm (t^2 - A)(t^2 - B)}}.$$

В свою очередь эти интегралы выражаются через эллиптические интегралы, записанные в тригонометрической форме (нормальная форма Лежандра):

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad \text{(1-го рода)}, \qquad (2.6)$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}\,d\psi \quad \text{(2-го рода)}, \qquad (2.7)$$

$$\Pi(\varphi, \lambda, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + \lambda \sin^2 \psi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad \text{(3-го рода)}, \qquad (2.8)$$

---

* Можно считать, вынося положительную константу за знак корня, что старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 1 или -1.

** Следует иметь в виду, что в отдельных случаях сам интеграл $\int R(x, w)\,dx$ выражается через элементарные функции. Это произойдет, например, если многочлен $P(x)$ имеет кратные корни.

где $|k|<1$ и поэтому можно считать, что $k=\sin\theta$, углы φ и θ изменяются от 0 до $\frac{\pi}{2}$. При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ эллиптические интегралы F, E, Π называются *полными*.

4.59. Показать, что эллиптический интеграл

$$\int \frac{M(t)\,dt}{\sqrt{\pm (t^2-A)(t^2-B)}},$$

где $M(t)$ — многочлен, выражается через элементарные функции и канонические интегралы (2.5) типов I и II.

Решение. Выделяя в $M(t)$ слагаемые с нечетными степенями t и делая подстановку $t^2=u$, мы отделим от данного интеграла слагаемое вида

$$\int \frac{N(u)\,du}{\sqrt{\pm (u-A)(u-B)}},$$

где $N(u)$ — многочлен. Такой интеграл выражается через элементарные функции, например, известными подстановками Эйлера. Для сставшегося в числителе многочлена с четными степенями имеет место следующая формула приведения:

$$\int \frac{a_0t^{2n}+a_1t^{2n-2}+\ldots+a_{n-1}t^2+a_n}{\sqrt{\pm (t^2-A)(t^2-B)}}\,dt=(A_0t^{2n-3}+A_1t^{2n-5}+\ldots$$
$$\ldots+A_{n-2}t)\sqrt{\pm (t^2-A)(t^2-B)}+\int \frac{A_{n-1}t^2+A_n}{\sqrt{\pm (t^2-A)(t^2-B)}}\,dt,$$

которая сводит вычисления данного интеграла к интегралам (2.5) типов I и II. Для доказательства формулы приведение надо записать ее с неопределенными коэффициентами A_0, A_1, ..., A_n, продифференцировать обе части равенства и умножить на $\sqrt{\pm (t^2-A)(t^2-B)}$. В результате справа и слева окажутся многочлены одной и той же степени $2n$ с четными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты, мы получим систему из $n+1$ уравнения относительно стольких же неизвестных A_0, A_1, ..., A_n. Решение заведомо существует, так как полученная система имеет треугольный вид: сначала определяется A_0, через него выражается A_1, затем A_2 выражается через A_0, A_1 и т. д.

4.60. Свести к каноническим типам I, II формулы (2.5) интегралы

а) $\int \frac{t^4dt}{\sqrt{(t^2-1)(t^2-4)}}$, б) $\int \frac{t^6dt}{\sqrt{1-t^4}}$, в) $\int \frac{t^4-2t^2}{\sqrt{t^4-1}}\,dt$.

4.61. В зависимости от набора знаков под корнем имеются 6 форм определенного интеграла типа I (2.5), записанных ниже. Показать, что каждый из выписанных интегралов равен $\frac{1}{c}F(\varphi, k)$,

где значения φ, k определяются равенствами, указанными в таблице, а числа a, b, c связаны условием $a^2+b^2=c^2$.

Таблица 1

	$\frac{1}{c}F(\varphi, k)$	φ	$k=\sin\theta$	
1)	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{x}{b}$	$\frac{a}{c}$	
2)	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{cx}{ab}$	$\frac{a}{c}$	$\lvert x\rvert\leqslant a$
3)	$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}}$	$\cos\varphi=\frac{b}{x}$	$\frac{a}{c}$	$\lvert x\rvert\geqslant b$
4)	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}}$	$\sin\varphi=\frac{x}{a}$	$\frac{a}{c}$	$\lvert x\rvert\leqslant a$
5)	$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$	$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\frac{b}{x}$	$\frac{a}{c}$	$b\leqslant\lvert x\rvert\leqslant c$
6)	$\int_c^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}=\frac{x}{c}$	$\frac{a}{c}$	$\lvert x\rvert\geqslant c$

Указание. Чтобы получить подстановку, приводящую данный интеграл к нормальной форме, надо во втором столбце заменить x на t и φ на ψ. Например, интеграл 1) приводится к $\frac{1}{c}F(\varphi, k)$ подстановкой $\operatorname{tg}\psi=\frac{t}{b}$ или $t=b\operatorname{tg}\psi$.

4.62. Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Решение. Этот интеграл вида 2) таблицы задачи **4.61** при $a=1$ $b=1$. В таком случае $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ и $k=\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Чтобы пределы интегрирования соответствовали таблице, представим его в виде разности:

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} - \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Значение φ находим из равенства

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{cx}{ab} \quad \text{или} \quad \sin^2\varphi = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)x^2,$$

т. е.

$$\sin^2\varphi = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad \sin\varphi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Для первого интеграла $x=1$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$, для второго — $x=\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2}$ и $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4.63. Выразить через функцию $F(\varphi, k)$ интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4+5t^2+6}}$, б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2-2}}$; в) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dt}{\sqrt{t^4-5t^2+4}}$.

4.64. Доказать, что интегралы вида II формулы (2.5) имеют следующие выражения (везде $a^2+b^2=c^2$, $k=\frac{a}{c}$):

1) $\int\limits_{0}^{x} \frac{t^2dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}} = x\sqrt{\frac{c^2+x^2}{b^2+x^2}} - cF(\varphi, k)$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{x}{b}$,

2) $\int\limits_{0}^{x} \frac{t^2dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(a^2-t^2)}} = -x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2+x^2}} + cE(\varphi, k) - \frac{b^2}{c}F(\varphi, k)$,

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{cx}{ab},$$

3) $\int\limits_{b}^{x} \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}} = \frac{1}{x}\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} - cE(\varphi, k) + \frac{b^2}{c}F(\varphi, k)$, $\cos\varphi=\frac{b}{x}$,

4) $\int\limits_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}} = -cE(\varphi, k) + cF(\varphi, k), \quad \sin\varphi = \frac{x}{a}$,

5) $\int\limits_b^x \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}} = -\frac{1}{x}\sqrt{(x^2-b^2)(c^2-x^2)} + cE(\varphi, k)$,

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{b}{x},$$

6) $\int\limits_c^x \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}} = x\sqrt{\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}} - cE(\varphi, k) + cF(\varphi, k)$,

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{x}{c}.$$

Указание. Проверить совпадение производных по x и начальных значений правой и левой частей равенств.

4.65. Вычислить интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{t^2dt}{\sqrt{t^4-1}}.$$

Решение. Этот интеграл вида 3 задачи **4.64** при $a=b=1$ и $x=2$. Следовательно, $c=\sqrt{2}$, $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, т. е. $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Поэтому по формуле 3 задачи **4.64** найдем:

$$\int\limits_1^2 \frac{t^2dt}{\sqrt{t^4-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{15} - \sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4.66. Свести к эллиптическим интегралам 1-го и 2-го рода вычисление интегралов:

а) $\int\limits_0^1 \frac{t^2dt}{\sqrt{t^4+3t^2+2}}$, б) $\int\limits_2^3 \frac{t^2dt}{\sqrt{t^4-16}}$, в) $\int\limits_1^2 \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2-1)(4-t^2)}}$.

4.67. Выразить через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

а) $\int\limits_0^\varphi \frac{\sin^2\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$, б) $\int\limits_0^\varphi \frac{\cos^2\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$, в) $\int\limits_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$.

4.68. Вычислить длину дуги эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>b)$$

от точки $A(a, 0)$ до точки $M(x, y)$, лежащей в первой четверти.

Решение. Запишем уравнение эллипса в параметрической форме

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t.$$

Точке A отвечает значение $t = 0$, точке M — некоторое значение $t = \alpha$, где $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. По формуле длины дуги плоской кривой

$$l = \int_0^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\alpha} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt.$$

Делая замену аргумента $t = \frac{\pi}{2} - \psi$ и заменяя $\cos^2\psi$ на $1 - \sin^2\psi$, получим

$$l = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}\, d\psi = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\psi}\, d\psi =$$

$$= a\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi -$$

$$- a\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi,$$

где $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, ε — эксцентриситет эллипса.

Значит,

$$l = aE\left(\frac{\pi}{2},\ \varepsilon\right) - aE\left(\frac{\pi}{2} - \alpha,\ \varepsilon\right).$$

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получим длину дуги четверти эллипса $l = aE\left(\frac{\pi}{2},\ \varepsilon\right)$.

4.69. Вычислить длину дуги лемнискаты

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\alpha.$$

Указание. В полярных координатах

$$l = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho'^2(\alpha)}\, d\alpha.$$

4.70. Разложить в ряд по степеням k функцию $F(\varphi,\ k)$.

Решение. В формуле (2.6) разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням $(k\sin\psi)$:

$$(1-k^2\sin^2\psi)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\psi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\psi+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\psi+\ldots$$

Этот ряд сходится правильно на отрезке $[0, \varphi]$, так как мажорируется числовым рядом при $\psi=\frac{\pi}{2}$, $\sin\psi=1$, сходящимся в силу условия $|k|<1$. Поэтому его можно интегрировать почленно:

$$F(\varphi, k)=\int_0^{\varphi}(1-k^2\sin^2\psi)^{-1/2}d\psi=\int_0^{\varphi}\{1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\psi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\psi+$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\psi+\ldots\}d\psi=A_0+\frac{1}{2}A_1k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}A_2k^4+$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}A_3k^6+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}A_nk^n+\ldots,$$

где

$$A_n=\int_0^{\varphi}\sin^{2n}\psi\,d\psi;\quad A_0=\varphi,\quad A_1=\frac{1}{2}\varphi-\frac{\sin2\varphi}{4},\ldots$$

4.71. Доказать разложение (с теми же A_n, что и в задаче **4.70**):

$$E(\varphi, k)=A_0-\frac{1}{2}A_1k^2-\frac{1}{2\cdot4}A_2k^4-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}A_3k^6-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}A_4k^8-\ldots$$

4.72. Показать, что полные эллиптические интегралы $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ имеют следующие разложения в ряды по степеням k:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2k^{2n}\right\},\quad k=\sin\theta.$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}.$$

4.73. Время полного колебания простого маятника с длиной l и амплитудой колебания 2α выражается формулой

$$T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos\alpha}},$$

где g — ускорение силы тяжести. Выразить T через $F(\varphi, k)$.

Указание. Положить $\sin\frac{\tau}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin x$.

4.74. Коэффициент взаимной индукции M двух круглых коаксиальных петель, несущих токи, равняется

$$M=\mu\sqrt{ab}\,k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi,$$

где μ, a, b, k — постоянные и $|k|<1$. Выразить M через $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$.

3. Интеграл вероятностей и интегралы Френеля. *Интегралом вероятностей* называется функция

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\quad \operatorname{erf}(+\infty)=1. \tag{2.9}$$

В теории вероятностей используется также функция Лапласа (см. гл. VIII, § 5)

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad \Phi(+\infty)=1, \tag{2.10}$$

которую иногда также называют интегралом вероятностей.

Синус- и косинус-интегралы Френеля определяются равенствами:

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin t^2 dt,\quad C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \cos t^2 dt \tag{2.11}$$

$$S(+\infty)=C(+\infty)=\frac{1}{2}.$$

4.75. Доказать равенства:

а) $\operatorname{erf}(x)=\Phi(x\sqrt{2}),\quad \Phi(x)=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$;

б) $\operatorname{erf}'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},\quad \Phi'(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$;

в) $\int \operatorname{erf}(x)\,dx=x\operatorname{erf}(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}+C;$

$$\int \Phi(x)\,dx=x\Phi(x)+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$$

4.76. Функция $\operatorname{erf}(z)$ определяется тем же равенством 2.9) с заменой действительного переменного x на комплексное z. Путь интегрирования от 0 до z при этом берется произвольно. Показать справедливость равенств:

$$C(x)+iS(x)=\sqrt{\frac{i}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{i}}\right),$$

$$C(x)-iS(x)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\operatorname{erf}(x\sqrt{i}).$$

4.77. Доказать, что имеют место интегральные представления:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,\quad \operatorname{erf}(xy)=\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2y^2}dt,$$

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\quad C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

4.78. Выразить через $\operatorname{erf}(x)$ интегралы

$$\text{а)}\ \int_0^x e^{-\frac{\pi}{4}t^2}\,dt; \quad \text{б)}\ \int_0^\tau e^{h^2(\tau-t)}\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

4.79. Разложить функцию $\Phi(x)$ в степенной ряд.

Решение. Функцию $e^{-\frac{t^2}{2}}$ разложим в ряд Маклорена:

$$e^{-\frac{t^2}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^k k!}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2^2\cdot 2!}-\ldots$$

Как всякий сходящийся степенной ряд, его можно почленно интегрировать. В результате интегрирования мы получим

$$\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^k k!}\int_0^x t^{2k}dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2^k k!\,(2k+1)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}-\ldots\right\}$$

$$-\infty<x<\infty$$

4.80. Показать, что функции $S(x)$ и $C(x)$ разлагаются в следующие степенные ряды:

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!\,(4k+3)},\quad |x|<\infty,$$

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+1}}{(2k)!\,(4k+1)},\quad |x|<\infty.$$

Указание. Разложить функции $\sin t^2$ и $\cos t^2$ в ряды и проинтегрировать почленно.

4.81. Показать, что при $x\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\operatorname{erf}(x)\simeq 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x}e^{-x^2}.$$

Решение. Так как $\operatorname{erf}(+\infty)=1$, то

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt=$$

$$=\operatorname{erf}(+\infty)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt.$$

Для определения главной части интеграла $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ при $x\to+\infty$ сделаем замену $u=t^2$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

и проинтегрируем по частям. Мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-e^{-u}\frac{1}{\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{\infty}+\frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u^{3/2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-x^2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}u^{-3/2}\,du\right].$$

Повторно интегрируя по частям, находим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-x^2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(-e^{-u}u^{-3/2}\Big)_{x^2}^{\infty}+\frac{3}{2}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}u^{-\frac{5}{2}}\,du\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{-x^2}}{x}+\frac{e^{-x^2}}{2x^3}+\frac{3}{4}\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}u^{-\frac{5}{2}}\,du\right].$$

Функция e^{-u} монотонно убывает при $u\to+\infty$, поэтому

$$\int\limits_{x^2}^{\infty} e^{-u}u^{-\frac{5}{2}}\,du\leqslant e^{-x^2}\int\limits_{x^2}^{\infty} u^{-\frac{5}{2}}\,du=\frac{2}{3}e^{-x^2}\frac{1}{x^3}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\operatorname{erf}(x)-1+\frac{1}{\sqrt{\pi}x}e^{-x^2}\right|\leqslant C\frac{e^{-x^2}}{x^3},$$

где C — некоторая постоянная.

Таким образом, при $x\to+\infty$

$$\operatorname{erf}(x)\simeq 1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}.$$

4.82. Показать, что при $x\to\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$S(x\simeq\frac{1}{2}-\frac{\cos x^2}{\sqrt{2\pi}x};\quad C(x)\simeq\frac{1}{2}+\frac{\sin x^2}{\sqrt{2\pi}x}.$$

4.83. Построить график функции $y=\operatorname{erf}(x)$.

Решение. Заметим сначала, что $y=\operatorname{erf}(x)$ — нечетная функция, так как $\int\limits_{0}^{-x} e^{-t^2}\,dt=-\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$. Рассмотрим производную дан-

ной функции $y' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}$. Она положительна при всех x, следовательно, график функции $y = \operatorname{erf}(x)$ монотонно возрастает. Производная в нуль не обращается — точек экстремума нет. А так

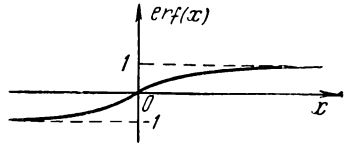


Рис. 110

как $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, то график ее имеет вид, указанный на рис. 110.

4.84. Исследуя производные функций $S(x)$ и $C(x)$, показать, что их графики имеют вид, указанный на рис. 111 и 112.

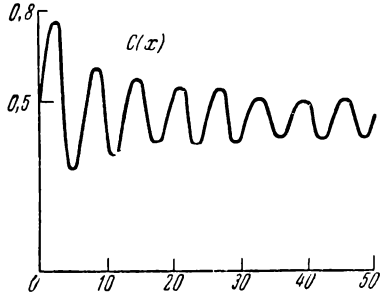


Рис. 111

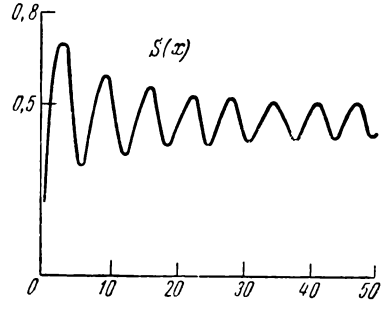


Рис. 112

4.85. Показать, что функция

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$$

является решением уравнения

$$y' = y - \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

и выразить ее через интеграл вероятностей.

Решение. Данный интеграл правильно сходится при всех $x > 0$. Если его формально продифференцировать по x под знаком интеграла, то полученный интеграл снова правильно сходится при

$x>0$. Поэтому

$$\varphi'(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(t^2+1-1)}{t^2+1}e^{-x^2t^2}\,dt=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{xt^2}}{1+t^2}\,dt=\varphi(x)-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt.$$

Вычислим отдельно последний интеграл:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt \underbrace{=}_{\sqrt{x}\,t=u} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\pi\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cdot\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du}_{\operatorname{erf}(+\infty)}=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Следовательно,

$$\varphi'(x)=\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Найдем решение этого дифференциального уравнения, принимающее при $x=0$ значение

$$y(0)=\varphi(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty=1.$$

Ищем решение в виде $y=u\cdot v$.

Мы получаем

$$u'v+v'u=u\cdot v-\frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Полагая $v'=v$, находим $v=e^x$. Подставив это значение v в уравнение, будем иметь

$$u'=-\frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}$$

или

$$u(x)=-\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt+C\underbrace{=}_{\sqrt{t}=u}-2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}\,du+C=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-u^2}\,du+C=-\operatorname{erf}(\sqrt{x})+C.$$

Теперь запишем

$$y(x)=u\cdot v=e^x\left[-\operatorname{erf}(\sqrt{x})+C\right].$$

Но $y(0)=1$, поэтому $C=1$. Окончательно имеем

$$y(x)=e^{x}\left[1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{x}\right)\right].$$

А так как решение задачи Коши единственно, то $y(x)=\varphi(x)$ и

$$e^{x}\left[1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{x}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt^{2}}}{1+t^{2}}\,dt.$$

4.86. Решить дифференциальное уравнение

$$y'+2xy=1.$$

4.87. Доказать, что функция $\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^{2}}\operatorname{erf}(x)$ удовлетворяет уравнению $y'-2xy=1$.

§ 3. БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. Функции Бесселя первого и второго рода. Уравнение

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(1-\frac{\nu^{2}}{x^{2}}\right)y(x)=0 \tag{3.1}$$

называется *уравнением Бесселя*, а любое его решение — *функцией Бесселя* (или цилиндрической функцией). Здесь ν — некоторый числовой параметр, называемый обычно *индексом уравнения*.

Решения уравнения Бесселя:

$$J_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{2!\,\Gamma(\nu+2)}+\ldots\right], \tag{3.2}$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{2!\,\Gamma(2-\nu)}+\ldots\right] \tag{3.3}$$

называются *функциями Бесселя первого рода*. Если ν не является целым числом, то $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и поэтому общее решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде

$$y(x)=C_{1}J_{\nu}(x)+C_{2}J_{-\nu}(x)\ (\nu\text{ — нецелое число}),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Функции Бесселя второго рода определяются формулами

$$Y_{\nu}(x)=\frac{J_{\nu}(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\ (\nu\text{ — нецелое число}), \tag{3.4}$$

$$Y_{n}(x)=\lim_{\nu\to n}Y_{\nu}(x)\ (n\text{ — целое число}). \tag{3.5}$$

Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ всегда линейно независимы, поэтому общее решение уравнения Бесселя при любом ν может быть представлено в виде

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

Для функций Бесселя второго рода целого индекса $\nu = n$ справедливы формулы

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} H_k\right\}, \tag{3.6}$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left\{J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma-H_n\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(H_k + H_{n+k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right\}, \tag{3.7}$$

где γ — постоянная Эйлера, $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}$ (см. задачу **4.21**).

4.88. Определить область сходимости ряда (3.2).

Решение. Для определения радиуса сходимости ряда (3.2) применим признак Даламбера. В данном случае

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{\nu+2n}}{2^{\nu+2n} n!\,\Gamma(\nu+n+1)};\quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{\nu+2n+2}}{2^{\nu+2n+2}(n+1)!\,\Gamma(\nu+n+2)},$$

поэтому имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2\,\Gamma(\nu+n+1)}{2^2\,\Gamma(\nu+n+2)(n+1)} = \frac{x^2}{4(n+1)(\nu+n+1)},$$

так как

$$\Gamma(\nu+n+2) = (\nu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1).$$

Следовательно, при любом значении x

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$$

и ряд (3.2) сходится абсолютно на всей числовой оси.

4.89. Показать, что ряд (3.3) абсолютно сходится при всех $x \neq 0$.

4.90. Показать, что функция $J_\nu(x)$, определенная формулой (3.2), является решением уравнения (3.1).

Решение. Нам нужно показать, что

$$J_\nu''(x) + \frac{1}{x}J_\nu'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(x) = 0.$$

Вычислим для этого каждое из трех слагаемых, дифференцируя почленно ряд (3.2)

$$\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu = J_\nu - \frac{\nu^2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}J_\nu =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\nu^2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}}{4k!\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$\frac{1}{x}J'_\nu = \frac{1}{2\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\nu+2k)\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\nu+2k)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}}{4k!\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$J''_\nu = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu+2k)(\nu+2k-1)}{4k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}.$$

Складывая ряды справа, выделим суммарный коэффициент C_m при $\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m-2}$. При $m\geqslant 1$ надо в первой сумме взять член с номером $k=m-1$, а в остальных трех суммах — члены с номером $k=m$. Учитывая, что $\Gamma(m+\nu+1)=(m+\nu)\Gamma(m+\nu)$, получим при $m\geqslant 1$

$$C_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\,\Gamma(m+\nu)} - \frac{(-1)^m\nu^2}{4m!\,\Gamma(m+\nu+1)} + \frac{(-1)^m(\nu+2m)}{4m!\,\Gamma(m+\nu+1)} +$$

$$+\frac{(-1)^m(\nu+2m)(\nu+2m-1)}{4m!\,\Gamma(m+\nu+1)} = \frac{(-1)^m}{4m!\,\Gamma(m+\nu+1)}[-4m(m+\nu)-\nu^2+$$

$$+\nu+2m+(\nu+2m)(\nu+2m-1)]=0,$$

так как выражение в квадратной скобке равно нулю. Осталось найти коэффициент C_0 при $\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2}$. В первой сумме такого члена нет, в остальных он получается при $k=0$:

$$C_0 = -\frac{\nu^2}{4\Gamma(\nu+1)} + \frac{\nu}{4\Gamma(\nu+1)} + \frac{\nu(\nu-1)}{4\Gamma(\nu+1)} = \frac{-\nu^2+\nu+\nu(\nu-1)}{4\Gamma(\nu+1)} = 0.$$

Таким образом, при подстановке ряда (3.2) в уравнение Бесселя коэффициенты при всех степенях x обращаются в нуль, и, следовательно, определяемая этим рядом функция $J_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя.

4.91. Показать, что функция $J_{-\nu}(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя.

4.92. Показать, что при целом $n>0$

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}. \tag{3.8}$$

4.93. Доказать, что $J_0(0)=1$, $J_n(0)=0$, $J_0'(0)=J_n'(0)=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

4.94. Выписать ряды для функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

4.95. Показать, что при целом $n>0$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x).$$

Решение. Функцию $J_{-n}(x)$ находим из формулы (3.3):

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}.$$

Заметим, что функция $\Gamma(x)$ при целых отрицательных значениях x имеет полюсы первого порядка; это значит, что $\frac{1}{\Gamma(x)}$ имеет в этих точках нули, т. е. $\frac{1}{\Gamma(-m)}=0$ при $m=0, 1, 2, \ldots$ (см. 1.3). Отсюда ясно, что все слагаемые рассматриваемого ряда исчезают, если $-n+k+1\leqslant 0$, т. е. при $k\leqslant n-1$. Мы получаем

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}.$$

В этом ряде введем новую переменную суммирования, положив $m=k-n$. Тогда

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m+2n}}{(m+n)!\,\Gamma(-n+m+n+1)}=$$

$$=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)}=$$

$$=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}=(-1)^n J_n(x).$$

В силу формулы (3.8) (задача **4.92**).

4.96. Найти выражение функции $J_{\frac{1}{2}}(x)$.

Решение. Полагая в формуле (3.2) $\nu=\frac{1}{2}$, выпишем ряд для $J_{\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Так как $\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$ (см. задачу **4.11**), то

$$2^{2k+1}k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=2^k k!\,(2k+1)!!\sqrt{\pi}=$$

$$=2\cdot4\ldots2k\cdot1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}=(2k+1)!\sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right).$$

Ряд в скобке представляет известное разложение $\sin x$ по степеням x, так что

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

4.97. Выписать ряд, определяющий функцию $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, и показать, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

4.98. Показать, что функция

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\varphi-\nu\varphi)}\,d\varphi$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}(x-\nu).$$

Указание. Продифференцировать $y(x)$ под знаком интеграла и подставить в левую часть уравнения. В полученном интеграле

записать подынтегральную функцию в виде

$$-i\frac{d}{d\varphi}\{e^{i(x\sin\varphi-\nu\varphi)}(x\cos\varphi+\nu)\}.$$

4.99. Получить интегральное представление функций Бесселя $J_n(x)$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Решение. Из результата задачи **4.93** следует, что при $\nu=n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ интеграл

$$y_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\varphi-n\varphi)}\,d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя (3.1) также при $\nu=n$. Так как

$$y_n'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\varphi-n\varphi)}\,i\sin\varphi\,d\varphi,$$

то нетрудно подсчитать, что $y_0(0)=1$, $y_n(0)=0$, $y_0'(0)=y_n'(0)=0$ при $n=1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, $y_n(x)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и решение уравнения Бесселя $J_n(x)$ (см. **4.93**). В силу теоремы единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения Бесселя получим $y_n(x)=J_n(x)$.

Итак,

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\varphi-n\varphi)}\,d\varphi\qquad(n=0, 1, 2, \ldots).$$

4.100. Доказать, что

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi\qquad(n=0, 1, 2, \ldots).$$

Указание. Применить к результату задачи 4.99 формулу Эйлера и использовать свойства интегралов от четных и нечетных функций.

4.101. Выписать интегральные представления для функций

$$J_0(x),\quad J_1(x),\quad J_2(x),\quad J_3(x).$$

4.102. Исходя из интегрального представления функций Бесселя показать, что для целых n

$$|J_n(x)|\leqslant 1.$$

4.103. Показать, что функция $J_\nu(\alpha x)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2y''+xy'+(\alpha^2x^2-\nu^2)\,y=0.$$

2. Рекуррентные формулы. В этом пункте будут рассмотрены рекуррентные соотношения, связывающие функции Бесселя.

4.104. Показать, что при любом ν

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^{\nu}}J_{\nu}(x)\right]=-\frac{1}{x^{\nu+1}}J_{\nu+1}(x).$$

Решение. Из определения функции $J_{\nu}(x)$ находим

$$\frac{1}{x^{\nu}}J_{\nu}(x)=\frac{1}{x^{\nu}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2^{\nu}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Дифференцируя ряд почленно, получаем

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^{\nu}}J_{\nu}(x)\right]=\frac{1}{x}\frac{1}{2^{\nu}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\frac{2k}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}=$$

$$=\frac{1}{x}\frac{1}{2^{\nu}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(k-1)!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}=\frac{1}{x^{\nu+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2(k-1)+1}}{(k-1)!\,\Gamma(\nu+1+k)}.$$

В последней сумме положим $k=r+1$, r изменяется от 0 до ∞, поэтому имеем

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^{\nu}}J_{\nu}(x)\right]=\frac{-1}{x^{\nu+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu+1)+2r}}{r!\,\Gamma((\nu+1)+r+1)}=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}},$$

что и требовалось показать.

4.105. Используя результат задачи **4.101**, доказать по индукции, что имеет место рекуррентная формула

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{m}\left[\frac{1}{x^{\nu}}J_{\nu}(x)\right]=(-1)^{m}\frac{1}{x^{m+\nu}}J_{m+\nu}(x). \tag{3.9}$$

Здесь символ $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{m}$ означает, что операция дифференцирования, а затем деления на x применяется m раз. Например,

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{2}f(x)=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}f(x)\right]=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}f'(x)\right\}=$$

$$=\frac{1}{x}\frac{f''(x)\,x-f'(x)}{x^{2}}=\frac{f''(x)\,x-f'(x)}{x^{3}}.$$

4.106. Показать, что

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x).$$

Указание. См. решение задачи **4.104.**

4.107. Применяя метод полной математической индукции и используя формулу задачи **4.106**, показать, что

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x). \tag{3.10}$$

4.108. Показать, что для функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ выполняется формула

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{1}{x^\nu} Y_\nu(x)\right] = (-1)^m \frac{1}{x^{\nu+m}} Y_{\nu+m}(x).$$

4.109. Доказать рекуррентные формулы

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \tag{3.11}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x). \tag{3.12}$$

Решение. Полагая в формуле (3.9) $m = 1$, находим

$$\frac{1}{x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Умножим обе части равенства на x и вычислим производную дроби, получим

$$\frac{J'_\nu(x)}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu(x)}{x^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

Умножив обе части на x^ν, находим

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x).$$

Таким же образом из формулы (3.10) при $m = 1$ получим

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x).$$

Складывая и вычитая последние два равенства, мы и получим соотношения (3.12) и (3.11).

4.110. Показать, что

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Указание. См. **4.104.**

4.111. Считая функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ известными, получить $J_2(x)$.

Решение. В формуле (3.11) положим $\nu = 1$. Мы получим

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x).$$

Из этого равенства находим $J_2(x)$:

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x).$$

4.112. Зная $J_1(x)$ и $J_2(x)$, получить $J_3(x)$.

4.113. Зная $J_0(x)$ и $J_1(x)$, получить $J_4(x)$.

4.114. Показать, что

а) $J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x} J_0'(x)$,

б) $J_2(x) - J_0(x = 2J_0''(x)$.

4.115. Установить равенство

$$[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

4.116. Показать, что формулы задач **4.109 — 4.115** справедливы для функций $Y_\nu(x)$.

4.117. Выразить $J_{\frac{3}{2}}(x)$ через элементарные функции.

Решение. Применим к функции $J_{\frac{3}{2}}(x)$ рекуррентную формулу (3.11). Полагая $\nu = \frac{1}{2}$, мы находим

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Но так как (см. **4.96** и **4.97**)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

то

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x\right].$$

4.118. Выразить $Y_{\frac{1}{2}}(x)$ через элементарные функции.

Решение. В формуле (3.4) положим $\nu = \frac{1}{2}$, мы получим

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{J_{\frac{1}{2}}(x)\cos\frac{\pi}{2} - J_{-\frac{1}{2}}(x)}{\sin\frac{\pi}{2}} = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

4.119. Проверить, что функции $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ и $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Бесселя при $\nu = \frac{1}{2}$:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0.$$

4.120. Выразить $J_{-\frac{3}{2}}(x)$, $J_{\frac{5}{2}}(x)$, $J_{-\frac{5}{2}}(x)$ через элементарные функции.

4.121. Выразить $Y_{-\frac{1}{2}}(x)$, $Y_{\frac{3}{2}}(x)$, $Y_{-\frac{3}{2}}(x)$ и $Y_{\frac{5}{2}}(x)$ через элементарные функции.

3. Асимптотические формулы. Графики функций Бесселя. В этом пункте рассматриваются асимптотические формулы для функций Бесселя при $x \to 0$ и $x \to \infty$. При этом формула

$$f(x) = \varphi(x) + 0(x^k) \text{ при } x \to 0$$

означает, что существуют такие постоянные C_1 и C_2, что

$$C_1 \leqslant \left| \frac{f(x) - \varphi(x)}{x^k} \right| \leqslant C_2 \text{ при } x \to 0.$$

Аналогично,

$$f(x) = \psi(x) + 0(x^{-k}) \text{ при } x \to \infty$$

значит, что

$$C_1' \leqslant \left| \frac{f(x) - \psi(x)}{x^{-k}} \right| \leqslant C_2', \text{ когда } x \to \infty,$$

где C_1' и C_2' — некоторые постоянные. Мы будем, как и раньше, писать $f(x) \infty \varphi(x)$, если бесконечно малые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны в заданной точке.

При $x \to \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ A(x) \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + B(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right\}, \quad (3.13)$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ A(x) \sin\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - B(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right\}, \quad (3.14)$$

где

$$A(x) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k (4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2) \ldots [4n^2 - (4k-1)^2]}{(2k)!\, 2^{6k} x^{2k}} + O\left(\frac{1}{x^{2m+2}}\right),$$

$$B(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k (4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2) \ldots [4n^2 - (4k-3)^2]}{(2k-1)!\, 2^{6k-3} x^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right),$$

$$m > \frac{2n-5}{4}.$$

4.122. Показать, что при $x \to 0$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4), \quad J_0(0) = 1.$$

Решение. Выпишем ряд для функции $J_0(x)$:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

Этот ряд во всяком случае при малых x удовлетворяет признаку Лейбница, поэтому его остаток не превосходит по абсолютной величине первого отброшенного члена. Следовательно,

$$\left| J_0(x) - 1 + \frac{x^2}{4} \right| \leqslant \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2}, \text{ т. е. } 0 \leqslant \left| \frac{J_0(x) - 1 + \frac{x^2}{4}}{x^4} \right| \leqslant \frac{1}{64},$$

и мы можем написать

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4) \quad (x \to 0).$$

Ясно, что $J_0(0) = 1$.

4.123. Показать, что

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_0(x)+O(x^2),\quad (x\to 0)$$

(γ — постоянная Эйлера).

Решение. Выпишем ряд для функции $Y_0(x)$, использовав формулу (3.6)

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_0(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

Знакочередующийся ряд в правой части при малых x удовлетворяет признаку Лейбница, так что его сумма не превосходит первого члена, поэтому

$$\left|Y_0(x)-\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_0(x)\right|\leqslant\frac{x^2}{4},$$

т е.

$$0<\frac{\left|Y_0(x)-\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_0(x)\right|}{x^2}\leqslant\frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать.

4.124. Показать, что при $x\to 0$

$$J_\nu(x)\approx\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},\quad J_{-\nu}(x)\approx\frac{2^\nu}{x^\nu\Gamma(1-\nu)}.$$

Указание. Воспользоваться рядами (3.2) и (3.3).

4.125. Показать, что при $x\to 0$

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_n(x)+O(x^{-n}).$$

Указание. Использовать формулу (3.7).

4.126. Выписать асимптотическую формулу при $x\to\infty$ для функции $J_0(x)$ с точностью до членов порядка x^{-3}.

Решение. В формуле (3.13) полагаем $n=0$ и отбрасываем все члены, которые содержат $\frac{1}{x}$ в степени выше третьей. Это можно сделать, так как при любом натуральном m условие

$$m>\frac{2n-5}{4}=-\frac{5}{4}$$

выполнено.

Мы получаем

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left[1-\frac{9}{2^7x^2}\right]+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2^3x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(1-\frac{9}{128x^2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right\}.$$

4.127. Показать, что при $x \to \infty$ имеют место асимптотические формулы:

а) $J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \frac{3}{8x}\sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}$;

б) $J_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) - \frac{15}{8x}\sin\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}$;

в) $J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) - \right.$

$\left. - \frac{4\nu^2 - 1}{8x}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}$.

4.128. Показать, что для функций Бесселя второго рода справедливы асимптотические равенства

а) $Y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$;

б) $Y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$;

в) $Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Указание. Использовать формулу (3.14).

4.129. Показать, что для корней x_k функции $J_0(x)$ при больших значениях k справедлива асимптотическая формула

$$x_k = \pi k + \frac{3}{4}\pi + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Решение. Из формулы задачи **4.126** при $x \to \infty$ следует, что

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}.$$

Если пренебречь вторым и третьим слагаемыми, стремящимися к нулю при $x \to \infty$ значительно быстрее, чем первое, то приближенное значение корня мы найдем из уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда $x_k - \frac{\pi}{4} \approx \pi k + \frac{\pi}{2}$, или $x_k \approx \pi k + \frac{3}{4}\pi$. Для того чтобы уточнить значение корня, положим $x_k = \pi k + \frac{3}{4}\pi + \alpha_k$, подста-

вим x_k в формулу для $J_0(x)$ и приравняем нулю:

$$\cos\left(\pi k+\frac{3}{4}\pi+\alpha_k-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8\left(\pi k+\frac{3}{4}\pi+\alpha_k\right)}\sin\left(\pi k+\frac{3}{4}\pi+\alpha_k-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=-\sin(\pi k+\alpha_k)+$$

$$+\frac{1}{8k\left(\pi+\frac{3\pi+\alpha_k}{k}\right)}\cos(\pi k+\alpha_k)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=0.$$

Но $\sin(\pi k+\alpha_k)=(-1)^k\sin\alpha_k$, $\cos(\pi k+\alpha_k)=(-1)^k\cos\alpha_k$, поэтому из последнего уравнения получаем

$$(-1)^k\sin\alpha_k-\frac{(-1)^k}{8k\left(\pi+\frac{3\pi+\alpha_k}{k}\right)}\cos\alpha_k+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_k=\frac{1}{k}\frac{1}{8\left(\pi+\frac{3\pi+\alpha_k}{k}\right)}+O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$ А так как $\operatorname{tg}\alpha_k\approx\alpha_k$, то

$$\alpha_k=O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Таким образом,

$$x_k=\pi k+\frac{3}{4}\pi+O\left(\frac{1}{k}\right),$$

что и требовалось получить.

4.130. Показать, что при больших значениях k корни функции $J_n(x)$ удовлетворяют асимптотическому равенству

$$x_k=(2k+n)\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

4.131. Показать, что корни функции $Y_n(x)$ удовлетворяют асимптотическому равенству

$$x_k=(2k+n)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

4.132. Построить график функции $J_0(x)$.

Решение. Из результатов задач **4.122** и **4.129** вытекает, что $J_0(x)\approx 1-\frac{x^2}{4}$ при $x\to 0$ и $J_0(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ при $x\to\infty$, причем в точках $x_k\approx\pi k+\frac{3}{4}\pi$ функция $J_0(x)$ обращается в нуль. Отметим также, что это — четная функция, поскольку при разложении в ряд (см. **4.122**) участвуют только четные степени x. Достаточно поэтому построить график $J_0(x)$ для $x\geqslant 0$.

Нанесем на график нули функции $J_0(x)$:

$$x_1\approx\frac{3}{4}\pi,\quad x_2\approx\frac{7}{4}\pi,\quad x_3\approx\frac{11}{4}\pi,\quad x_4\approx\frac{15}{4}\pi,\ \ldots$$

В силу формулы $J_0'(x) = -J_1(x)$ (задача **4.110**) $J_0(x)$ имеет стационарные точки там, где $J_1(x)$ обращается в нуль, т. е. в точках (см. задачу **4.130**)

$$\bar{x}_k \approx \frac{2k+1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi = \pi k + \frac{5}{4}\pi,$$

т. е. $\bar{x}_1 \approx \frac{9}{4}\pi$, $\bar{x}_2 \approx \frac{13}{4}\pi$, $\bar{x}_3 \approx \frac{17}{4}\pi$, ... Заметим, что $J_0''(\bar{x}_k) \neq 0$, иначе из формулы а) задачи **4.114** следовало бы, что $J_2(\bar{x}_k) = 0$, а тогда и $J_0(\bar{x}_k) = 0$ (см. **4.111**). Последнее неверно, так как точки $\bar{x}_k$ не совпадают с x_k. Следовательно, стационарные точки $\bar{x}_k$ являются точками экстремума функции $J_0(x)$. Экстремальные точки $\bar{x}_k$ располагаются по одной между нулями функции $J_0(x)$. Для уточнения поведения графика $J_0(x)$ находим ее значения в экстремальных точках:

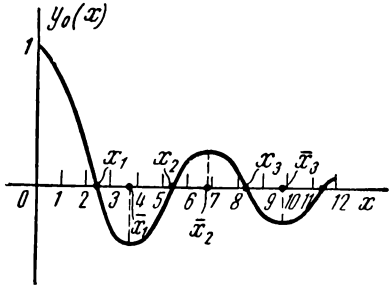


Рис. 113

$$J_0(\bar{x}_1) \approx -0{,}4;\quad J_0(\bar{x}_2) \approx 0{,}3;$$
$$J_0(\bar{x}_3) \approx -0{,}2.$$

Из асимптотической формулы (задача **4.126**) видно, что кривая $y = J_0(x)$ имеет колебательный характер (период колебаний близок 2π), но амплитуда колебаний с ростом x уменьшается, при $x \to \infty$ функция $J_0(x)$ стремится к нулю (рис. 113).

4.133. Показать, что графики функций $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$ имеют вид, указанный на рис. 114.

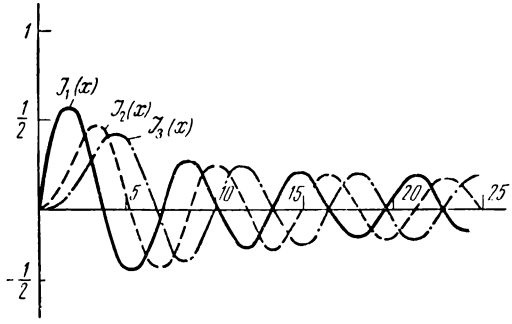


Рис. 114

4.134. Показать, что графики функций $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ имеют вид, указанный на рис. 115.

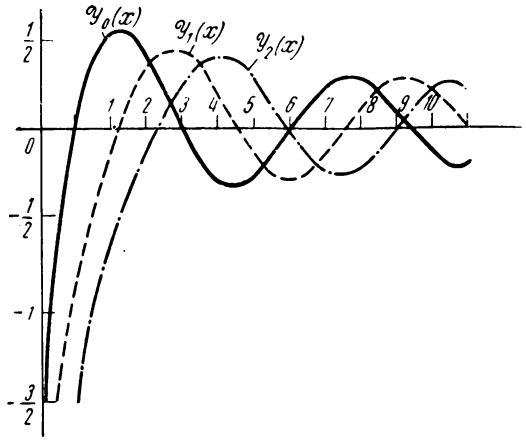


Рис. 115

4. Интегральные формулы. В этом пункте будут рассмотрены интегралы, под знаком которых содержатся функции Бесселя.

4.135. Показать, что

$$\int J_{\nu-1}(x)\, x^{\nu}\, dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + C.$$

Решение. Запишем формулу задачи **4.106**:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x^{\nu} J_{\nu}(x)) = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x),$$

или

$$x^{\nu} J_{\nu-1}(x) = [x^{\nu} J_{\nu}(x)]'.$$

Следовательно,

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\, dx = \int [x^{\nu} J_{\nu}(x)]'\, dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + C.$$

4.136. Используя формулу задачи **4.104**, показать, что

$$\int J_{\nu}(x)\, x^{1-\nu}\, dx = -x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) + C.$$

4.137. Установить рекуррентные интегральные соотношения

$$\int J_{\nu+2}(x)\, dx = \int J_{\nu}(x)\, dx - 2J_{\nu+1}(x).$$

Указание. См. формулу (3.12) задачи **4.109**.

4.138. Из результата задачи **4.137** вывести формулу

$$\int_0^x J_{\nu}(t)\, dt = 2\,[J_{\nu+1}(x) + J_{\nu+3}(x) + J_{\nu+5}(x) + \ldots]$$

В задачах **4.139 — 4.146** вычислить интегралы, используя интегрирование по частям, и формулы, полученные в задачах **4.135 — 4.138.**

4.139. $\int_0^x x^7 J_2(x)\,dx$.

4.140. $\int_0^x x^4 J_0(x)\,dx$.

4.141. $\int_0^x x J_0(x)\,dx$.

4.142. $\int_0^x x^9 J_4(x)\,dx$.

4.143. $\int_0^x x^5 J_2(x)\,dx$.

4.144. $\int_0^x x^8 J_6(x)\,dx$.

4.145. $\int_0^x x^5 J_1(x)\,dx$.

4.146. $\int_0^x x J_1(x)\,dx$.

4.147. Доказать равенство

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,x\,dx=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha J_\nu(\beta x)\,J_{\nu+1}(\alpha x)-\beta J_\nu(\alpha x)\,J_{\nu+1}(\beta x)\}.$$

Решение. Как было показано в задаче **4.103**, функции $y=J_\nu(\alpha x)$ и $z=J_\nu(\beta x)$ удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\alpha^2x^2-\nu^2)\,y=0,$$

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}+(\beta^2x^2-\nu^2)\,z=0.$$

Умножим первое уравнение на $\frac{z}{x}$, второе на $\frac{y}{x}$ и вычтем из первого второе. Мы получим

$$zx\frac{d^2y}{dx^2}-yx\frac{d^2z}{dx^2}+z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}=(\beta^2-\alpha^2)\,xyz$$

или

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)\right\}=(\beta^2-\alpha^2)\,xyz.$$

Проинтегрируем полученное уравнение от 0 до x, причем заменим $y(x)$ на $J_\nu(\alpha x)$, а $z(x)$ на $J_\nu(\beta x)$. Мы находим

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^x J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,x\,dx=x\left\{J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)-\right.$$

$$\left.-J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}J_\nu(\beta x)\right\}.$$

Но

$$\frac{d}{dx}J_\nu(\alpha x)=\alpha\frac{d}{d(\alpha x)}J_\nu(\alpha x)=\alpha J'_\nu(\alpha x),$$

поэтому

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,x\,dx=\frac{x}{\beta^2-\alpha^2}\{\alpha J_\nu(\beta x)\,J'_\nu(\alpha x)-\beta J_\nu(\alpha x)\,J'_\nu(\beta x)\}.$$

Так как (см. 4.109)

$$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x),$$

то

$$J_\nu'(\alpha x) = \frac{\nu}{\alpha x} J_\nu(\alpha x) - J_{\nu+1}(\alpha x),$$

$$J_\nu'(\beta x) = \frac{\nu}{\beta x} J_\nu(\beta x) - J_{\nu+1}(\beta x).$$

Подставив эти значения в полученную ранее формулу, находим

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, x\, dx = \frac{x}{\beta^2 - \alpha^2} \left\{ \alpha J_\nu(\beta x) \left[\frac{\nu}{\alpha x} J_\nu(\alpha x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - J_{\nu+1}(\alpha x) \right] - \beta J_\nu(\alpha x) \left[\frac{\nu}{\beta x} J_\nu(\beta x) - J_{\nu+1}(\beta x) \right] \right\} =$$

$$= \frac{x}{\beta^2 - \alpha^2} \{ - \alpha J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\alpha x) + \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) \},$$

что и требовалось показать.

4.148. Доказать равенство

$$\int_0^x x [J_\nu(\alpha x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \left\{ (J_\nu'(\alpha x))^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 x^2}\right) J_\nu^2(\alpha x) \right\}.$$

Решение. В данном интеграле сделаем замену, положив $\alpha x = u$, и проинтегрируем по частям. Мы получим

$$\int_0^x x [J_\nu(\alpha x)]^2 dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\alpha x} [J_\nu(u)]^2 u\, du = \frac{u^2}{2\alpha^2} J_\nu^2(u) \Big|_0^{\alpha x} -$$

$$- \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\alpha x} u^2 J_\nu(u) J_\nu'(u)\, du = \frac{x^2}{2} J_\nu^2(\alpha x) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\alpha x} u^2 J_\nu(u) J_\nu'(u)\, du,$$

так как функция $u^2 J_\nu^2(u)$ при $u \to 0$ ведет себя как $\frac{u^{2\nu+2}}{u^{-2\nu}\Gamma(1+\nu)}$ (см. 4.124), т. е. стремится к нулю при $\nu > -1$. Для того чтобы вычислить оставшийся интеграл, найдем из уравнения Бесселя (3.1) $-x^2 J_\nu(x)$:

$$- x^2 J_\nu(x) = x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x).$$

Умножив теперь обе части этого равенства на $J_\nu'(x)$, находим выражение для подынтегральной функции $-x^2 J_\nu(x) J_\nu'(x)$:

$$- x^2 J_\nu(x) J_\nu'(x) = x^2 J_\nu''(x) J_\nu'(x) + x [J_\nu'(x)]^2 - \nu^2 J_\nu(x) J_\nu'(x),$$

или, как нетрудно показать,

$$- x^2 J_\nu(x) J_\nu'(x) = \frac{1}{2} [x^2 J_\nu'(x)]' - \frac{\nu^2}{2} [J_\nu^2(x)]'.$$

Следовательно,

$$\int_0^x x\,[J_\nu(\alpha x)]^2\,dx = \frac{x^2}{2}\,J_\nu^2(\alpha x) + \frac{1}{2\alpha^2}\int_0^{\alpha x} d\,[u^2\,[J_\nu'(u)]^2 -$$

$$-\frac{\nu^2}{2\alpha^2}\int_0^{\alpha x} d\,[J_\nu^2(u)] = \frac{x^2}{2}\,J_\nu^2(\alpha x) + \frac{1}{2\alpha^2}\,\alpha^2x^2\,[J_\nu'(\alpha x)]^2 -$$

$$-\frac{\nu^2}{2\alpha^2}\,J_\nu^2(\alpha x) = \frac{x^2}{2}\left[(J_\nu'(\alpha x))^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2x^2}\right)J_\nu^2(\alpha x)\right],$$

что и следовало показать.

4.149. Показать, что если α и β — корни функции $J_\nu(x)$, т. е. $J_\nu(\alpha) = 0$, $J_\nu(\beta) = 0$, то имеет место следующее равенство:

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta; \\ \frac{1}{2}\,[J_\nu'(\alpha)]^2, & \alpha = \beta \end{cases} \qquad (3.15)$$

$$(\nu > -1).$$

Указание. Использовать формулы задач **4.147** и **4.148**.

4.150. Показать, что

$$\int_0^1 tJ_1^2(\alpha t)\,dt = \frac{1}{2}\,[J_1^2(\alpha) - J_0^2(\alpha)],$$

где α — корень уравнения $J_1'(\alpha) = 0$.

4.151. Доказать равенство

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Указание. Заменить $J_0(bx)$ интегральным представлением (**4.100**) и поменять порядок интегрирования.

4.152. Доказать формулу

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}\,dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Указание. Заменить $J_\nu(x)$ степенным рядом, проинтегрировать полученный ряд почленно.

4.153. Выразить через функции Бесселя индекса $\nu = \pm\frac{1}{2}$ интегралы Френеля $S(x)$ и $C(x)$ (§ 2, п. 3).

Указание. См. **4.77, 4.96, 4.97.**

5. Другие функции Бесселя. *Функциями Бесселя* III *рода*, или *функциями Ханкеля*, называются следующие линейные комбинации из функций Бесселя I и II рода:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) = i\,\frac{J_\nu(x)\,e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu},$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) = -i\,\frac{J_\nu(x)\,e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \tag{3.16}$$

если ν не является целым числом, и

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\nu\to n} H_\nu^{(1)}(x), \quad H_n^{(2)}(x) = \lim_{\nu\to n} H_\nu^{(2)}(x), \tag{3.17}$$

при n целом.

Уравнение

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)\,y = 0 \tag{3.18}$$

называются *модифицированным* уравнением Бесселя. Его решения:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{3.19}$$

модифицированная функция Бесселя I *рода* и

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}; \qquad K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x) \tag{3.20}$$
(ν — нецелое) (n — целое)

модифицированная функция Бесселя II *рода.*

При небольших значениях x удобна следующая формула:

$$K_n(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left\{\ln\frac{x}{2} - \gamma - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}\frac{(-1)^{n-k}\,(n-k-1)!}{k!}, \tag{3.21}$$

где γ — постоянная Эйлера.

Для модифицированных функций Бесселя справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu I_\nu(x)\right] = x^\nu I_{\nu-1}(x); \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} I_\nu(x)\right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x), \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} x\dfrac{d}{dx}I_\nu(x) = \nu I_\nu(x) + xI_{\nu+1}(x), \\ x\dfrac{d}{dx}I_\nu(x) = -\nu I_\nu(x) + xI_{\nu-1}(x). \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} x\dfrac{d}{dx}K_\nu(x) = -\nu K_\nu(x) - xK_{\nu-1}(x), \\ x\dfrac{d}{dx}K_\nu(x) = \nu K_\nu(x) - xK_{\nu+1}(x). \end{cases} \tag{3.24}$$

При $x \to \infty$ модифицированные функции Бесселя имеют следующую асимптотику:

$$I_\nu(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \tag{3.25}$$

Графики модифицированных функций Бесселя приведены на рис. 116, 117.

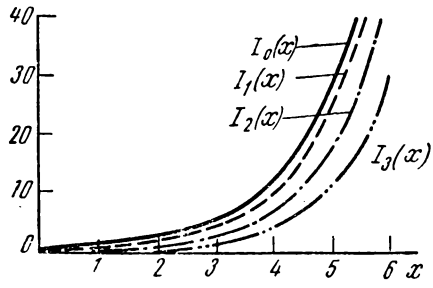


Рис. 116

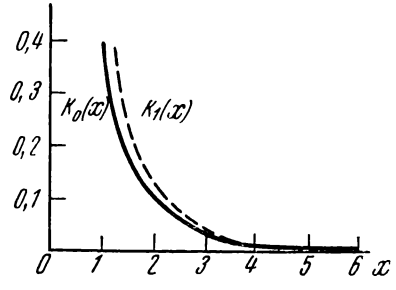


Рис. 117

4.154. Показать, что

$$H^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\pi\nu} H^{(1)}_\nu(x), \quad H^{(2)}_{-\nu}(x) = e^{-i\pi\nu} H^{(2)}_\nu(x).$$

Решение. По формуле (3.16) имеем

$$H^{(1)}_{-\nu}(x) = i\frac{J_{-\nu}(x)\, e^{i\pi\nu} - J_\nu(x)}{\sin(-\pi\nu)} = i\frac{e^{i\pi\nu}\left[J_\nu(x)\, e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right]}{-\sin\pi\nu} =$$

$$= e^{i\pi\nu} i\frac{J_\nu(x)\, e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} = e^{i\pi\nu} H^{(1)}_\nu(x).$$

Аналогично получается и второе соотношение.

4.155. Показать, что для функций Ханкеля целого индекса выполняются следующие тождества:

$$H^{(1)}_{-n}(x) = (-1)^n H^{(1)}_n(x); \qquad H^{(2)}_{-n}(x) = (-1)^n H^{(2)}_n(x).$$

4.156. Доказать рекуррентные формулы (3.9) и (3.10) для функций Ханкеля.

4.157. Получить выражения:

$$H^{(1)}_{1/2}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix}, \qquad H^{(2)}_{1/2}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-ix},$$

$$H^{(1)}_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix}, \qquad H^{(2)}_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix}.$$

4.158. Используя результаты задач **4.156**, **4.157**, выразить через элементарные функции $H^{(1)}_{3/2}(x)$, $H^{(1)}_{5/2}(x)$, $H^{(2)}_{-3/2}(x)$.

4.159. Вывести асимптотические формулы при $x \to \infty$:

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left[x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}\{A(x) - iB(x)\},$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left[x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}\{A(x) - iB(x)\},$$

где $A(x)$ и $B(x)$ определены в п. 3 (формулы (3.13) и (3.14)).

4.160. Вывести формулы:

а) $I_\nu(ix) = e^{\frac{\pi\nu}{2}i} J_\nu(x)$, б) $I_\nu(-ix) = e^{-\frac{\pi\nu}{2}i} J_\nu(x)$,

в) $K_\nu(-ix) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi\nu}{2}i} H_\nu^{(1)}(x)$.

Решение. Так как $i^\nu = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^\nu = e^{\frac{\pi\nu}{2}i}$ и $i^{2k} = (-1)^k$, то из формулы (3.19) получаем

$$I_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{\nu+2k}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} = e^{\frac{\pi\nu}{2}i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} = e^{\frac{\pi\nu}{2}i} J_\nu(x),$$

поскольку последний ряд определяет $J_\nu(x)$ (см. (3.2)). Тем самым формула а) доказана. Формула б) доказывается совершенно так же. Последняя же формула вытекает из определения (3.20) и формулы б).

4.161. Показать, что $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Решение. По определению функции $I_{-n}(x)$ имеем

$$I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}}{0!\Gamma(-n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2}}{1!\Gamma(-n+2)} +$$

$$+ \ldots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2}}{(n-1)!\,\Gamma(0)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{n!\Gamma(1)} + \ldots$$

А так как $\Gamma(x)$ при всех целых неположительных значениях x имеет полюс первого порядка, то

$$\frac{1}{\Gamma(m)} = 0, \qquad m = 0, -1, -2, \ldots,$$

поэтому первые слагаемые ряда до члена

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{n!\Gamma(1)}$$

обращаются в нуль, и для $I_{-n}(x)$ мы получаем:

$$I_{-n}(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{n!\Gamma(1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{(n+1)!\Gamma(2)}+\ldots=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)}.$$

Изменим в сумме индекс суммирования, положив $m=k-n$. Это дает

$$I_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{(m+n)!\Gamma(m+1)}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{(m+n)!m!}=I_n(x),$$

что и требовалось показать.

4.162. Проверить, дифференцируя почленно ряд для $I_\nu(x)$, что $I_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению (3.18).

4.163. Показать, что функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ линейно независимы при ν нецелом и линейно зависимы при ν целом.

Решение. Если ν — целое число, $\nu=n$, то $I_{-n}(x)$ и $I_n(x)$ не только линейно зависимы, но и тождественно совпадают при всех x (**4.161**).

Пусть $\nu\geqslant 0$ — нецелое. При $x\to 0$ из формулы (3.19) получаем

$$I_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{1!\Gamma(\nu+2)}+\ldots\right]\simeq\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}x^\nu,$$

$$I_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{1!\Gamma(-\nu+2)}+\ldots\right]\simeq\frac{2^\nu}{\Gamma(-\nu+1)}x^{-\nu}.$$

Из этих формул видно, что при $x\to 0$ функция $I_\nu(x)$ стремится к нулю, как x^ν, а $I_{-\nu}(x)$ возрастает неограниченно, как $x^{-\nu}$. Поэтому равенство $I_\nu(x)=CI_{-\nu}(x)$ невозможно ни при каком значении постоянной C, т. е. функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ линейно независимы.

4.164. Показать, что функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы при любом ν.

Указание. Рассмотреть поведение функций при $x\to 0$.

4.165. Показать, что при $x\to 0$

$$K_0(x)\approx-\ln x,\qquad K_n(x)\approx\frac{1}{2^{n+1}}x^{-n}.$$

Указание. См. формулу (3.21).

4.166. Вывести рекуррентные соотношения:

а) $2I'_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x)$,

б) $\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)$,

в) $I'_0(x) = I_1(x)$.

Указание. См. формулы (3.23).

4.167. Показать, что

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sh}\,x, \qquad I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{ch}\,x.$$

Решение. Выпишем ряд для функции $I_{\frac{1}{2}}(x)$:

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)} = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Но

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

поэтому имеем

$$JI_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}2^{k+1}}{2^{2k+1}k!1\cdot 3\ldots(2k+1)\sqrt{\pi}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sh}\,x,$$

так как полученный ряд есть ряд Маклорена для $\mathrm{sh}\,x$.

Аналогично доказывается и второе равенство.

4.168. Выразить через элементарные функции

$$I_{\frac{3}{2}}(x), \qquad I_{-\frac{3}{2}}(x), \qquad K_{\frac{1}{2}}(x), \qquad K_{\frac{3}{2}}(x).$$

4.169. Показать, что

а) $\int x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)\,dx = x^{-\nu} I_\nu(x) + C$,

б) $\int x^{\nu} I_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu} I_\nu(x) + C$.

4.170. Используя формулы (3.24), показать, что

$$-2K'_\nu(x) = K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)$$

$$-\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) = K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x)$$

6. Производящие функции. Функция $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ называется *производящей функцией* для бесселевых функций 1 рода. Для нее справедливо равенство

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n. \tag{3.26}$$

Этот ряд абсолютно сходится при всех значениях x и z, отличных от нуля.

4.171. Доказать теорему сложения для бесселевых функций: при любом целом n

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\, J_{n-k}(y).$$

Решение. Возьмем тождество

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)\left(z-\frac{1}{z}\right)}=e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{z}\right)}.$$

В силу формулы (3.26) мы имеем

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x+y)\, z^k,$$

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, z^m,$$

$$e^{\frac{1}{2}y\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)\, z^n.$$

Эти ряды сходятся абсолютно, поэтому их можно почленно перемножить. Вычислим произведение двух последних:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, z^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)\, z^n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, J_n(y)\, z^{n+m}.$$

Положим $n+m=k$, тогда k будет изменяться от $-\infty$ до ∞, а сумма приобретет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, J_{k-m}(y).$$

Но этот ряд должен быть рядом функции $e^{\frac{1}{2}(x+y)\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ при всех x, y и $z\neq 0$, поэтому имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x+y)\, z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, J_{k-m}(y)\right)z^k.$$

Справа и слева в последнем равенстве стоят ряды Лорана, из их равенства следует, что коэффициенты при одинаковых степе-

нях z у них совпадают, т. е.

$$J_k(x+y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\,J_{k-m}(y).$$

4.172. Показать, что

$$e^{ix\sin\varphi}=J_0(x)+2i\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\varphi+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\varphi.$$

Решение. В формуле (3.26) положим $z=e^{i\varphi}$. Тогда $\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}=i\sin\varphi$ и

$$e^{ix\sin\varphi}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\,e^{ik\varphi}=J_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[J_k(x)\,e^{ik\varphi}+J_{-k}(x)\,e^{-ik\varphi}\right].$$

Но (см. **4.95**) $J_{-k}(x)=(-1)^k J_k(x)$ при k целом, поэтому

$$e^{ix\sin\varphi}=J_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty} J_k(x)\left[e^{ik\varphi}+(-1)^k e^{-ik\varphi}\right].$$

Заметим теперь, что если k — четное, $k=2m$, то

$$e^{i2m\varphi}+(-1)^{2m}e^{-i2m\varphi}=2\cos 2m\varphi,$$

если же k — нечетное, $k=2m+1$, то

$$e^{i(2m+1)\varphi}+(-1)^{2m+1}e^{-i(2m+1)\varphi}=2i\sin(2m+1)\varphi,$$

следовательно,

$$e^{ix\sin\varphi}=J_0(x)+2i\sin\varphi J_1(x)+2\cos\varphi J_2(x)+\ldots$$

4.173. Используя результат **4.172**, показать, что

$$e^{ix\cos\varphi}=J_0(x)+2i\cos\varphi J_1(x)+2i^2\cos 2\varphi J_2(x)+\ldots$$

4.174. Показать, что имеют место следующие разложения:

$$\cos(x\sin\varphi)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi)=2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\varphi.$$

4.175. Показать, что справедливы следующие разложения:

$$\cos(x\cos\varphi)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x)\cos 2k\varphi,$$

$$\sin(x\cos\varphi)=-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k-1}(x)\cos(2k-1)\varphi.$$

4.176. Показать, что функции $\sin x$ и $\cos x$ разлагаются в ряды по функциям Бесселя:

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \ldots$$
$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \ldots$$

4.177. Показать, что производящей функцией для $I_n(x)$ будет функция $e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$, другими словами, что

$$e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(x)\, z^k. \tag{3.27}$$

Указание. Использовать связь между $I_n(x)$ и $J_n(x)$ (задача 4.160).

4.178. Показать, что имеют место следующие разложения:

$$e^{x\cos\varphi} = I_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)\cos k\varphi$$

$$e^{x\sin\varphi} = I_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)\cos\left(\frac{k\pi}{2} - k\varphi\right).$$

Указание. В формуле (3.27) положить $z = e^{i\varphi}$ и $z = ie^{i\varphi}$.

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА

1. Формула Родрига. Производящая функция. Рекуррентные формулы. *Многочлены Лежандра $P_n(x)$ определяются формулой Родрига:*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$P_0(x) = 1. \tag{4.1}$$

4.179. Показать, что многочлен Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0. \tag{4.2}$$

Решение. Многочлены Лежандра $P_n(x)$ отличаются постоянным множителем от функции $y = R_n^{(n)}(x)$, где $R_n = (x^2-1)^n$, а так как уравнение (4.2) однородное, то достаточно показать, что эта функция является его решением.

Производная от $R_n(x) = (x^2-1)^n$ равна

$$R_n'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1} = \frac{2nx}{x^2-1}(x^2-1)^n = \frac{2nx}{x^2-1}R_n(x),$$

следовательно,

$$(x^2-1)\,R_n'(x) = 2nxR_n(x).$$

Дифференцируя это равенство $(n+1)$ раз по формуле Лейбница *, перенося затем все члены вправо, получим

---

* $(uv)^{n+1} = u^{(n+1)}v + (n+1)\,u^{(n)}v' + \frac{(n+1)\,n}{2}u^{(n-1)}v'' + \ldots$

$$(x^2-1)R_n^{(n+2)}+(n+1)2xR_n^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}2R_n^{(n)}=$$
$$=2nxR_n^{(n+1)}+2n(n+1)R_n^{(n)},$$
$$(1-x^2)R_n^{(n+2)}-2nxR_n^{(n+1)}+n(n+1)R_n^{(n)}=0.$$

Это означает, что $y=R_n^{(n)}(x)$, а вместе с ней и $P_n(x)$, решения уравнения (4.2), что и нужно показать.

4.180. Показать, что $P_n(1)=1$.

Решение. Запишем $(x^2-1)^n$ в виде

$$(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$$

и продифференцируем n раз, полагая в формуле Лейбница $u=(x-1)^n$, $v=(x+1)^n$.

Мы получим

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=n!(x+1)^n+n\cdot n\ldots3\cdot2\cdot n(x-1)(x+1)^{n-1}+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}n\ldots3\cdot n(n-1)(x+1)^{n-2}(x-1)^2+\ldots+(x-1)^n\cdot n!$$

Положим здесь $x=1$ и сравним с (4.1) при $x=1$:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n|_{x=1}=2^n n!P_n(1)=n!2^n.$$

Отсюда ясно, что $P_n(1)=1$.

4.181. Доказать, что всякое решение уравнения (4.2), ограниченное при $x=1$, отличается от многочлена Лежандра $P_n(x)$ только постоянным множителем. В частности, $P_n(x)$ — единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(1)=1$.

Решение. Разделив уравнение (4.2) на коэффициент при y'', приведем его к виду

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

где $p(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$, $q(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}$. Из теории линейных однородных уравнений известна формула общего решения этого уравнения (см., например, В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, гл. V, § 2, стр. 192—193):

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}dx\quad(C_1,\ C_2-\text{const}),$$

где y_1 — одно какое-либо частное решение.

В нашем случае $p(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$ и

$$e^{-\int p(x)\,dx}=e^{\int\frac{2x\,dx}{1-x^2}}=e^{-\ln(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

В качестве y_1 возьмем многочлен Лежандра $y_1 = P_n(x)$, мы получим

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 P_n(x) \int \frac{e^{+\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{P_n^2(x)}\,dx =$$

$$= C_1 P_n(x) + C_2 P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2) P_n^2(x)}.$$

Рассмотрим интеграл, стоящий в правой части равенства. Подынтегральная функция есть рациональная дробь, так как $P_n(x)$ — многочлен. Поскольку $P_n(1) \neq 0$ (см. задачу **4.180**), то $x = 1$ — простой корень знаменателя, так что в разложении рациональной дроби на простейшие выделится только один член $\frac{A}{x-1}$ $(A \neq 0)$, отвечающий этому корню. После интегрирования этот член даст $A \ln(1-x)$, а остальные члены не будут иметь особенности в точке $x = 1$. Иными словами, имеет место разложение

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 P_n(x) [A \ln(1-x) + \varphi(x)],$$

где $\varphi(x)$ имеет конечный предел при $x = 1$. Следовательно, если $C_2 \neq 0$, то $y \to \infty$ при $x \to 1$ вопреки условию. Значит, для ограниченного при $x = 1$ решения должно быть $C_2 = 0$, т. е. это решение имеет вид $y = C_1 P_n(x)$. При условии $y(1) = 1$ получим $C_1 = 1$, так как $P_n(1) = 1$. Следовательно, $P_n(x)$ — единственное решение, удовлетворяющее этому условию.

4.182. Присоединенной функцией Лежандра называется функция

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \qquad (4.3)$$

Показать, что функция $P_n^m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m}{1-x^2}\right] y = 0. \qquad (4.4)$$

Указание. Продифференцировать уравнение (4.2) m раз.

4.183. Показать, что функция $W(h, x) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2}$ является производящей функцией для многочленов Лежандра, т. е. имеет место разложение

$$(1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = P_0(x) + hP_1(x) + \ldots + h^n P_n(x) + \ldots \qquad (4.5)$$

Решение. Разложим функцию $W(h, x)$ в ряд по степеням h, обозначая $y_n(x)$ коэффициенты при h^n:

$$(1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = y_0(x) + hy_1(x) + \ldots + h^n y_n(x) + \ldots$$

При $x = 1$ $W(h, 1) = (1 - 2h + h^2)^{-1/2} = (1-h)^{-1}$, поэтому при $x = 1$ написанное разложение должно совпасть с разложением

$$(1-h)^{-1} = 1 + h + h^2 + \ldots + h^n - \ldots, \quad |h| < 1,$$

откуда в силу единственности разложения в степенной ряд получаем, что $y_n(1)=1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Покажем теперь, что функции $y_n(x)$ удовлетворяют уравнению (4.2). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $W(h, x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению (проверьте!):

$$h^2\frac{\partial^2 W}{\partial h^2}+(1-x^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2h\frac{\partial W}{\partial h}-2x\frac{\partial W}{\partial x}=0.$$

Подставим в это уравнение вместо $W(h, x)$ ряд $\sum_0^\infty y_n(x)h^n$.

Так как

$$h^2\frac{\partial^2 W}{\partial h^2}=h^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)y_n(x)h^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)y_n(x)h^n,$$

$$h\frac{\partial W}{\partial h}=h\sum_{n=1}^{\infty}ny_n(x)h^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}ny_n(x)h^n,$$

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}y_n''(x)h^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^2)y_n''(x)h^n,$$

$$2x\frac{\partial W}{\partial x}=2x\sum_{n=0}^{\infty}y_n'(x)h^n=\sum_{n=0}^{\infty}2xy_n'(x)h^n,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)y_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^2)y_n''(x)h^n+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2ny_n(x)h^n-\sum_{n=0}^{\infty}2xy_n'(x)h^n=0.$$

Собирая коэффициенты при h^n, запишем

$$(1-x^2)y_n''(x)-2xy_n'(x)+n(n+1)y_n(x)=0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, $y_n(x)$ есть решение уравнения (4.2), а так как оно, как было показано, удовлетворяет еще условию $y_n(1)=1$, то вследствие результата задачи **4.181** $y_n(x)=P_n(x)$, и разложение доказано.

4.184. Показать, что $|P_n(x)|\leqslant 1$ при $|x|\leqslant 1$.

Решение. При $x=+1$ и $x=-1$ мы получаем

$$W(h, 1)=(1-2h+h^2)^{-1/2}=(1-h)^{-1}=1+h+h^2+\ldots$$
$$\ldots+h^n+\ldots,$$
$$W(h, -1)=(1+2h+h^2)^{-1/2}=(1+h)^{-1}=1-h+h^2-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n h^n+\ldots$$

Эти ряды абсолютно сходятся при $|h|<1$. $W(h, x)$ — монотонная функция переменной x, когда x меняется от -1 до $+1$ при фиксированном h ($|h|<1$), так как при этом

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{h}{\sqrt{(1-2xh+h^2)^3}}$$

и знак производной совпадает со знаком h. Значения $W(h, x)$ заключены между $W(h, -1)$ и $W(h, +1)$.

Если $h>0$, то

$$W(h, -1)=\frac{1}{1+h}<W(h, x)<\frac{1}{1-h}=W(h, 1), \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Функция $(1-\theta h)^{-1}$ при фиксированном h как функция переменной θ непрерывна в замкнутом интервале $|\theta|\leqslant 1$, и поэтому она принимает все промежуточные значения между $(1+h)^{-1}$ (при $\theta=-1$) и $(1-h)^{-1}$ (при $\theta=1$). Так как между этими же пределами заключено и $W(h, x)$, то для каждого x ($|x|\leqslant 1$) найдется такое $\theta(x)$, $|\theta(x)|\leqslant 1$, что

$$W(h, x)=(1-\theta(x)h)^{-1}.$$

Разлагая эту функцию в ряд, получаем

$$W(h, x)=(1-\theta(x)h)^{-1}=1+\theta(x)h+\theta^2(x)h+\ldots+\theta^n(x)h^n+\ldots$$

Этот ряд абсолютно сходится при $|\theta|\leqslant 1$, $|h|<1$.

Но мы знаем, что

$$W(h, x)=P_0(x)+hP_1(x)+\ldots+h^nP_n(x)+\ldots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получаем

$$P_n(x)=\theta^n(x), \quad |x|\leqslant 1,$$

а так как $|\theta(x)|\leqslant 1$, то и $|P_n(x)|=|\theta^n(x)|\leqslant 1$ при $|x|\leqslant 1$.

4.185. Показать, что для многочленов Лежандра выполняется рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x) \qquad (4.6)$$
$$n=1, 2, \ldots$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.5). Заметив, что

$$\frac{\partial W}{\partial h}=-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(2h-2x)=\frac{x-h}{1+h^2-2xh}W(h, x),$$

получаем

$$(1+h^2-2xh)\frac{\partial W}{\partial h}-(x-h)W=0.$$

Подставим в это уравнение ряд (4.5):

$$(1+h^2-2xh)[P_1(x)+2hP_2(x)+3h^2P_3(x)+\ldots+$$
$$+nh^{n-1}P_n(x)+\ldots]-(x-h)[P_0(x)+hP_1(x)+$$
$$+h^2P_2(x)+\ldots+h^nP_n(x)+\ldots]=0.$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях h:

$$[P_1(x) - xP_0(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]h^n = 0.$$

Так как сумма ряда равна нулю тождественно по h, то, следовательно, равны нулю коэффициенты при всех степенях h:

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0,$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1,2, \ldots.$$

Отсюда и следует соотношение (4.6).

4.186. Доказать формулу

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n = 1,2,\ldots$$

Указание. Использовать уравнение, которому удовлетворяет $W(x, h)$:

$$h\frac{\partial W}{\partial h} - (x-h)\frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

4.187. Доказать рекуррентную формулу

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x).$$

4.188. Используя формулу Родрига (4.1), выписать многочлены Лежандра $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$.

4.189. Получить $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ непосредственно из дифференциального уравнения Лежандра (4.2).

Указание. Записать $P_1(x) = ax + b$, $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ и т. д. Найти коэффициенты a, b, c и т. д. подстановкой в уравнение при заданном n.

4.190. Получить $P_5(x)$ и $P_6(x)$ из рекуррентной формулы (4.6).

4.191. Показать, что многочлен $P_{2k}(x)$ — четная функция и, следовательно, содержит только четные степени x, а $P_{2k+1}(x)$ нечетная функция, т. е. содержит только нечетные степени x. Получить отсюда равенство $P_n(-1) = (-1)^n$.

4.192. Показать, что

$$P_{2n+1}(0) = 0; \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

4.193. Пусть A_n — старший коэффициент $P_n(x)$. Показать, что

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} A_n.$$

Зная, что $A_0 = 1$, получить выражение для A_n.

Указание. Использовать рекуррентную формулу (4.6).

4.194. Показать, что многочлены Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяют рекуррентным формулам:

а) $(1-x^2)\,P_n'(x)=\frac{n(n+1)}{2n+1}\,[P_{n-1}(x)-P_{n+1}(x)]$,

б) $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)\,P_n(x)$.

2. Ортогональность многочленов Лежандра.

4.195. Показать, что многочлен Лежандра $P_n(x)$ ортогонален на отрезке $[-1, 1]$ любому многочлену $Q_m(x)$ меньшей степени $(m<n)$.

Решение. Требуется показать, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,Q_m(x)\,dx=0 \quad (m<n).$$

Так как $P_n(x)$ отличается от $R_n^{(n)}(x)$ только постоянным множителем, то требуемое равенство будет доказано, если обнаружится, что

$$\int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(x)\,Q_m(x)\,dx=0.$$

В силу того, что $R_n(\pm 1)=0$, $R_n'(\pm 1)=0,\ldots,R_n^{(n-1)}(\pm 1)=0$, а $Q_m^{(m+1)}(x)\equiv 0$ как производная $(m+1)$-го порядка от многочлена степени m, после $(m+1)$-го кратного интегрирования по частям будем иметь:

$$\int_{-1}^{+1} \underbrace{Q_m(x)}_{u}\,\underbrace{R_n^{(n)}(x)\,dx}_{dv}=Q_m(x)\,R_n^{(n-1)}(x)\Big|_{-1}^{+1}-$$

$$-\int_{-1}^{1} Q_m'(x)\,R_n^{(n-1)}(x)\,dx=-\int_{-1}^{1} Q_m'(x)\,R_n^{(n-1)}(x)\,dx=$$

$$=-\left(Q_m'(x)\,R_n^{(n-2)}(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} Q_m''(x)\,R_n^{(n-2)}(x)\,dx\right)=$$

$$=\int_{-1}^{1} Q_m''(x)\,R_n^{(n-2)}(x)\,dx=\pm\int_{-1}^{1} Q_m^{(m+1)}(x)\,R_n^{(n-(m+1))}(x)\,dx=0,$$

что и требовалось доказать.

4.196. Показать, что для многочленов Лежандра $P_n(x)$ выполняется равенство

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

Решение. Первое утверждение немедленно следует из результата задачи **4.195**. Так как многочлен Лежандра старшей степени ортогонален любому многочлену меньшей степени, он ортогонален в том числе и многочлену Лежандра меньшей степени.

Для вычисления интеграла от квадрата многочлена Лежандра рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P_n(x) - \frac{A_n}{A_{n-1}} xP_{n-1}(x) = P_n(x) - \frac{2n-1}{n} xP_{n-1}(x),$$

где A_n — старший коэффициент многочлена $P_n(x)$, а A_{n-1} — многочлена $P_{n-1}(x)$. Значение отношения $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ взято из задачи **4.193**. Коэффициент при x^n в вычитаемом равен A_n, так что $Q(x)$ — многочлен степени, меньшей, чем n. Следовательно, $Q(x)$ ортогонален многочлену $P_n(x)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\left[P_n(x) - \frac{2n-1}{n} xP_{n-1}(x)\right] dx = 0,$$

откуда

$$C_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} xP_n(x)\,P_{n-1}(x)\,dx.$$

Выражая произведение $xP_n(x)$ из формулы (4.6) через $P_{n+1}(x)$ и $P_{n-1}(x)$ и учитывая, что многочлены $P_n(x)$ и $P_{n-1}(x)$ ортогональны, получим

$$C_n = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} \frac{n}{2n+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1} C_{n-1}.$$

Но

$$C_0 = \int_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2,$$

поэтому из предыдущей формулы при $n = 0, 1, 2, \ldots$ получим

$$C_1 = \frac{2}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{5}, \quad C_3 = \frac{2}{7},$$

и вообще

$$C_n = \frac{2}{2n+1}.$$

4.197. Показать, что многочлен Лежандра имеет n различных корней, расположенных внутри отрезка $[-1, 1]$.

Решение. Предположим, что многочлен $P_n(x)$ имеет кратный корень x_0. Тогда $P_n(x_0) = 0$, $P_n'(x_0) = 0$. Но в этом случае из формулы задачи **4.186** следует, что $P_{n-1}(x_0) = 0$. Используя формулу (4.6), получим тогда

$$P_{n-2}(x_0) = \frac{1}{n-1}\left[(2n-1)\,x_0 P_{n-1}(x_0) - nP_n(x_0)\right] = 0.$$

Заменяя в этой формуле n на $n-1$, получим также $P_{n-3}(x_0) = 0$.

Поступая дальше аналогично, получим $P_{n-k}(x_0) = \ldots = P_0(x_0) = 0$. Однако $P_0(x) \equiv 1$, и равенство $P_0(x_0) = 0$ невозможно. Полученное противоречие показывает, что кратных корней многочлен $P_n(x)$ иметь не может.

Покажем теперь, что все нули лежат на отрезке $[-1, 1]$. Предположим, что на этом отрезке всего $0 \leqslant m \leqslant n$ действительных нулей. Обозначим их $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Рассмотрим многочлен $Q_m(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_m)$ степени m (если $m = 0$, то $Q_0 = 1$). $Q_k(1) > 0$, так как все r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ меньше единицы. Далее, $P_n(1) = 1 > 0$, поэтому $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ имеют одинаковые знаки на отрезке $[-1, 1]$, так как корни у них общие, а знаки в точке $x = 1$ совпали. Следовательно, $Q_m(x) P_n(x) > 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (кроме точек $x = r_1, r_2, \ldots, r_m$, где это произведение равняется нулю). Но тогда и

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x)\, dx > 0.$$

При $m < n$ это противоречит результату задачи **4.195**. Значит, $m = n$, т. е. все n корней многочлена действительны и лежат на отрезке $[-1, 1]$.

4.198. Пусть функция $f(x)$ представлена в виде суммы правильно сходящегося ряда на отрезке $[-1, 1]$:

$$f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + \ldots + C_n P_n(x) + \ldots$$

Найти выражение для коэффициентов C_n.

Решение. По условию задачи

$$f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + \ldots + C_n P_n(x) + \ldots$$

Умножим обе части этого равенства на $P_m(x)$ и проинтегрируем от -1 до 1. Ряд в правой части в силу его правильной сходимости можно интегрировать почленно. В результате получаем

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = C_0 \int_{-1}^{1} P_0(x) P_m(x)\, dx + \ldots$$

$$\ldots + C_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx + \ldots$$

Но (см. **4.196**)

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

Следовательно,

$$C_m = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx}{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\, dx} = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

4.199. Доказать, что любой многочлен $Q_n(x)$ можно представить в виде

$$Q_n(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + \ldots + C_n P_n(x).$$

4.200. Выразить через многочлены Лежандра x, x^2, x^3, x^4.

4.201. Показать, что для присоединенных функций Лежандра $P_n^m(x)$ (задача **4.182**) выполняются равенства

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(m+n)!}{(n-m)!}, & k = n. \end{cases}$$

3. Интегральные формулы.

4.202. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 (1-x^2)\,[P_n'(x)]^2\, dx.$$

Указание. Воспользоваться формулой а) задачи **4.194.**

4.203. Доказать равенство

$$\int_x^1 P_n(t)\, dt = \frac{2}{2n+1}\,[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)].$$

Указание. Использовать тождество б) задачи **4.194.**

4.204. Вычислить

$$\int_0^1 P_m(x)\, dx \quad (m > 0).$$

4.203. Найти интеграл

$$\int_0^1 [xP_n(x)]^2\, dx.$$

Указание. Использовать формулу (4.6).

4.206. Получить формулу Шлёфли

$$P_n(z) = \frac{n!}{2^{n+1}\pi i} \oint_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

где C — замкнутый контур, содержащий точку z внутри.

Решение. Производная n-го порядка многочлена $(z^2-1)^n$ может быть представлена по формуле Коши (4.3) главы 3:

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

где C — произвольный замкнутый гладкий контур, содержащий точку z внутри. А так как в силу формулы Родрига (4.1) $P_n(z)$

отличается от $\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ только числовым множителем $\frac{1}{2^n n!}$, то формула Шлёфли доказана.

4.207. Получить формулу Лапласа

$$P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\}^n d\varphi.$$

Указание. В формуле Шлёфли в качестве контура C взять окружность радиуса $|\sqrt{z^2-1}|$ с центром в точке z, тогда $t=z+\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi}$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

§ 5. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

1. Многочлены Чебышева. В комплексной области *многочлены Чебышева* $T_n(z)$ определяются равенством

$$T_n(z)=\cos(n\arccos z)=\frac{1}{2}[(z+i\sqrt{1-z^2})^n+(z-i\sqrt{1-z^2})^n]. \quad (5.1)$$

Чтобы получить явное выражение $T_n(z)$ как многочлена от z, надо применить биномиальную формулу к правой части (5.1) и привести подобные. Заметим, что при этом коэффициенты при z будут действительными и, более того, целыми числами. Поэтому при $z=x$ получим действительный многочлен:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x). \quad (5.2)$$

Строго говоря, это равенство определяет $T(x)$ только при $|x|\leqslant 1$ (область определения $\arccos x$). При $|x|>1$ надо обратиться к формуле (5.1).

Многочлены Чебышева имеют применение в теории приближений. Известно, например, что

$$T_n^*(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

является многочленом n-й степени, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Последнее означает, что величина

$$h=\max_{[-1,1]}|Q_n(x)|$$

принимает наименьшее значение при $Q_n=T_n(x)$.

4.208. Доказать, что функция $(1-tx)(1-2tx+t^2)^{-1}$ является производящей для многочленов Чебышева, т. е.

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \quad (|x|\leqslant 1,\ |t|<1).$$

Решение. С помощью формулы Эйлера $e^{i\omega}=\cos\omega+i\sin\omega$ нетрудно проверить тождество

$$\frac{1-t\cos\omega}{1-2t\cos\omega+t^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-te^{i\omega}}+\frac{1}{1-te^{-i\omega}}\right].$$

Разложим в ряд правую часть по формуле геометрической прогрессии, предполагая для сходимости этого ряда, что $|t|<1$:

$$\frac{1-t\cos\omega}{1-2t\cos\omega+t^2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{in\omega}+\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{-in\omega}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\frac{e^{in\omega}+e^{-in\omega}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos n\omega.$$

Полагая здесь $\omega=\arccos x$, т. е. $\cos\omega=x$, и учитывая, что $\cos(n\arccos x)=T_n(x)$, мы получим требуемое разложение.

4.209. Показать, что для многочленов Чебышева справедливо следующее равенство:

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)\,T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0;\\ \pi, & m=n=0.\end{cases}$$

Решение. Выразим значения $T_n(x)$ и $T_m(x)$ из формулы (5.2) и подставим в интеграл:

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)\,T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В полученном интеграле заменим переменную интегрирования, положив $t=\arccos x$. При этом $dt=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; когда x изменяется от -1 до 1, t убывает от π до 0. Мы получаем

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)\,T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_{\pi}^{0}\cos nt\cos mt\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(n+m)t+\cos(n-m)t]\,dt=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0;\\ \pi, & m=n=0.\end{cases}$$

4.210. Показать, что многочлены Чебышева $T_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$$

4.211. Доказать, что для многочленов Чебышева $T_n(x)$ выполняется рекуррентная формула

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x).$$

Указание. Использовать формулу (5.2) и тригонометрическое тождество

$$\cos(n-2)t+\cos nt=2\cos(n-1)t\cos t.$$

4.212. Исходя из формулы (5.1), выписать многочлены Чебышева

$$T_0(z),\ T_1(z),\ T_2(z),\ T_3(z),\ T_4(z).$$

4.213. Исходя из выражений $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, получить из рекуррентной формулы задачи **4.211**

$$T_2(x),\ T_3(x),\ T_4(x),\ T_5(x).$$

4.214. Вычислить следующие значения многочленов Чебышева:

$$T_n(1);\ T_n(-1);\ T_{2n}(0);\ T_{2n+1}(0).$$

4.215. Показать, что при $|t|<1$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{t^2-2tx+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\frac{t^n}{n},\qquad (x)\leqslant 1.$$

Указание. См. **4.208.**

4.216. Показать, что многочлен Чебышева $T_n(x)$ имеет n различных действительных корней и что все они лежат на отрезке $[-1, 1]$.

Указание. Использовать формулу (5.2).

4.217. Показать, что для многочленов Чебышева $T_n(x)$ имеет место равенство

$$T_n[T_m(x)]=T_{nm}(x).$$

4.218. Исходя из формулы задачи **4.217** при $m=2$, показать, что

$$T_n(2x-1)=T_{2n}(\sqrt{x}).$$

2. Многочлены Эрмита. *Многочлены Эрмита* определяются формулой

$$H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{5.3}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

4.219. Показать, что для многочленов Эрмита $H_n(x)$ имеет место рекуррентная формула

$$H_{n+1}(x)=xH_n(x)-H_n'(x). \tag{5.4}$$

Решение. Вычислим производную $H_n'(x)$. Она равна

$$H_n'(x)=\frac{d}{dx}\left\{(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}=$$

$$=(-1)^n xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}+(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-\frac{x^2}{2}}=$$

$$=x\left\{(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}-\left\{(-1)^{n+1}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}=$$

$$=xH_n(x)-H_{n+1}(x).$$

Отсюда и получаем искомую формулу.

4.220. Показать, что коэффициент при x^n в многочлене $H_n(x)$ равен 1.

4.221. Выписать первые шесть многочленов Эрмита, исходя из определения (5.3).

4.222. Выписать $H_7(x)$ и $H_8(x)$ с помощью рекуррентной формулы (5.4).

4.223. Доказать рекуррентное соотношение для многочленов Эрмита:

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \qquad (5.5)$$

4.224. Вывести формулу

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

4.225. Показать, что при $n > 0$

$$H_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\,H_{n-k}(x) \qquad (0 < k \leqslant n).$$

4.226. Показать, что многочлен Эрмита $H_n(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

4.227. Получить следующее интегральное соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)\,H_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \sqrt{2\pi}\,n!, & m = n. \end{cases}$$

4.228. Показать, что $e^{tx-\frac{t^2}{2}}$ является производящей функцией для многочленов Эрмита, т. е. имеет место равенство

$$e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,\frac{t^n}{n!}.$$

Решение. Разложим функцию $\varphi(x, t) = e^{tx-\frac{t^2}{2}}$ в ряд по степеням t и обозначим коэффициенты этого разложения $\frac{h_n(x)}{n!}$:

$$e^{tx-\frac{t^2}{2}} = h_0(x) + \frac{h_1(x)}{1!}t + \frac{h_2(x)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{h_n(x)}{n!}t^n + \ldots$$

Ясно, что при $t = 0$ $\varphi(x, 0) = e^0 = 1$, т. е. $h_0(x) = 1$, и что

$$\varphi_t'(x, 0) = (x-t)\,e^{tx-\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = x,$$

т. е.

$$h_1(x) = x.$$

Как видно из формулы для $\varphi_t'(x, t)$, функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = (x-t)\,\varphi(x, t).$$

Заменим в этом уравнении $\varphi(x, t)$ ее рядом. Мы получим

$$h_1(x) + 2\frac{h_2(x)}{2!}t + \ldots + n\frac{h_n(x)}{n!}t^{n-1} + (n+1)\frac{h_{n+1}(x)}{(n+1)!}t^n + \ldots =$$

$$= (x-t)\left[h_0(x) + \frac{h_1(x)}{1!}t + \ldots + \frac{h_{n-1}x}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{h_n(x)}{n!}t^n + \ldots\right].$$

Приравняв слева и справа коэффициенты при t^n, имеем

$$\frac{h_{n+1}(x)}{n!} = \frac{xh_n(x)}{n!} - \frac{h_{n-1}(x)}{(n-1)!},$$

или

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - nh_{n-1}(x).$$

Таким образом, функции $h_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (5.5), которому удовлетворяют многочлены Эрмита. А так как $h_0(x) = 1 = H_0(x)$, $h_1(x) = x = H_1(x)$, то все $h_n(x) = H_n(x)$, и формула доказана.

4.229. Получить следующие выражения многочленов Эрмита:

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k)!}C_n^k x^{2k},$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}C_n^k x^{2k+1},$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты.

Указание. Доказательство провести по индукции по n с использованием рекуррентных формул (5.4) и (5.5).

4.230. Показать, что многочлены Эрмита имеют следующие значения:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}, \qquad H_{2n+1}(0) = 0,$$

$$H'_{2n}(0) = 0, \qquad H'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^n n!}$$

4.231. Разложить функцию $\operatorname{ch} tx$ по многочленам Эрмита.

Решение. По определению гиперболической функции

$$\operatorname{ch} tx = \frac{1}{2}(e^{tx} + e^{-tx}).$$

Следовательно,

$$e^{-\frac{t^2}{2}}\operatorname{ch} tx = \frac{1}{2}e^{tx-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{2}e^{-tx-\frac{t^2}{2}}.$$

Используя разложение задачи 4.228, получим

$$\frac{1}{2}e^{tx-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{1}{2}e^{-tx-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(-x)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Сложим эти выражения:

$$\frac{1}{2}e^{tx-\frac{t^2}{2}}+\frac{1}{2}e^{-tx-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH_n(x)\frac{t^n}{n!}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2H_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}H_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Таким образом,

$$\operatorname{ch}tx=e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{2}\left(e^{tx-\frac{t^2}{2}}+e^{-tx-\frac{t^2}{2}}\right)=e^{\frac{t^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}H_{2n}(x)\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

4.232. Показать, что функции $\operatorname{sh}tx$, $\cos tx$ и $\sin tx$ имеют следующие разложения по многочленам Эрмита:

а) $\operatorname{sh}tx=e^{\frac{t^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$;

б) $\cos tx=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n)!}H_{2n}(x)$;

в) $\sin tx=e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$.

3. Многочлены Лагерра. *Многочлены Лагерра* $L_n(x)$ определяются формулой *

$$L_n(x)=(-1)^ne^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n). \tag{5.6}$$

4.233. Показать, что многочлены Лагерра $L_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)=e^{-x}$ на положительной полуоси, т. е.

$$\int_0^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx=0,\qquad m\neq n.$$

---

* Иногда в правой части формулы (5.6) добавляют множитель $\frac{1}{n!}$.

4.234. Получить равенство

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)\,dx = (n!)^2.$$

4.235. Показать, что коэффициент при x^n в многочлене $L_n(x)$ равен 1.

4.236. Показать, что функция

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

является производящей функцией для многочленов Лагерра, т. е.

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Решение. Функция $\varphi(x, t)$, как функция комплексного переменного t, регулярна внутри круга $|t|<1$. Разложим $\varphi(x, t)$ в этом круге в ряд Тейлора. Тогда

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

причем коэффициенты $C_n(x)$ определяются по формуле Коши

$$C_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(x, t)}{t^{n+1}}\,dt,$$

где Γ — любой замкнутый контур, охватывающий точку $t=0$ и лежащий в круге $|t|<1$. В последней формуле введем новую переменную интегрирования $u = \frac{x}{1-t}$. Мы получим

$$C_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)\,t^{n+1}}\,dt = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{x-u} u^n\,du}{(u-x)^{n+1}} = \frac{e^x n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-u} u^n}{(u-x)^{n+1}}\,du,$$

где γ — образ контура Γ — замкнутый контур, охватывающий точку $u=x$.

Полученный интеграл легко вычислить с помощью вычетов. Подынтегральная функция имеет единственный полюс порядка $n+1$ в точке $u=x$, поэтому (см. формулу (5.4) гл. III)

$$C_n(x) = e^x \frac{n!}{n!} \lim_{u \to x} \frac{d^n}{du^n} (e^{-u} u^n) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n),$$

т. е. коэффициенты $C_n(x)$ совпадают с многочленами Лагерра $L_n(x)$.

4.237. Показать, что для многочленов Лагерра $L_n(x)$ выполняется рекуррентное соотношение

$$L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1) L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0.$$

Указание. Использовать разложение производящей функции в ряд (задача **4.236**).

4.238. Выписать первые пять многочленов Лагерра $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, $L_4(x)$, исходя из определения (5.6).

4.239. Получить многочлены $L_5(x)$, $L_6(x)$ и $L_7(x)$ с помощью рекуррентной формулы (задача **4.237**).

4.240. Доказать, что многочлены Лагерра $L_n(x)$ удовлетворяют соотношению

$$L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) = 0.$$

4.241. Доказать рекуррентную формулу

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x).$$

4.242. Показать, что многочлены Лагерра $L_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$xy'' + (1 - x) y' + ny = 0.$$

4.243. Обобщенными многочленами Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ называются многочлены

$$L_n^{\alpha}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{\alpha+n}), \quad \alpha > -1.$$

Показать, что при $n \neq m$ $L_n^{\alpha}(x)$ и $L_m^{\alpha}(x)$ ортогональны на положительной полуоси с весом $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$, т. е.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

4.244. Выписать обобщенные многочлены Лагерра:

$$L_1^1(x), \quad L_2^1(x), \quad L_4^2(x), \quad L_3^2(x), \quad L_4^4(x).$$

4.245. Показать, что производящей функцией для многочленов $L_n^{\alpha}(x)$ является функция

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}},$$

т. е.

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) \frac{t^n}{n!}.$$

4.246. Показать, что для обобщенных многочленов Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ имеют место рекуррентные формулы:

а) $L_{n+1}^{\alpha}(x)+(x-\alpha-2n-1)\,L_n^{\alpha}(x)+n(\alpha+n)\,L_{n-1}^{\alpha}(x)=0$;

б) $\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)-n\frac{d}{dx}L_{n-1}^{\alpha}(x)+nL_{n-1}^{\alpha}(x)=0$;

в) $x\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)=nL_n^{\alpha}(x)-n(n+\alpha)\,L_{n-1}^{\alpha}(x)$.

4.247. Показать, что обобщенный многочлен Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$xy''+(\alpha+1-x)\,y'+ny=0.$$

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Метод интегральных преобразований получил широкое распространение в современной математике и во многих ее практических приложениях. В наиболее простой и одновременно достаточно общей форме интегральное преобразование можно определить так.

Пусть дана функция $f(x)$, заданная на интервале (a, b), который, в частности, может совпадать со всей числовой осью ($a = -\infty$, $b = +\infty$) или с полуосью (например, $a = 0$, $b = +\infty$). *Интегральным преобразованием* функции $f(x)$ называется функция

$$F(\alpha) = \int_a^b K(x, \alpha) f(x)\, dx,$$

где $K(x, \alpha)$ — фиксированная для данного преобразования функция, называемая *ядром преобразования*. Если ядро $K(x, \alpha)$ принимает комплексные значения, то и $F(\alpha)$ будет комплексной функцией аргумента α. Разумеется, для существования интеграла на преобразуемую функцию $f(x)$ должны быть наложены определенные условия, которые зависят от свойств ядра K и от выбора интервала (a, b).

Рассматриваемое в настоящей главе преобразование Фурье является важным частным случаем интегральных преобразований, широко используемым в технике.

Пусть дана функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси. Ее *преобразованием Фурье* называется функция

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Следовательно, преобразование Фурье определяется ядром $K(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x}$, пропорциональным функции

$$e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x.$$

Если функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, кусочно гладкой на каждом конечном отрезке этой оси, то преобразование Фурье $F(\alpha)$ существует и в каждой точке x, где $f(x)$ дифференцируема и имеет место формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \tag{1.2}$$

Напомним, что $f(x)$ называется *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она имеет во всех его точках непрерывную производную. График такой функции имеет везде касательную, непрерывно изменяющуюся вдоль кривой. Функция $f(x)$ называется *кусочно гладкой* на $[a, b]$, если она состоит из конечного числа гладких частей, и либо непрерывна, либо имеет разрывы только I рода (скачки) на этом отрезке. Функция $f(x)$ — *абсолютно интегрируема* на всей числовой оси, если существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx.$$

Заметим, что это условие для кусочно гладкой функции $f(x)$ будет выполнено, если она является *финитной*, т. е. равной нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$. Тогда несобственный интеграл превратится в обычный определенный от a до b.

В силу физических соображений функция $F(\alpha)$ называется также *спектральной характеристикой* функции $f(x)$, ее модуль $|F(\alpha)|$ — *амплитудным спектром* функции $f(x)$, а ее аргумент $\arg F(\alpha)$ — *фазовым спектром* функции $f(x)$.

5.1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, при которых имеет место формула (1.1). Она абсолютно интегрируема на всей числовой оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = 1.$$

Функция $f(x)$ является кусочно гладкой на всей оси будучи гладкой на $(-\infty, 0)$, где $f'(x) = 0$, и на $(0, \infty)$, где $f'(x) = -e^{-x}$.

По формуле (1.1)

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-i\alpha x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\alpha)x}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+i\alpha)}.$$

5.2. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & |x| \leqslant 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < |x| \leqslant 2; \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Решение. Данная функция является финитной, так как она равна нулю вне отрезка $[-2, 2]$. Применение формулы (1.1) дает

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\alpha x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{2}f(x)\,e^{-i\alpha x}dx,$$

или, разбивая интеграл на сумму интегралов по интервалам $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$,

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-2}^{-1}\frac{1}{2}\,e^{-i\alpha x}dx+\int\limits_{-1}^{1}\frac{x}{2}\,e^{-i\alpha x}dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{2}\,e^{-i\alpha x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(J_1+J_2+J_3).$$

Изменяя знак переменного интегрирования в J_1, получим

$$J_1+J_3=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{e^{-i\alpha x}}{2}\,dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{-i\alpha x}}{2}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{i\alpha x}}{2}dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{-i\alpha x}}{2}\,dx=$$

$$=\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}\,dx=\int\limits_{1}^{2}\cos\alpha x\,dx=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\Big|_1^2=\frac{\sin 2\alpha-\sin\alpha}{\alpha}.$$

Далее, с учетом формулы Эйлера,

$$J_2=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x}{2}\,e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x(\cos\alpha x-i\sin\alpha x)\,dx=-i\int\limits_{0}^{1}x\sin\alpha x\,dx,$$

так как

$$\int\limits_{-1}^{1}x\cos\alpha x\,dx=0$$

в силу нечетности подынтегральной функции, а

$$\int\limits_{-1}^{1}x\sin\alpha x\,dx=2\int\limits_{0}^{1}x\sin\alpha x\,dx$$

в силу ее четности.

Интегрируя по частям, получим

$$J_2=ix\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\Big|_0^1-\frac{i}{\alpha}\int\limits_{0}^{1}\cos\alpha x\,dx=i\frac{\cos\alpha}{\alpha}-i\frac{\sin\alpha x}{\alpha^2}\Big|_0^1=i\frac{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\alpha^2}.$$

Складывая значения всех трех интегралов, получим

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin 2\alpha-\sin\alpha}{\alpha}+i\frac{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\alpha^2}\right).$$

5.3. Найти амплитудный спектр $f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & -\infty<x\leqslant 0,\ 1<x<\infty.\end{cases}$$

Решение. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ по формуле (1.1) будет

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{1}1\cdot e^{-i\alpha x}dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha i}e^{-i\alpha x}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha i}(1-e^{-i\alpha})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{i\alpha}{2}}\cdot\frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2i}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{i\alpha}{2}}.$$

Поэтому амплитудный спектр функции $f(x)$

$$|F(\alpha)|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{|\alpha|}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Амплитудный спектр $|F(\alpha)|$ удовлетворяет, очевидно, неравенствам

$$0\leqslant|F(\alpha)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{|\alpha|},$$

обращаясь в нуль вместе с $\sin\frac{\alpha}{2}$, т. е. в точках, где

$$\frac{\alpha}{2}=\pi k,\quad \alpha=2\pi k,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

и принимая максимальные значения $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{|\alpha|}$ в точках, где

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=1,\quad \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad \alpha=\pi(2k+1),\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Кроме того, $|F(\alpha)|\to 0$ при $\alpha\to\infty$.

Найти преобразование Фурье следующих функций

5.4. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

5.5. $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

5.6. $fx=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1;\\ 1, & 1<|x|\leqslant 2;\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

5.7. $f(x)=e^{-|x|}$.

5.8. $f(x)=xe^{-|x|}$.

5.9. $f(x)=e^{-|x|}\cos x$.

5.10. $f(x)=e^{-|x|}\sin x$.

Указание. В задачах **5.9** и **5.10** применить формулы Эйлера.

§ 2. КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, указанным в предыдущем параграфе на полуоси $(0, \infty)$, то существуют функции

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx, \tag{2.1}$$

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \alpha x \, dx. \tag{2.2}$$

Функция $F_c(\alpha)$ называется *косинус-преобразованием* функции $f(x)$, функция $F_s(\alpha)$ — *синус-преобразованием* функции $f(x)$.

При выполнении условий существования формулы (1.2) имеют место следующие теоремы обращения косинус- и синус-преобразований Фурье при $x \geqslant 0$ *

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha, \tag{2.3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha. \tag{2.4}$$

5.11. Показать, что для четной функции преобразование Фурье равно ее же косинус-преобразованию Фурье.

Решение. Пусть $f(x)$ — четная функция. Ее преобразование Фурье

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin \alpha x \, dx.$$

В силу четности $f(x)$ произведение $f(x) \cos \alpha x$ тоже четное, а $f(x) \sin \alpha x$ — нечетное. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = F_c(\alpha),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin \alpha x \, dx = 0.$$

Таким образом, $F(\alpha) = F_c(\alpha)$, что и нужно было показать.

---

* Формула (2.3) продолжает $f(x)$ на отрицательную полуось четным образом, а (2.4) — нечетным.

5.12. Показать, что для нечетной функции $f(x)$ ее преобразование Фурье

$$F(\alpha) = iF_s(\alpha).$$

5.13. Показать, что функция $f(x)$, представленная суммой ее четной и нечетной частей,

$$f(x) = \bar{f}(x) + \bar{\bar{f}}(x),$$

где четная часть

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

нечетная часть

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

имеет преобразование Фурье

$$F(\alpha) = \bar{F}_c(\alpha) + i\bar{\bar{F}}_s(\alpha)$$

($\bar{F}_c(\alpha)$ — косинус-преобразование функции $\bar{f}(x)$, $\bar{\bar{F}}_s(\alpha)$ — синус-преобразование функции $\bar{\bar{f}}(x)$).

5.14. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}; \\ 0, & \frac{3}{2} < x < \infty. \end{cases}$$

Решение. По формуле (2.1)

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{3}{2}} (2x - 3) \cos \alpha x \, dx =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} (2x - 3) \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \Bigg|_0^{\frac{3}{2}}}_{=0} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{3}{2}} \sin \alpha x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2 \cos \alpha x}{\alpha^2} \Bigg|_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2\left(\cos \frac{3\alpha}{2} - 1\right)}{\alpha^2}.$$

5.15. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Решение. По формуле (2.2)

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\sin\alpha x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}[\cos(1-\alpha)x-\cos(1+\alpha)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}.$$

5.16. Показать, что

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}\cos\alpha x\,dx=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$$

Указание. Для правой части найти $F_c(\alpha)$ и затем применить формулу обращения (2.3).

5.17. Для функции $f(x)=e^{-ax}$, $(a>0,\ x>0)$ найти $F_c(\alpha)$ и $F_s(\alpha)$.

5.18. Найти косинус и синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<a;\\ \frac{1}{2}, & x=a;\\ 0, & x>a.\end{cases}$$

5.19. Найти $F_c(\alpha)$ и $F_s(\alpha)$ для функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

5.20. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

5.21. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}4x-1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4};\\ 0, & x>\frac{1}{4}.\end{cases}$$

5.22. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=2^{-x}, \quad 0\leqslant x<\infty.$$

5.23. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=a^{-x}, \quad 0\leqslant x<\infty, \quad a>0.$$

5.24. Найти косинус-преобразование функции

$$f(x)=x^{-a}, \quad (0<a<1).$$

Решение.

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^{-a}\cos x\alpha\, dx.$$

Положив в формуле задачи 4.3 (гл. IV) $z=a$ и $s=x$, получим

$$x^{-a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xu}u^{a-1}du \quad (x>0).$$

Поэтому

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\cos\alpha x\, dx\int_0^\infty e^{-xu}u^{a-1}du,$$

или, если изменить порядок интегрирования *,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}du\int_0^\infty e^{-xu}\cos\alpha x\, dx.$$

Так как

$$\int_0^\infty e^{-xu}\cos\alpha x\, dx=\frac{e^{-xu}}{u^2+\alpha^2}(\alpha\sin\alpha x-u\sin\alpha x),$$

то

$$\int_0^\infty e^{-xu}\cos\alpha x\, dx=\frac{u}{u^2+\alpha^2},$$

а потому

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{u}{u^2+\alpha^2}du\underset{u=\alpha v}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^{a-1}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{v^a dv}{v^2+1}.$$

---

* О допустимости изменения порядка интегрирования см. Г. М. Фихтенгольц. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. II, 1948, стр. 765.

Последний интеграл вычисляется по формуле задачи **4.37:**

$$\int_0^\infty \frac{v^{(a+1)-1}}{1+v^2}\,dv = \frac{\pi}{2\sin\frac{a+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

Поэтому

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha^{a-1}}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi a}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\alpha^{a-1}}{\Gamma(a)\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

5.25. Показать, что синус-преобразование Фурье функции $f(x)=x^{-a}$, $(0<a<1)$

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\alpha^{a-1}}{\Gamma(a)\sin\frac{\pi a}{2}}.$$

5.26. Функция $f(x)$ называется двойственной себе при данном интегральном преобразовании, если после преобразования ее вид не меняется (заменяется только аргумент x на α). Показать, что $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ двойственна себе при косинус-преобразовании Фурье.

Решение. Полагая в выражении косинус-преобразования Фурье функции x^{-a} (см. задачу **5.24**) $a=\frac{1}{2}$ и учитывая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = f(\alpha),$$

что и следовало показать.

5.27. Показать, что функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

двойственна себе при синус-преобразовании Фурье.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Непосредственное нахождение преобразований Фурье, основанное на применении техники интегрирования, возможно лишь в простейших случаях. В более сложных случаях цель иногда может быть достигнута с помощью особых приемов. Некоторые из них сейчас будут рассмотрены.

1. Дифференцирование под знаком интеграла. Этот прием основан на том, что преобразование Фурье $F(\alpha)$ (или $F_c(\alpha)$, $F_s(\alpha)$) сначала дифференцируется по одному из параметров под знаком интеграла, а затем после вычисления интеграла функция $F(\alpha)$ (или $F_c(\alpha)$, $F_s(\alpha)$) восстанавливается интегрированием по параметру. Разумеется, дифференцирование под знаком

несобственного интеграла допустимо далеко не всегда и требует каждый раз своего обоснования. За такими обоснованиями мы отсылаем к подробным курсам математического анализа *.

5.28 Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x,\ \beta)=\frac{1-e^{-\beta x}}{x},\quad \beta\geqslant 0.$$

Решение. По определению

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{1-e^{-\beta x}}{x}\cos\alpha x\,dx.$$

Для вычисления несобственного интеграла применим дифференцирование по β под знаком интеграла:

$$\frac{\partial F_c}{\partial\beta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\ln|\beta^2+\alpha^2|+c.$$

При $\beta=0$ $F_c(\alpha)=0$, так как $f(x,\ 0)=0$. Поэтому $c=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\alpha$ и

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}{\alpha}.$$

5.29 Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=e^{-x^2}.$$

Решение. По определению

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx.$$

Дифференцируя по α под знаком интеграла, получаем

$$F_c'(\alpha)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x\sin\alpha x\,dx.$$

Далее интегрируем по частям, полагая

$$u=\sin\alpha x,\qquad du=\alpha\cos\alpha x\,dx,$$

$$dv=-e^{-x^2}x\,dx,\qquad v=\frac{1}{2}e^{-x^2},$$

$$F_c'(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-x^2}\sin\alpha x\Big|_0^\infty-\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx=-\frac{\alpha}{2}F_c(\alpha).$$

---

* См. сноску на стр. 324.

Таким образом,

$$\frac{dF_c}{F_c} = -\frac{\alpha}{2}\,d\alpha,$$

откуда

$$\ln F_c = -\frac{\alpha^2}{4} + \ln C,$$

или

$$F_c(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $F_c(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$ $\times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$F_c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

5.30. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

5.31. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-x}\frac{\sin x}{x^2}.$$

5.32. Доказать, что функция $f(ax)$, $a > 0$ имеет косинус-преобразование Фурье $\frac{1}{a}F_c\left(\frac{\alpha}{a}\right)$, где $F_c(\alpha)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

5.33. Показать, что функция

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

двойственна себе при косинус-преобразовании Фурье.

Указание. Учесть решение задач **5.29** и **5.32.**

5.34. Показать, что функция

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

двойственна себе при синус-преобразовании Фурье.

Указание. Дифференцировать по α соотношение

$$e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\cos \alpha x\,dx,$$

установленное в предыдущей задаче.

---

* См. замечание к задаче **4.10.**

2. Разложение в степенные ряды. Рассматриваемый прием заключается в разложении в степенной ряд или преобразуемой функции, или ядра преобразования, с последующим почленным интегрированием ряда на бесконечном интервале. Последняя операция допустима при выполнении соответствующих достаточных условий (см. приложение). Проверку этих условий предоставляем читателям.

5.35. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{e^{2\pi x}-1}.$$

5.36. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{e^{2\pi x}+1}.$$

Указание. Учесть формулу

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2+\pi^2n^2}.$$

5.37. Показать, что функция

$$f(x)=\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$$

двойственна себе при синус-преобразовании Фурье.

Указание. Учесть решение задачи **5.35** и соотношение

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\quad(\alpha>0).\qquad\text{(см. 3.166)}$$

5.38. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}\pi x}.$$

Указание. Применить к решению **5.35** теорему обращения и соотношение из указания к **5.37.**

5.39. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}x\sqrt{\frac{\pi}{2}}}-\frac{1}{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

5.40. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=e^{-x^2}.$$

Указание. Разложить в степенной ряд $\cos\alpha x$ и учесть, что

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^{2n}dx=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.\qquad\text{(см. 4.40в)}$$

Сравнить с решением задачи **5.29.**

5.41. Найти косинус-преобразование Фурье финитной функции

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}, & 0<x<1, \quad \nu>-1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Решение. Так как $f(x)$ — финитная функция,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos\alpha x\,dx,$$

или, заменяя $\cos\alpha x$ его разложением в степенной ряд:

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right]dx.$$

Почленное интегрирование приводит к равенству

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}x^{2n}\,dx.$$

Интеграл в правой части заменой $x^2=t$ сводится к гамма-функции (см. гл. IV, § 1, п. 3)

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+\nu+1)}.$$

Поэтому

$$F_c(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Под знаком суммы множитель (см. задачу **4.11**)

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n)!}=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}\Gamma(n+1)}.$$

Следовательно,

$$F_c(\alpha)=2^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}=$$

$$=2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}=$$

$$=2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha^{-\nu}J_\nu(\alpha),$$

где $J_\nu(\alpha)$ — бесселева функция первого рода (см. гл. IV, § 3, п. 1).

5.42. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x^2)^{\nu-\frac{3}{2}}, & 0<x<1, \quad \nu>\frac{1}{2}. \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Указание. Интегрировать по частям интеграл соотношения, установленного в задаче **5.41**.

5.43. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}, & 0<x<1, \quad \nu>-\frac{3}{2}; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Указание. Разложить в степенной ряд ядро преобразования и учесть определение *функции Струве*, тесно связанной с бесселевыми функциями и определяемой равенством

$$H_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+n+\frac{3}{2}\right)}, \quad \nu>-\frac{3}{2}.$$

3. Использование вычетов. Предположим, что функция $f(x)$ допускает продолжение $f(z)$ на верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} z\geqslant 0$) комплексного переменного z, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, за исключением конечного числа полюсов; при этом на действительной оси полюсов нет.

2) $\max\limits_{C_R}|f(z)|\to 0$ при $R\to\infty$, где C_R — полуокружность радиуса R в верхней полуплоскости с центром в $z=0$.

При этих условиях вычисление $F_c(\alpha)$ и $F_s(\alpha)$ для $f(x)$ в ряде случаев сводится к подсчету вычетов.

5.44. Показать, что для четной функции $f(x)$, удовлетворяющей сформулированным выше условиям, имеет место формула

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx=\sqrt{2\pi i}\sum \operatorname{res} f(z)\,e^{i\alpha z}, \qquad (3.1)$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах, находящихся в верхней полуплоскости.

Решение. В гл. III (**3.163**) было показано, что при данных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx=2\pi i\sum \operatorname{res} f(z)\,e^{i\alpha z},$$

где сумма включает все вычеты в верхней полуплоскости. Так как функция $f(x)$ четная, т. е. $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx+\int_{0}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}=$$

$$=\int_{0}^{\infty} f(-x)\,e^{-i\alpha x}\,dx+\int_{0}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx=\int_{0}^{\infty} f(x)\,(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})\,dx=$$

$$=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx.$$

Следовательно,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\sum \operatorname{res} f(z)\,e^{i\alpha z}=$$

$$=\sqrt{2\pi}i\sum \operatorname{res} f(z)\,e^{i\alpha z},$$

что и нужно было показать.

5.45. Показать, что при выполнении условий этого пункта для нечетной функции $f(x)$ имеет место формула

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx=\sqrt{2\pi}\sum \operatorname{res} f(z)\,e^{i\alpha z}, \qquad (3.2)$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах, находящихся в верхней полуплоскости.

5.46. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}.$$

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{1+z^4}$, очевидно, удовлетворяет сформулированным условиям, а потому по формуле (3.1)

$$F_c(\alpha)=\sqrt{2\pi}\,i\sum \operatorname{res}\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4},$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах функции $f(z)\,e^{i\alpha z}$, находящихся в верхней полуплоскости.

Функция $\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4}$ имеет четыре простых полюса

$$z=\sqrt[4]{-1}=e^{\frac{i\pi(2n+1)}{4}},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Однако в верхней полуплоскости расположено только два из них:

$$z_0=e^{\frac{i\pi}{4}}\ \text{ и }\ z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Поэтому в силу формулы (3.1)

$$F_c(\alpha) = \sqrt{2\pi}\, i \left(\operatorname*{res}_{z_0} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4} + \operatorname*{res}_{z_1} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4} \right),$$

или, так как $z_1 = -\bar{z}_0$,

$$F_c(\alpha) = \sqrt{2\pi} i 2 \operatorname{Im} \operatorname*{res}_{z_0} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right).$$

5.47. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Решение. Функция $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^2}$, очевидно, удовлетворяет условиям этого пункта, а потому по формуле (3.2)

$$F_s(\alpha) = \sqrt{2\pi} \sum \operatorname{res} \frac{z e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2},$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах функции $f(z) e^{i\alpha z}$, находящихся в верхней полуплоскости.

Функция

$$\frac{z \cdot e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2}$$

имеет два полюса второго порядка $z = \pm i$. Однако в верхней полуплоскости расположен только полюс $z = i$, так что

$$F_s(\alpha) = \sqrt{2\pi} \operatorname*{res}_{z=i} \frac{z e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 \frac{z e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \sqrt{2\pi} \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{z e^{i\alpha z}}{(z+i)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \alpha e^{-\alpha}.$$

5.48. $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$, найти $F_c(\alpha)$.

5.49. $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}$, найти $F_s(\alpha)$.

5.50. $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + b^2)}$, найти $F_s(\alpha)$.

5.51. $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + b^2)^2}$, найти $F_s(\alpha)$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В состав аппарата, привлекаемого для получения косинус- и синус-преобразований Фурье бесселевых функций, входит гипергеометрическая функция. Мы приводим, поэтому, определение этой функции и некоторые ее свойства.

Гипергеометрическим рядом называется степенной ряд, обозначаемый символом $F(a; b; c; z)$ и определяемый равенством

$$F(a; b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n\, n!} z^n, \tag{4.1}$$

где z — комплексное переменное, a, b, c — любые комплексные параметры ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) и

$$\begin{cases} (a)_0 = 1, \\ (a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad n = 1, 2, 3 \ldots \end{cases} \tag{4.2}$$

$(b)_n$, $(c)_n$ определяются аналогично.

В круге $|z| < 1$ сумма гипергеометрического ряда является регулярной функцией комплексного переменного z.

Многие элементарные и специальные функции выражаются через гипергеометрическую функцию. Так, имеют место следующие, используемые ниже, соотношения:

$$F\left(\frac{1+\nu}{2}; \frac{1-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \alpha^2\right) = \frac{\cos(\nu \arcsin \alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{4.3}$$

$$F\left(1+\frac{\nu}{2}; 1-\frac{\nu}{2}; \frac{3}{2}; \alpha^2\right) = \frac{\sin(\nu \arcsin \alpha)}{\nu\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{4.4}$$

5.52 Показать, что косинус-преобразование Фурье $F_c(\alpha)$ функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$, $0 < \nu < 1$ * имеет вид

$$F_c(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\cos(\nu \arcsin \alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}, & 0 < \alpha < 1; \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin\dfrac{\pi\nu}{2} \dfrac{(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Решение. В рассматриваемом случае косинус-преобразование Фурье является несобственным интегралом, разрывным при $\alpha = 1$. Поэтому следует рассмотреть в отдельности случаи $0 < \alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Рассмотрение каждого из этих двух случаев связано с привлечением подходящих контурных интегралов.

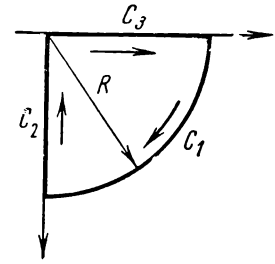


Рис. 118

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим интеграл

$$\oint_{C_R} K_\nu(z) \operatorname{ch} \alpha z \, dz,$$

где $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (гл. IV, § 3, п. 5). Контур интегрирования изображен на рис. 118.

Поскольку и $K_\nu(z)$, и $\operatorname{ch} \alpha z$ регулярны на всей комплексной плоскости, то по теореме Коши интеграл равен нулю. Поэтому, разбивая контур C_R на три участка, получаем:

$$\int_{C_1} K_\nu(z) \operatorname{ch} \alpha z \, dz - i \int_R^0 K_\nu(-iy) \cos \alpha y \, dy + \int_0^R K_\nu(x) \operatorname{ch} \alpha x \, dx = 0. \tag{*}$$

---

* Соотношения, получаемые в задачах этого параграфа, справедливы и в более широких областях изменения параметров. Однако рассмотрение связанных с этим вопросов мы оставляем в стороне.

Здесь было учтено, что на пути C_2 $z=-iy\,(R\geqslant y\geqslant 0)$, а на пути C_1 $z=x\,(0\leqslant x\leqslant R)$. Кроме того, использовано равенство $\operatorname{ch}(\alpha y i)=\cos\alpha y$. Переходя в равенстве (*) к пределу при $R\to\infty$, покажем, прежде всего, что первый интеграл стремится к нулю.

На контуре C_1 $z=Re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant 0$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{C_1} K_\nu(z)\operatorname{ch}\alpha z\,dz\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} K_\nu(\mathrm{Re}^{i\varphi})\operatorname{ch}(\alpha\,\mathrm{Re}^{i\varphi})\,i\,\mathrm{Re}^{i\varphi}\,d\varphi\right|\leqslant R\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|K_\nu(\mathrm{Re}^{i\varphi})|\cdot|\operatorname{ch}(\alpha\,\mathrm{Re}^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Существуют M_1 и M_2 такие, что

$$|K_\nu(\mathrm{Re}^{i\varphi})|<M_1R^{-\frac{1}{2}}e^{-R\cos\varphi}\ *$$

и

$$|\operatorname{ch}(\alpha\,\mathrm{Re}^{i\varphi})|<M_2e^{\alpha R\cos\varphi}.$$

Поэтому для рассматриваемого интеграла получаем оценку:

$$\left|\int\limits_{C_1} K_\nu(z)\operatorname{ch}\alpha z\,dz\right|<MR^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-(1-\alpha)R\cos\varphi}\,d\varphi \underset{\psi=\frac{\pi}{2}+\varphi}{=}$$

$$=MR^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1-\alpha)R\sin\psi}d\varphi,\quad M=M_1M_2.$$

Сравнение дуги графика $\sin\psi$ на интервале $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ со стягивающей ее хордой приводит к неравенству

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\sin\psi$$

и, так как $0<\alpha<1$ по условию, к неравенству

$$e^{-(1-\alpha)R\sin\psi}\leqslant e^{-\frac{2}{\pi}(1-\alpha)R\psi}.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{C_1} K_\nu(z)\operatorname{ch}\alpha z\,dz\right|<MR^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}(1-\alpha)R\psi}\,d\varphi<MR^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}(1-\alpha)R\psi}\,d\psi=$$

$$=MR^{\frac{1}{2}}\frac{1}{-\frac{2}{\pi}(1-\alpha)R}\,e^{-\frac{2}{\pi}(1-\alpha)R\psi}\Big|_0^\infty=\frac{M\pi}{2(1-\alpha)}R^{-\frac{1}{2}}\to 0\text{ при }R\to\infty.$$

---

* См. например, Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. 1953, стр. 172.

Таким образом, при $R \to \infty$ из равенства (*) получим

$$-i\int_{\infty}^{0} K_\nu(-iy)\cos \alpha y\, dy + \int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx = 0.$$

Так как

$$K_\nu(-iy) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(y) \quad \text{(см. 4.160)},$$

то последнее равенство может быть переписано в виде

$$\frac{\pi}{2} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} \int_{\infty}^{0} H_\nu^{(1)}(y)\cos \alpha y\, dy + \int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx = 0.$$

Заменяя букву y буквой x, после очевидных преобразований получим

$$\int_0^{\infty} H_\nu^{(1)}(x)\cos \alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi\nu}{2} - i\sin\frac{\pi\nu}{2}\right)\int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx.$$

Так как по определению

$$H_\nu^{(1)}(x) = L_\nu(x) + iY_\nu(x),$$

то приравнивание действительных частей, по умножении их на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, дает

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} L_\nu(x)\cos \alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx.$$

Остается подсчитать интеграл правой части. Так как

$$\operatorname{ch} \alpha x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^{2n}}{(2n)!},$$

то

$$\int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx = \int_0^{\infty} K_\nu(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha x)^{2n}}{(2n)!}\, dx.$$

Производя почленное интегрирование, получим

$$\int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\infty} x^{2n}K_\nu(x)\, dx,$$

или, учитывая значение интеграла в правой части,

$$\int_0^{\infty} K_\nu(x)\operatorname{ch} \alpha x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+n\right)\frac{2^{n-1}}{(2n)!}(\alpha^2)^n.$$

В силу свойств гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}+n\right)=\left(\frac{1+\nu}{2}\right)_n\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right),\quad \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}+n\right)=\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_n\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi\nu}{2}}.$$

Замечая еще, что

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}}=\frac{1\cdot 2\ldots(2n-1)\,2n}{2\cdot 2\ldots 2\cdot 2}=n!\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)=n!\left(\frac{1}{2}\right)_n,$$

получим

$$\int_0^\infty K_\nu(x)\operatorname{ch}\alpha x\,dx=\frac{1}{\cos\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+\nu}{2}\right)_n\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n n!}(\alpha^2)^n=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{\pi}{2}\,F\left(\frac{1+\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ \alpha^2\right)\underset{(4,3)}{=}\frac{1}{\cos\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos(\nu\arcsin\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Подставляя полученное значение интеграла в выражение $F_c(\alpha)$, найдем окончательно:

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(\nu\arcsin\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad 0<\alpha<1.$$

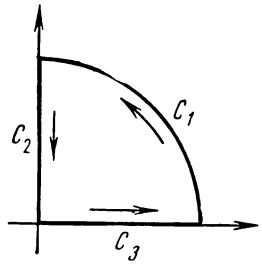


Рис. 119

Пусть теперь $\alpha>1$. Рассмотрим

$$\oint_{C_R} e^{\alpha z}I_\nu(z)\,dz,$$

где C_R — контур, изображенный на рис. 119, I_ν — модифицированная функция Бесселя первого рода.

На контуре C_2 $z=iy$ $(R\geqslant y\geqslant 0)$, а на контуре C_3 $z=x$ $(0\leqslant x\leqslant R)$, поэтому

$$\int_{C_2}=i\int_R^0 e^{-i\alpha y}I_\nu(iy)\,dy,\qquad \int_{C_3}=\int_0^R e^{-\alpha x}I_\nu(x)\,dx.$$

В силу теоремы Коши интеграл по всему контуру C_R равен нулю при всяком R, а потому и

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}\right)=0. \qquad (**)$$

На контуре C_1 $z=Re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Привлекая оценку

$$|I_\nu(z)|<M\left|z^{-\frac{1}{2}}e^{z}\right|,$$

можно показать, как и в случае $0<\alpha<1$, что

$$\int_{C_1} e^{-\alpha z} I_\nu(z)\,dz \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Учитывая это и определение несобственных интегралов, можно переписать равенство (**) так:

$$i\int_{\infty}^{0} e^{-i\alpha y} I_\nu(iy)\,dy + \int_0^\infty e^{-\alpha x} I_\nu(x)\,dx = 0.$$

Подставляя сюда выражение $I_\nu(iy) = e^{\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu(y)$ (см. **4.160**) и полагая $i = e^{\frac{\pi}{2} i}$, получим

$$\int_0^\infty e^{-i\alpha y} J_\nu(y)\,dy = e^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} I_\nu(x)\,dx.$$

Интеграл правой части

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} I_\nu(x)\,dx = \frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

(см. **4.159**). Поэтому

$$\int_0^\infty e^{-i\alpha y} J_\nu(y)\,dy = e^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} \frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Рассмотрим еще раз $\oint\limits_{C_R} e^{-\alpha z} I_\nu(z)\,dz$, но уже по измененному контуру C_R, изображенному на рис. 118.

Рассуждая, как выше, придем к равенству

$$\int_0^\infty e^{i\alpha y} J_\nu(y)\,dy = e^{\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} \frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Почленно складывая две установленные формулы, деля результат на 2 и учитывая формулы Эйлера, получим

$$\int_0^\infty J_\nu(y)\cos\alpha y\,dy = \cos\frac{\pi}{2}(\nu+1)\,\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

или, умножая обе части на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, после очевидных упрощений найдем

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty J_\nu(y)\cos\alpha y\,dy = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{\pi\nu}{2}\,\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}},\quad \alpha>1,$$

что и требовалось показать.

5.53. Показать, что синус-преобразование Фурье $F_s(\alpha)$ бесселевой функции первого рода $J_\nu(x)$, $0<\nu<1$ имеет вид

$$F_s(\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\nu\arcsin\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}, & 0<\alpha<1;\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\,\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}}, & \alpha>1.\end{cases}$$

Указание. Рассмотреть случаи $0<\alpha<1$ и $\alpha>1$, применив метод решения предыдущей задачи.

5.54. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{J_\nu(x)}{x},\quad 0<\nu<1.$$

Решение. Проинтегрировав по α равенство

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty J_\nu(x)\sin\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\nu\arcsin\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad 0<\alpha<1$$

(см. 5.53), получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{J_\nu(x)}{x}\cos\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(\nu\arcsin\alpha)}{\nu},\quad 0<\alpha<1.$$

Поступая так же с равенством (задача 5.53)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty J_\nu(x)\sin\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\,\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}},\quad \alpha>1$$

и замечая, что

$$\frac{d}{d\alpha}(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu=-\frac{\nu(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\sqrt{\alpha^2-1}},$$

найдем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty J_\nu(x)\cos\alpha x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\,\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\nu},\quad \alpha>1.$$

Таким образом,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{J_\nu(x)}{x}\cos\alpha x\,dx=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(\nu\arcsin\alpha)}{\nu}, & 0<\alpha<1;\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\pi\nu}{2}\,\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\nu} & \alpha>1.\end{cases}$$

5.55. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{J_\nu(x)}{x},\quad 0<\nu<1.$$

§ 5. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1. Основные свойства. Таблица формул преобразований Фурье может быть значительно расширена, если использовать некоторые из свойств этого преобразования. Многие свойства используются также в разного рода приложениях (см., например, гл. VII, § 4). Для того чтобы рассматриваемые свойства формулировать нагляднее и короче, будем обозначать стрелкой переход от функции $f(x)$ к ее преобразованию Фурье $F(\alpha)$: $f(x) \to F(\alpha)$. Если речь будет идти о косинус- или синус-преобразовании, то над стрелкой ставится знак «c» или «s»:

$$f(x) \xrightarrow{c} F_c(\alpha), \quad f(x) \xrightarrow{s} F_s(\alpha).$$

5.56. Доказать, что если $f_1(x) \to F_1(\alpha)$ и $f_2(x) \to F_2(\alpha)$, то $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \to c_1 F_1(\alpha) + c_2 F_2(\alpha)$ (*свойство линейности*).

5.57. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = (2x+1)\, e^{-|x|}.$$

Указание. Использовать свойство линейности и результаты задач 5.7 и 5.8.

5.58. Доказать свойство преобразования Фурье:

если $$f(x) \to F(\alpha), \text{ то } f(ax) \to \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right).$$

Решение. Запишем преобразование Фурье функции $f(ax)$ и в интеграле сделаем замену $ax = t$:

$$f(ax) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(ax)\, dx = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\alpha}{a}t} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right).$$

5.59. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-a^2x^2} \quad (a > 0).$$

Решение. Из результатов задач 5.11 и 5.29 мы знаем, что $e^{-x^2} \to \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$. По свойству задачи 5.58 получим $e^{-a^2x^2} \to \frac{1}{|a|\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha}{4a^2}}$.

5.60. Показать, что свойства задач 5.56 и 5.58 сохраняются для косинус- и синус-преобразований.

5.61. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функций:

а) $f(x) = \begin{cases} \cos \omega x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \sin \omega x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & x > \pi \end{cases}$ $(\omega > 0)$.

Указание. См. 5.19 и 5.20.

5.62. Найти преобразование Фурье функций

а) $f(x) = e^{-a|x|}$, б) $f(x) = xe^{-a|x|}$ $(a > 0)$.

Указание. См. 5.7 и 5.8.

5.63. Вывести свойство преобразования Фурье:

$$\text{если } f(x) \to F(\alpha), \text{ то } f(x-a) = e^{-i\alpha a} F(\alpha).$$

Решение.

$$f(x-a) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x-a)\, dx \underset{x-a=t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(t+a)} f(t)\, dt =$$

$$= e^{-i\alpha a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t)\, dt = e^{-i\alpha a} F(\alpha).$$

5.64. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-2|x-1|}.$$

5.65. Доказать, что если $f(x) \to F(\alpha)$, то:

а) $f(x)\cos\omega x \to \frac{1}{2}[F(\alpha-\omega)+F(\alpha+\omega)]$,

б) $f(x)\sin\omega x \to \frac{1}{2i}[F(\alpha-\omega)-F(\alpha+\omega)]$.

Решение. Заменяя $\cos\omega x$ по формуле Эйлера, получим

$$f(x)\cos\omega x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x) \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha-\omega)x} f(x)\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha+\omega)x} f(x)\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[F(\alpha-\omega)+F(\alpha+\omega)],$$

и свойство а) доказано.

Свойство б) доказывается аналогично.

5.66. Найти преобразование Фурье функции

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. В задаче **5.1** было показано, что

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\alpha)},$$

так как $g(x) = f(x)\cos x$, то на основании свойства а) (при $\omega = 1$) задачи **5.65** получаем

$$g(x) \to \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}[1+i(\alpha-1)]} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}[1+i(\alpha+1)]}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{2+2i\alpha}{2-\alpha^2+2i\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2-3\alpha^2+i(4\alpha-\alpha^3)}{4+\alpha^4}.$$

5.67. Найти преобразование Фурье функций:

а) $f(x)=e^{-|x|}\cos\omega x$, б) $f(x)=e^{-|x|}\sin\omega x$,

в) $f(x)=\begin{cases} x\cos x, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^4}$, д) $f(x)=\dfrac{x\cos x}{(1+x^2)^2}$.

Указание. Для решений а) и б) см. **5.7**, сравнить с **5.9** и **5.10**, для в) — см. **5.5**, для г) — см. **5.46** и **5.11**, для д) — см. **5.47** и **5.12**.

5.68. Вывести свойство преобразования Фурье:

$$\text{если}\quad f(x)\to F(\alpha),\quad \text{то}\quad f'(x)\to i\alpha F(\alpha).$$

Решение. По определению преобразования Фурье:

$$f'(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{i\alpha x}}_{u}\underbrace{f'(x)\,dx}_{dv}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\alpha x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\alpha)\,e^{i\alpha x}f(x)\,dx.$$

Из того, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси (см. § 1), следует, что $f(\pm\infty)=0$, поэтому двойная постановка в проинтегрированный член равна нулю (величина $e^{-i\alpha x}$ по модулю равна 1).

Следовательно,

$$f'(x)\to i\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}f(x)\,dx=i\alpha F(\alpha).$$

5.69. Доказать, что если $f(x)\to F(\alpha)$ и $f'(\pm\infty)=\ldots=f^{(k-1)}(\pm\infty)=0$, то $f^{(k)}(x)\to(i\alpha)^kF(\alpha)$.

5.70. Пусть функция $f(x)$ имеет косинус-преобразование Фурье $F_c(\alpha)$ и синус-преобразование $F_s(\alpha)$. Доказать, что если $f(0)=0$, то

$$f'(x)\xrightarrow{c}-\alpha F_s(\alpha)\quad\text{и}\quad f'(x)\xrightarrow{s}\alpha F_c(\alpha).$$

Предполагая, что $f'(0)=f'(\infty)=0$, следует получить отсюда:

$$f''(x)\xrightarrow{c}-\alpha^2F_c(\alpha)\quad\text{и}\quad f''(x)\xrightarrow{s}-\alpha^2F_s(\alpha).$$

5.71. Найти преобразование Фурье функции xe^{-x^2}.

Решение. Исходим из известного результата (**5.29**)

$$e^{-x^2}\to\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Согласно результату задачи 5.68 при дифференцировании левой части этого соотношения правая умножается на $i\alpha$:

$$-2xe^{-x^2} \to \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}},$$

откуда в силу свойства линейности получаем

$$xe^{-x^2} \to -\frac{i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

5.72. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

2. Некоторые интегральные формулы. Рассмотрим ряд формул, содержащих под знаком интеграла функции и их преобразования Фурье.

5.73. Пусть $F(\alpha)$ — образ Фурье функции $f(x)$.
Доказать справедливость следующих формул:

а) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) \frac{\sin \alpha a}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} f(\xi)\, d\xi,$$

б) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) \cos \alpha a\, d\alpha = \frac{1}{2} [f(x+a) - f(x-a)].$$

Решение. Заметим, что формула б) получается из а) дифференцированием по параметру, а поэтому достаточно доказать первую из них. Заменяя в ней $\sin \alpha a$ по формуле Эйлера, получим в левой части:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) \frac{\sin \alpha a}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) \frac{e^{i\alpha a x} - e^{-i\alpha a x}}{i\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x+a)} \frac{F(\alpha)}{i\alpha} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-a)} \frac{F(\alpha)}{i\alpha} d\alpha \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [\varphi(x+a) - \varphi(x-a)],$$

где введено обозначение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{F(\alpha)}{i\alpha} d\alpha.$$

Отсюда, дифференцируя по x и используя формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha)\, d\alpha = f(x).$$

Поэтому

$$\varphi(x)=\int_A^x f(\xi)\,d\xi-\varphi(A)$$

и

$$\varphi(x+a)-\varphi(x-a)=\int_A^{x+a} f(\xi)\,d\xi-\int_A^{x-a} f(\xi)\,d\xi=\int_{x-a}^{x+a} f(\xi)\,d\xi,$$

что и доказывает формулу а).

Замечание. Поскольку в левых частях а) и б) стоят обратные преобразования Фурье от функций $F(\alpha)\frac{\sin \alpha a}{\alpha}$ и $F(\alpha)\cos \alpha a$, то доказанные соотношения можно сформулировать еще так:

если $f(x)\to F(\alpha)$, то $\frac{1}{2}\int_{x-a}^{x+a} f(\xi)\,d\xi\to F(\alpha)\frac{\sin \alpha a}{\alpha}$ и $\frac{1}{2}[f(x+a)+$ $+f(x-a)]\to F(\alpha)\cos \alpha a$.

5.74. Пусть $f(x)$ — четная функция и $F(\alpha)$ ее образ Фурье. Доказать равенства:

а) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\alpha)\frac{\sin \alpha a}{\alpha}\cos \alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_{x-a}^{x+a} f(\xi)\,d\xi,$$

б) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos \alpha a\cos \alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}[f(x+a)-f(x-a)].$$

Сформулировать эти соотношения на языке косинус-преобразований Фурье.

5.75. Пусть $f(x)$ — нечетная функция и $F(\alpha)$ — ее образ Фурье. Доказать равенства:

а) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\alpha)\frac{\sin \alpha a}{\alpha}\sin \alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2i}\int_{x-a}^{x+a} f(\xi)\,d\xi,$$

б) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos \alpha a\sin \alpha x\,dx=\frac{1}{2i}[f(x+a)-f(x-a)].$$

5.76. Пусть $f(x)\to F(\alpha)$ и $g(x)\to G(\alpha)$.

Доказать равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,G(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\,g(s)\,ds.$$

Решение. Так как $G(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)\,e^{-i\alpha s}\,ds$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,G(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)\,e^{-i\alpha s}\,ds\right]e^{i\alpha x}\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{i\alpha(x-s)}\,d\alpha\right]ds=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)\,f(x-s)\,ds.$$

Замечание. Правая часть доказанного равенства называется сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$. Это равенство обозначает, что свертка преобразованием Фурье переходит в произведение образов Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$.

5.77. Пусть $F_c(\alpha)$ и $G_c(\alpha)$ — образы функций $f(x)$ и $g(x)$ при косинус-преобразовании Фурье. Доказать, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} F_c(\alpha)\,G_c(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}[f(x+s)+f(|x-s|)]\,g(s)\,ds.$$

5.78. Пусть $F_s(\alpha)$ и $G_s(\alpha)$ — образы функций $f(x)$ и $g(x)$ при синус-преобразовании Фурье. Получить формулу

$$\int\limits_{0}^{\infty} F_s(\alpha)\,G_s(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}[f(x+s)-f(|x-s|)]\,g(s)\,ds.$$

3. Свойство взаимности. Косинус- и синус-преобразования Фурье, кроме рассмотренных выше, обладают еще следующим свойством взаимности

если $f(x)\xrightarrow{c}F_c(\alpha)$, то $F_c(x)\xrightarrow{c}f(\alpha)$,

если $f(x)\xrightarrow{s}F_s(\alpha)$, то $F_s(x)\xrightarrow{s}f(\alpha)$.

Эти свойства непосредственно вытекают из симметричности формул косинус- и синус-преобразования с формулами обращения этих преобразований (см. § 2, формулы (2.1) и (2.3), (2.2) и (2.4)).

5.79. Найти косинус-преобразование функции

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Решение. В задаче 5.28 было показано, что

$$\frac{1-e^{-\beta x}}{x}\xrightarrow{c}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}{\alpha}\quad(\beta\geqslant 0).$$

Полагая здесь $\beta=1$ и преобразуя очевидным образом правую часть, получаем

$$\frac{1-e^{-x}}{x}\xrightarrow{c}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Используя свойство взаимности, а затем линейность косинус-преобразования Фурье, находим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow{c}\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha},\quad \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow{c}\sqrt{2\pi}\,\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

5.80. Найти косинус-преобразование Фурье функций:

$$\text{а)}\ \frac{\sin x}{x},\quad \text{б)}\ \frac{x\sin \pi x}{1-x^2},\quad \text{в)}\ \frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}.$$

Указание. а) см. **5.18**, б) см. **5.19**, в) см. **5.41**.

5.81. Найти синус-преобразование Фурье функций:

$$\text{а)}\ \frac{1-\cos x}{x},\quad \text{б)}\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}},\quad \text{в)}\ \frac{J_{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{x}}.$$

Указание. а) см. **5.18**, б) см. **5.36**, в) см. **5.42**.

ГЛАВА VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа. *Оригиналом* называется комплекснозначная функция $f(t)$*, непрерывная на интервале $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, за исключением, быть может, изолированных точек, если существует действительное число s_0 (*показатель роста* $f(t)$) — такое, что

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mid f(t) \mid dt$$

сходится при $s > s_0$ и расходится при $s < s_0$.

Если рассматриваемый интеграл сходится при всех действительных s, то показатель роста s_0 считают равным $-\infty$, если же он расходится при всех действительных s, то полагают $s_0 = +\infty$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется регулярная функция $g(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определенная равенством

$$g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

где s_0 — показатель роста $f(t)$.

Преобразованием Лапласа называется интегральное преобразование, относящее оригиналу $f(t)$ его изображение $g(p)$, что символически записывается так:

$$g(p) = \mathrm{L} f(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Обратным преобразованием Лапласа называется преобразование, относящее изображению $g(p)$ его оригинал $f(t)$, что символически записывается так:

$$\mathrm{L}^{-1} g(p) = f(t).$$

---

* Комплекснозначные функции действительного переменного t имеют вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — действительные функции (если $f_2(t) \equiv 0$, $f(t)$ является действительной функцией). Комплекснозначные функции не следует смешивать с функциями $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, всегда представимыми в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где u и v — функции двух действительных переменных x и y.

Замечание. Определение оригинала $f(t)$ на интервале $0 \leqslant t < +\infty$ продолжают на все отрицательные t, полагая

$$f(t) = 0 \quad \text{на} \quad -\infty < t < 0.$$

В задачах **6.1—6.19** установить, какие из функций являются оригиналами, и найти их показатели роста.

6.1.

$$f(t) = e^{(2+3i)t}.$$

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-st} |e^{(2+3i)t}|\, dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{2t} |e^{3it}|\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-2)t}\, dt.$$

Последний интеграл сходится при $s-2>0$, т. е. $s>2$, и расходится при $s \leqslant 2$. Поэтому $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 2$.

6.2.

$$f(t) = e^{t^2}.$$

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{t^2}\, dt$$

расходится при всех s, так как при любом фиксированном s, начиная с некоторого достаточно большого t,

$$e^{-st} \cdot e^{t^2} > 1.$$

Поэтому $f(t)$ не является оригиналом ($s_0 = +\infty$).

6.3.

$$f(t) = e^{-t^2}.$$

6.4.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

6.5.

$$f(t) = \frac{1}{t}.$$

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dt}{t}$$

расходится при всех s, так как при $s \geqslant 0$

$$\lim_{t \to 0} e^{-st} \frac{1}{t} : \frac{1}{t} = 1,$$

а потому, на основании признака сравнения для несобственных интегралов, рассматриваемый интеграл ведет себя так же, как $\int_0^\infty \frac{dt}{t}$, а последний расходится. При $s<0$ интеграл тем более расходится. Поэтому $f(t)$ не является оригиналом.

6.6.

$$f(t)=\sin\frac{1}{t}.$$

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt\leqslant\int_0^\infty e^{-st}\,dt,$$

а последний интеграл сходится при всех $s>0$ (расходясь при $s\leqslant 0$). Поэтому $f(t)$ оригинал с показателем роста $s_0=0$.

6.7.

$$f(t)=n \quad \text{при} \quad n\leqslant t<n+1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-st}\,dt=\frac{e^{-s}-1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-ns}.$$

Последний ряд сходится при любом $s>0$, ибо его общий член

$$u_n=ne^{-ns}=\frac{n}{e^{ns}}<\frac{1}{n^2}$$

при любом s для достаточно больших n, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. При $s\leqslant 0$ ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Следовательно, $f(t)$ — оригинал с показателем роста $s_0=0$.

6.8. $f(t)=t^3$.

6.9. $f(t)=e^{\frac{1}{t}}$.

6.10. $f(t)=e^{-t^2}$.

6.11. $f(t)=e^{t^3}$.

6.12. $f(t)=\frac{1}{t\sqrt{t}}$.

6.13. $f(t)=\frac{1}{t-1}$.

6.14. $f(t)=e^{(3+i)t}$.

6.15. $f(t)=e^{\frac{1}{(t-1)^2}}$.

6.16. $f(t)=t\sin\frac{1}{t}$.

6.17. $f(t)=\operatorname{ch}(4-3i)t$.

6.18. $f(t)=\sqrt{n}, \quad n\leqslant t<n+1$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

6.19. $f(t)=\sin(2-i)t$.

6.20. Показать, что комплекснозначная функция $f(t)$, удовлетворяющая при всех t неравенству

$$|f(t)| < Me^{at}, \quad \text{где} \quad M > 0, \ a \geqslant 0,$$

является оригиналом.

Решение. Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt < M \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt.$$

Интеграл в правой части неравенства сходится при $s - a > 0$, а потому интеграл левой части сходится и подавно при $s > a$, т. е. функция $f(t)$ является оригиналом.

В задачах **6.21—6.33** найти изображения $g(p)$ оригиналов $f(t)$, пользуясь определением изображения.

6.21.

$$f(t) = \eta(t),$$

где $\eta(t)$ — «единичная функция», называемая также функцией Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-st} |\eta(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

при $s > 0$, так как тогда $e^{-st} \to 0$ при $t \to +\infty$ (при $s \leqslant 0$ интеграл расходится). Поэтому единичная функция является оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$. Ее изображение

$$g(p) = L\eta(t) = \int_0^\infty e^{-pt} \eta(t)\, dt = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > s_0 = 0.$$

6.22.

$f(t) = e^{qt}$, $q = \alpha + i\beta$ — любое комплексное число.

Решение.

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt = \int_0^\infty e^{-st} |e^{qt}| = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt.$$

Интеграл сходится при $s - \alpha > 0$, т. е. $s > \alpha$, и расходится при $s \leqslant \alpha$. Таким образом $f(t)$ оригинал с показателем роста

$s_0 = \alpha = \operatorname{Re} q$. Изображение

$$g(p) = Lf(t) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt} e^{qt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-q)t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{p-q} e^{-(p-q)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-q} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q.$$

6.23.

$$f(t) = t^n, \quad n \text{ целое число} \geqslant 0.$$

6.24.

$$f(t) = t^\alpha, \quad \alpha > -1.$$

Решение. При $\alpha > -1$ функция $f(t) = t^\alpha$ является оригиналом с нулевым показателем роста. Поэтому

$$Lt^\alpha = \int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

При $p > 0$ (после замены $pt = u$ и учете определения гамма-функции имеем

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha\,dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha\,du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Изображение функции t^α и правая часть последнего равенства регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, а потому, совпадая при $p > 0$, в силу теоремы единственности, они совпадают на всей полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Таким образом

$$Lt^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Так как при целом неотрицательном $\alpha = n$ $\Gamma(n+1) = n!$, отсюда следует результат предыдущей задачи.

6.25.

$$f(t) = e^{-t^2}.$$

6.26.

$$f(t) = \ln(t+1).$$

Решение. Функция $f(t)$ является оригиналом с нулевым показателем роста. Изображение

$$g(p) = Lf(t) = \int_0^\infty e^{pt} \ln(t+1)\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \ln(t+1)\Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{t+1}\,dt.$$

Замечая, что при $\operatorname{Re} p > 0$, результат двойной подстановки есть нуль и сделав в интеграле замену $t + 1 = u$, получим

$$g(p) = \frac{1}{p} \int_1^{\infty} \frac{e^{-p(u-1)}}{u}\, du =$$

$$= \frac{e^p}{p} \int_1^{\infty} \frac{e^{-pu}}{u}\, du \underset{pu=v}{=} \frac{e^p}{p} \int_{-p}^{-\infty} \frac{e^v}{v}\, dv = -\frac{e^p}{p} \int_{-\infty}^{-p} \frac{e^v}{v}\, dv,$$

или, учитывая определение интегральной показательной функции,

$$g(p) = -\frac{1}{p} e^p \operatorname{Ei}(-p), \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

6.27.

$$f(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}.$$

Решение. Функция $f(t)$ является оригиналом с нулевым показателем роста.

Изображение

$$g(p) = \mathrm{L} f(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}\, dt.$$

Замена $t = \frac{1}{u}$ приводит к равенству

$$g(p) = \int_0^{\infty} e^{-u - \frac{p}{u}} \frac{1}{u}\, du.$$

В силу известного в теории бесселевых функций интегрального представления (см. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. 1953, стр. 166) последний интеграл равен $K_0(2\sqrt{p})$, где $K_0(z)$ — модифицированная бесселева функция (гл. IV, § 3, п. 5).

Таким образом,

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}\right) = K_0(2\sqrt{p}), \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

6.28. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a; \\ 0, & t > a. \end{cases}$

6.29. $f(t) = \eta(t - a)$.

6.30. $f(t) = t$.

6.31. $f(t) = t\eta(t - 1)$.

6.32. $f(t) = e^{(1-i)t}$.

6.33. $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 \leqslant t \leqslant a; \\ 1, & t > a. \end{cases}$

2. Линейность преобразования Лапласа. Теорема подобия. Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами:

1) (*линейность*) если c_1 и c_2 любые комплексные числа, то

$$\mathrm{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathrm{L} f_1(t) + c_2 \mathrm{L} f_2(t);$$

2) (*теорема подобия*) если $a > 0$ и $\mathrm{L} f(t) = g(p)$, то $\mathrm{L} f(at) = \frac{1}{a} g\left(\frac{p}{a}\right)$.

В задачах **6.33—6.36** найти изображения $g(p)$ соответствующих оригиналов, пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой подобия.

6.34. $f(t) = \cos \omega t, \ \omega = \alpha + \beta i.$

6.35. $f(t) = \cos^2 t.$

Решение.

$$\mathrm{L} \cos^2 t = \mathrm{L}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t\right) = \frac{1}{2} (\mathrm{L}1 + \mathrm{L} \cos 2t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4}\right), \ \mathrm{Re}\, p > 0.$$

6.36. $f(t) = \mathrm{ch}\, \omega t, \ \omega = \alpha + i\beta.$

Решение. По определению гиперболического косинуса

$$\mathrm{L}\, \mathrm{ch}\, \omega t = \mathrm{L} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \frac{1}{2} (\mathrm{L} e^{\omega t} + \mathrm{L} e^{-\omega t}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2},$$

причем должно быть

$$\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, \omega \ \text{ и } \ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}(-\omega) = -\mathrm{Re}\, \omega,$$

т. е.

$$\mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Re}\, \omega|.$$

6.37. $f(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{4t}}.$

Решение.

$$\mathrm{L} f(t) = 4\mathrm{L}\left(\frac{1}{4t} e^{-\frac{1}{4t}}\right).$$

В решении задачи **6.27** было установлено, что

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}\right) = K_0(2\sqrt{p}),$$

поэтому, в силу теоремы подобия при $a = 4$,

$$4\mathrm{L}\left(\frac{4}{t} e^{-\frac{4}{t}}\right) = K_0(\sqrt{p}).$$

6.38. Показать, что

$$\mathrm{L} \sin \omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \ \omega = \alpha + i\beta, \ \mathrm{Re}\, p > |\mathrm{Im}\, \omega|.$$

6.39. Показать, что

$$\mathrm{L}\,\mathrm{sh}\,\omega t = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2},\quad \omega = \alpha + i\beta,\quad \mathrm{Re}\,p > |\mathrm{Re}\,\omega|.$$

В задачах **6.40—6.51** найти изображения $g(p)$ соответствующих оригиналов $f(t)$.

6.40. $f(t) = \sin^2 t$.

6.41. $f(t) = \sin^4 t$.

6.46. $f(t) = \sin t \cdot \sin 2t$.

6.47. $f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t$.

Указание. $\sin^4 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2$.

6.42. $f(t) = \cos 5t \sin 3t$.

6.43. $f(t) = \cos^3 t$.

6.44. $f(t) = \mathrm{ch}\,2t + 2e^{-3t} + 1$.

6.45. $f(t) = e^{-t} + 3e^{-2t} + t^2$.

6.48. $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$.

6.49. $f(t) = t^{\frac{5}{2}}$.

6.50. $f(t) = 3t^3 + 7t^{\frac{5}{2}}$.

6.51. $f(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}$.

3. Теоремы запаздывания и опережения.

1) *Теорема запаздывания.* Если $a > 0$, то $\mathrm{L}f(t-a) = e^{-ap}\,\mathrm{L}\,f(t)$.

2) *Теорема опережения.* Если $a > 0$, то

$$\mathrm{L}\,f(t+a) = e^{ap}\left[\mathrm{L}\,f(t) - \int_0^a e^{-pt} f(t)\,dt\right].$$

В задачах **6.52—6.68** найти изображения соответствующих оригиналов.

6.52.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a; \\ 1, & t > a. \end{cases}$$

Решение. График оригинала $f(t)$ (рис. 120) представляет

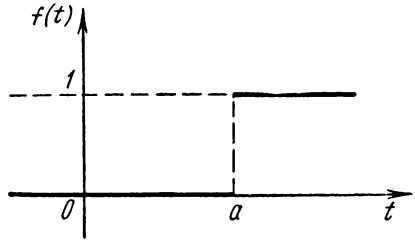


Рис. 126

собой график «единичной функции» $\eta(t)$ (см. **6.21**), сдвинутый вправо на a, поэтому

$$f(t) = \eta(t-a),$$

но $L\eta(t)=\frac{1}{p}$, поэтому в силу теоремы запаздывания $Lf(t)=\frac{e^{-ap}}{p}$.

6.53. $f(t)=\sin(t+1)$.

Решение. По теореме опережения

$$L\sin(t+1)=e^{p}\left(L\sin t-\int_0^1 e^{-pt}\sin t\,dt\right)=$$

$$=e^{p}\left[\frac{1}{p^2+1}+e^{-pt}\frac{p\sin t+\cos t}{p^2+1}\Big|_0^1\right]=\frac{p\sin 1+\cos 1}{p^2+1}.$$

6.54. $f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\ t>b;\\ 1, & a<t<b\end{cases}$ (рис. 121).

Решение. Оригинал $f(t)$ выражается через единичную функцию следующим образом:

$$f(t)=\eta_1(t-a)-\eta_1(t-b).$$

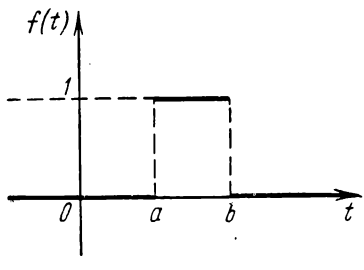


Рис. 121

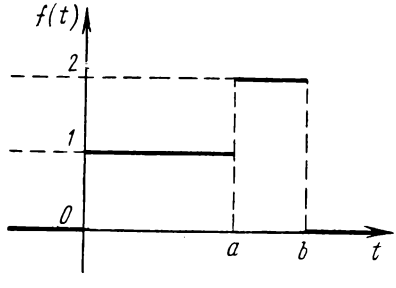


Рис. 122

Поэтому на основании теоремы запаздывания, получаем

$$Lf(t)=L\eta(t-a)-L\eta_1(t-b)=\frac{e^{-ap}}{p}-\frac{e^{-bp}}{p}=\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p},$$

$$\operatorname{Re}p>0.$$

6.55.

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a;\\ 2, & a<t<b;\\ 0, & t<0,\ t>b\end{cases}$$ (рис. 122).

Решение. Оригинал $f(t)$ выражается через единичную функцию следующим образом:

$$f(t)=[\eta_1(t)-\eta_1(t-a)]+2[\eta_1(t-a)-\eta_1(t-b)]=$$
$$=\eta_1(t)+\eta_1(t-a)-2\eta_1(t-b).$$

Поэтому $\mathrm{L}\,f(t)=\mathrm{L}\eta_1(t)+\mathrm{L}\eta_1(t-a)-2\mathrm{L}\eta_1(t-b)=\frac{1}{p}+\frac{e^{-ap}}{p}-\frac{2e^{-bp}}{p}=$
$=\frac{1}{p}(1+e^{-ap}-2e^{-bp})$.

6.56. $f(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.

6.57. $f(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$.

6.58. $f(t)=(t-2)^3$.

6.59. $f(t)=\mathrm{ch}\,(t-3)$.

6.60. $f(t)=\sin^2(t-a)$.

6.61. $f(t)=\cos^2(t-a)$.

6.62.
$$f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1;\\ 1, & 1<t<2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$$

6.63.
$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1;\\ 2, & 1<t<2;\\ 3, & 2<t<3;\\ \cdots\cdots\cdots\\ n, & n-1<t<n;\\ 0, & t>n.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Оригинал $f(t)$ выражается через единичную функцию $\eta_1(t)$ следующим образом:

$$f(t)=\eta_1(t)-\eta_1(t-1)+2[\eta_1(t-1)-\eta_1(t-2)]+\ldots$$
$$\ldots+n[\eta_1(t-n-1)-\eta_1(t-n)]=\eta_1(t)+\eta_1(t-1)+\eta_1(t-2)+\ldots$$
$$\ldots+\eta_1(t-n-1)-n\eta_1(t-n),$$

а потому

$$\mathrm{L}\,f(t)=\mathrm{L}\,\eta_1(t)+\mathrm{L}\,\eta_1(t-1)+\ldots+\mathrm{L}\,\eta_1(t-n-1)-n\,\mathrm{L}\eta_1(t-n)=$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{e^{-p}}{p}+\ldots+\frac{e^{-(n-1)p}}{p}-\frac{ne^{-np}}{p}=\frac{1+e^{-p}+\ldots+e^{-(n-1)p}}{p}-\frac{ne^{-np}}{p}=$$
$$=\frac{e^{-np}-1}{p(e^{-p}-1)}-\frac{ne^{-np}}{p}.$$

6.64.
$$f(t)=\begin{cases}a_1, & 0<t<\tau_1;\\ a_2, & \tau_1<t<\tau_2;\\ a_3, & \tau_2<t<\tau_3.\end{cases}$$

6.65. Показать, что если $\mathrm{L}\,f(t)=g(p)$, то $\mathrm{L}\,f(at-b)=$
$=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}p}g\left(\frac{p}{a}\right)$.

6.66. $f(t)=(at-b)^n$.

6.67. $f(t)=\mathrm{sh}\,(3t-5)$.

6.68. $f(t)=\mathrm{ch}\,(5t-1)$.

4. Теорема смещения (затухания).
Если $\mathrm{L}\,f(t)=g(p)$ и λ — любое комплексное число, то

$$\mathrm{L}[e^{\lambda t}f(t)]=g(p+\lambda),\quad \mathrm{Re}\,p>s_0-\mathrm{Re}\,\lambda.$$

Теорема смещения, таким образом, позволяет получать изображение произведения оригинала на показательную функцию.

В задачах **6.69—6.80** найти изображения соответствующих оригиналов.

6.69. $f(t)=e^{-\lambda t}\cos\omega t.$

Решение. Так как $\mathrm{L}\cos\omega t=\frac{p}{p^2+\omega^2}$ при $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\omega|$, то применяя теорему смещения, находим

$$\mathrm{L}\,e^{-\lambda t}\cos\omega t=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2},\quad \operatorname{Re}>|\operatorname{Im}\omega|-\operatorname{Re}\lambda.$$

6.70. $f(t)=e^{2t}\sin\pi t.$

Решение. Так как $\mathrm{L}\sin\pi t=\frac{\pi}{p^2+\pi^2}$, $\operatorname{Re} p>0$, то по теореме смещения

$$\mathrm{L}\,(e^{2t}\sin\pi t)=\frac{\pi}{(p-2)^2+\pi^2},\quad \operatorname{Re} p>0-(-2)=2.$$

6.71. $f(t)=\operatorname{ch}\lambda t\cos\omega t.$

Решение.

$$\mathrm{L}f(t)=\mathrm{L}\frac{e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2}\cos\omega t=\frac{1}{2}\mathrm{L}\,e^{\lambda t}\cos\omega t+\frac{1}{2}\mathrm{L}\,e^{-\lambda t}\cos\omega t=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2},$$

причем первое слагаемое правой части является изображением в полуплоскости $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Lm}\omega|-\operatorname{Re}(-\lambda)=|\operatorname{Im}\omega|+\operatorname{Re}\lambda$, а второе в полуплоскости $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\omega|-\operatorname{Re}\lambda$. Поэтому вся правая часть является изображением в области $\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\omega|+|\operatorname{Re}\lambda|$.

6.72. $f(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$

Решение. По формуле задачи **6.25**, учитывая значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, получим

$$\mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}.$$

Применяя формулу Эйлера и теорему смещения, найдем

$$\mathrm{L}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2i}\mathrm{L}\left(\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}-\frac{e^{-it}}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right).$$

6.73. $f(t)=e^{at}\sin bt.$

6.74. $f(t)=e^{-at}\operatorname{ch}\beta t.$

6.75. $f(t)=e^{-at}\operatorname{sh}\beta t.$

6.76. $f(t)=e^{\lambda t}\sin^2 t.$

6.77. $f(t)=e^{-\lambda t}\cos^2 t.$

6.78. $f(t)=e^{2t}\sin 3t\cos t.$

6.79. $f(t)=\operatorname{sh} 3t\cos^2 2t.$

6.80. $f(t)=\frac{\cos t}{\sqrt{t}}.$

Указание. Применить прием решения **6.72.**

6.81. Показать, что

$$L[\operatorname{ch} \alpha t f(t)] = \frac{g(p-\alpha)+g(p+\alpha)}{2},$$

если

$$L f(t) = g(p).$$

Решение. Используя сначала определение гиперболического косинуса, а затем применяя теорему смещения, получим

$$L[\operatorname{ch} \alpha t f(t)] = \frac{1}{2} L(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) f(t)] = \frac{1}{2}\{L[e^{\alpha t} f(t)] + L[e^{-\alpha t} f(t)]\} =$$

$$= \frac{g(p-\alpha)+g(p+\alpha)}{2}.$$

6.82. Показать, что

$$L[\operatorname{sh} \alpha t f(t)] = \frac{g(p-\alpha)-g(p+\alpha)}{2}, \text{ где } g(p) = Lf(t).$$

6.83. Показать, что

$$L[\cos \alpha t f(t)] = \frac{g(p-i\alpha)+g(p+i\alpha)}{2}, \text{ где } g(p) = L f(t).$$

6.84. Показать, что

$$L[\sin \alpha t f(t)] = \frac{g(p-i\alpha)-g(p+i\alpha)}{2i}, \text{ где } g(p) = L f(t).$$

5. Изображение периодического оригинала.

Если оригинал $f(t)$ имеет период a, т. е. удовлетворяет условию

$$f(t+a) = f(t),$$

его изображение

$$g(p) = Lf(t) = \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-pt} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

6.85. Найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом a и графиком, изображенным на рис. 123 (этот оригинал называют иногда «треугольным импульсом»).

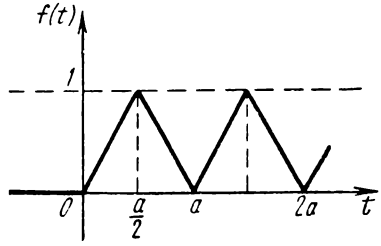


Рис. 123

Решение. Оригинал $f(t)$ можно аналитически изобразить на интервале-периоде следующим образом:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2t}{a}, & 0\leqslant t<\dfrac{a}{2};\\ \dfrac{2(a-t)}{a}, & \dfrac{a}{2}\leqslant t<a.\end{cases}$$

Поэтому изображение этого периодического оригинала таково:

$$g(p)=\mathrm{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-pt}f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-ap}}\left[\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}\frac{2t}{a}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{a}{2}}^{a} e^{-pt}\frac{2(a-t)}{a}\,dt\right]=\frac{2}{a(1-e^{-ap})}\left[\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}t\,dt+\int_{\frac{a}{2}}^{a} e^{-pt}(a-t)\,dt\right].$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}t\,dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}t\Big|_0^{\frac{a}{2}}+\frac{1}{p}\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}\,dt=-\frac{a}{2p}e^{-\frac{ap}{2}}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{\frac{a}{2}}=$$

$$=-\frac{a}{2p}e^{-\frac{ap}{2}}-\frac{1}{p^2}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{p^2},$$

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} e^{-pt}(a-t)\,dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}(a-t)\Big|_{\frac{a}{2}}^{a}+\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_{\frac{a}{2}}^{a}=$$

$$=\frac{a}{2p}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{p^2}e^{-ap}-\frac{1}{p^2}e^{-\frac{ap}{2}}.$$

Подстановка значений интегралов в выражение изображения дает:

$$g(p)=\frac{2}{a(1-e^{-ap})}\left(\frac{1}{p^2}e^{-ap}-\frac{2}{p^2}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{2\left(1-e^{-\frac{ap}{2}}\right)^2}{ap^2(1-e^{-ap})}=$$

$$=\frac{2}{ap^2}\cdot\frac{1-e^{-\frac{ap}{2}}}{1+e^{-\frac{ap}{2}}}=\frac{2}{ap^2}\operatorname{th}\frac{ap}{4}.$$

6.86. Показать, что оригинал $f(t)$ с периодом a, обладающий свойством

$$f(t)=-f\left(t-\frac{a}{2}\right),$$

имеет изображение

$$g(p) = \mathrm{L}f(t) = \frac{1}{1+e^{-\frac{ap}{2}}} \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Замечание. Периодические оригиналы, обладающие свойством $f(t) = -f\left(t - \frac{a}{2}\right)$, иногда не вполне удачно называют «антипериодическими» функциями; оригинал $f(t) = \sin t$ является «антипериодическим», так как имеет период 2π и $\sin t = -\sin(t - \pi)$.

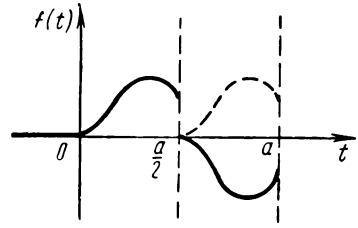


Рис. 124

График «антипериодического» оригинала на второй половине интервала-периода является зеркальным отображением относительно оси t его графика на первой половине интервала-периода, сдвинутого вправо на полупериод (см., например, рис. 124).

Решение. Так как оригинал $f(t)$ имеет период a, его изображение

$$g(p) = \mathrm{L}f(t) = \frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Так как оригинал, по условию, обладает свойством $f(t) = -f\left(t - \frac{a}{2}\right)$, это изображение можно записать еще так:

$$g(p) = \frac{1}{1-e^{-ap}} \left[\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt} f(t)\, dt - \int_{\frac{a}{2}}^{a} e^{-pu} f\left(u - \frac{a}{2}\right) du \right] \underset{u - \frac{a}{2} = t}{=}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-ap}} \left[\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt} f(t)\, dt - e^{-\frac{ap}{2}} \int_0^a e^{-pt} f(t)\, dt \right] =$$

$$= \frac{1-e^{-\frac{ap}{2}}}{1-e^{-ap}} \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt} f(t)\, dt = \frac{1}{1+e^{-\frac{ap}{2}}} \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

6.87. Найти изображение оригинала с периодом a и графиком, изображенным на рис. 125.

Р е ш е н и е. На интервале-полупериоде $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$ данный «антипериодический» оригинал

$$f(t)=\frac{2t}{a}.$$

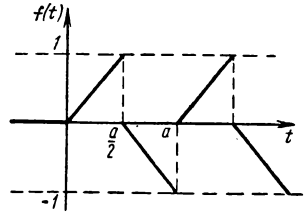


Рис. 125

Поэтому, на основании формулы предыдущей задачи, получаем

$$g(p)=\mathrm{L}f(t)=\frac{1}{1+e^{-\frac{ap}{2}}}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}\frac{2t}{a}\,dt=\frac{2}{a\left(1+e^{-\frac{ap}{2}}\right)}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}t\,dt=$$

$$=\frac{2}{a\left(1+e^{-\frac{ap}{2}}\right)}\left[\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-\frac{ap}{2}}\right)-\frac{a}{2p}e^{-\frac{ap}{2}}\right]=\frac{2}{ap^2}\operatorname{th}\frac{ap}{4}-\frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-\frac{ap}{2}}}{1+e^{-\frac{ap}{2}}}.$$

6.88. Показать, что изображение оригинала

$$f_1(t)=\begin{cases} f(t), & 0<t\leqslant\frac{a}{2};\\ 0, & \frac{a}{2}<t<a\end{cases}$$

где $f(t)$ — «антипериодический» оригинал периода a имеет вид

$$\mathrm{L}f_1(t)=\frac{1}{1-e^{-\frac{ap}{2}}}\mathrm{L}f(t).$$

Р е ш е н и е. Оригинал $f_1(t)$ является «выпрямленным» оригиналом $f(t)$ и имеет тот же период a. Поэтому

$$\mathrm{L}f_1(t)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-pt}f_1(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\frac{ap}{2}}}\cdot\frac{1}{1+e^{-\frac{ap}{2}}}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-\frac{ap}{2}}}\mathrm{L}f(t).$$

6.89. Найти изображение оригинала $f_1(t)$ с периодом 2π, определенного на интервале-периоде так:

$$f_1(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\leqslant\pi;\\ 0, & \pi<t<2\pi\end{cases}$$

(этот оригинал иногда называют «выпрямленным» синусоидальным током).

Решение. В силу формулы задачи **6.88.**

$$Lf_1(t)=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}L\sin t=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

6.90. Показать, что модуль «антипериодического» оригинала $f(t)$ периода a, неотрицательного на $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$, имеет изображение

$$L|f(t)|=\operatorname{cth}\frac{ap}{4}Lf(t).$$

Решение. Модуль «антипериодического» оригинала $f(t)$ является периодической функцией, но уже с периодом $\frac{a}{2}$.

Поэтому

$$L|f(t)=\frac{1}{1-e^{-\frac{ap}{2}}}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}|f(t)|\,dt=\frac{1}{1-e^{-\frac{ap}{2}}}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1+e^{-\frac{ap}{2}}}{1-e^{-\frac{ap}{2}}}\cdot\frac{1}{1+e^{-\frac{ap}{2}}}\int_0^{\frac{a}{2}}e^{-pt}f(t)\,dt=\operatorname{cth}\frac{ap}{4}Lf(t).$$

6.91. Найти изображение «пилообразной» функции $f(t)$ с графиком, изображенным на рис. 126.

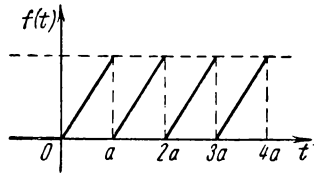


Рис. 126

Решение. «Пилообразная» функция является модулем «антипериодического» оригинала задачи **6.87.**

Поэтому ее изображение имеет вид

$$g(p)=\operatorname{cth}\frac{ap}{4}\left(\frac{2}{ap^2}\operatorname{th}\frac{ap}{4}-\frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-\frac{ap}{2}}}{1+e^{-\frac{ap}{2}}}\right)=\frac{2}{ap^2}+\frac{1}{p\left(1-e^{-\frac{ap}{2}}\right)}.$$

В задачах **6.92—6.101** найти изображения соответствующих оригиналов.

6.92. $f(t)$ оригинал с периодом a, определенный на интервале-периоде так:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\frac{a}{2};\\ -1, & \frac{a}{2}\leqslant t<a.\end{cases}$$

6.93. $f(t)$ оригинал («прямоугольный импульс») с периодом a, определенный на интервале-периоде так:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\frac{a}{2};\\ 0, & \frac{a}{2}\leqslant t<a.\end{cases}$$

6.94. $f(t)=|\sin t|$

(таким бывает напряжение на выходе двухполупериодного выпрямителя).

6.95. $f(t)$ оригинал с периодом a, определенный на интервале-периоде так:

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\frac{a}{2};\\ 1, & \frac{a}{2}\leqslant t<a.\end{cases}$$

6.96.

$$f(t)=|\cos nt|,\quad n \text{ целое}>0.$$

6.97. $f(t)$ оригинал с периодом a и графиком, изображенным на рис. 127.

6.98. $f(t)$ оригинал с периодом a и графиком, изображенным на рис. 128.

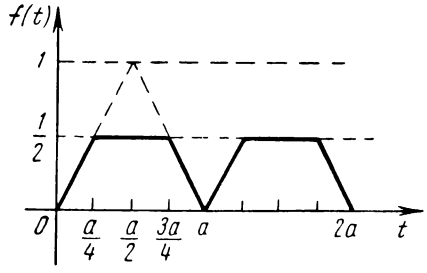


Рис. 127

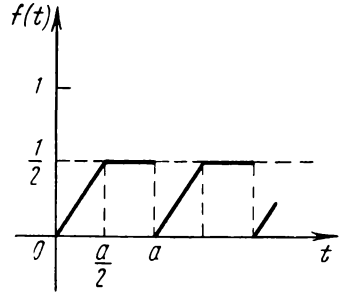


Рис. 128

6.99. $f(t)$ оригинал с периодом a, заданный на интервале-периоде следующим образом:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2t}{a}, & 0<t<\frac{a}{4};\\ \frac{1}{2}, & \frac{a}{4}\leqslant t<\frac{a}{2};\\ 0, & \frac{a}{2}\leqslant t<a.\end{cases}$$

6.100. $f(t)$ оригинал с периодом a, заданный на интервале-периоде следующим образом:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{4t}{a}-1, & 0<t<\frac{a}{2};\\ -\frac{4t}{a}+3, & \frac{a}{2}\leqslant t<a.\end{cases}$$

6.101. $f(t)$ оригинал с периодом a и графиком, изображенным на рис. 129.

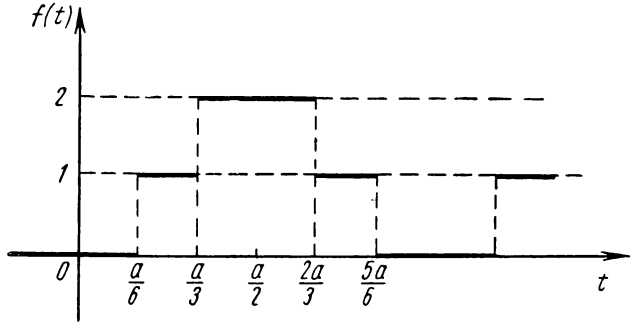


Рис. 129

6. Дифференцирование оригинала.

I. *Если функция* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $(0, +\infty)$ *и* $f'(t)$ *является оригиналом, то* $f(t)$ *тоже является оригиналом, существует* $f(+0)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$ *и из* $\mathrm{L}f(t)=g(p)$ *следует:*

$$\mathrm{L}f'(t)=pg(p)-f(+0).$$

II. *Если функция* $f(t)$ *n раз непрерывно дифференцируема на* $(0, +\infty)$ *и* $f^{(n)}(t)$ *является оригиналом, то* $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ *тоже являются оригиналами, существуют* $f(+0)$, $f'(+0)$, ..., $f^{(n-1)}(+0)$ *и из* $\mathrm{L}f(t)=g(p)$ *следует:*

$$\mathrm{L}f^{(n)}(t)=p^n g(p)-f(+0)\,p^{n-1}-f'(+0)\,p^{n-2}-\ldots-f^{(n-1)}(+0).$$

III. *Если функция* $f(t)$ *удовлетворяет условиям предыдущего правила,*

$$\mathrm{L}f(t)=g(p)$$

и

$$f(+0)=c_0,\ f'(+0)=c_1,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(+0)=c_{n-1},$$

a_0, a_1, ..., a_{n+1} любые числа, то

$$\mathrm{L}\left[a_0 f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n f(t) + a_{n+1}\right] =$$
$$= (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)\, g(p) - c_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) -$$
$$- c_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) - \ldots - c_{n-2}(a_0 p + a_1) - c_{n-1} a_0 + \frac{a_{n+1}}{p}.$$

6.102. Найти

$$\mathrm{L}\cos \omega t.$$

6.103. Найти

$$\mathrm{L}f'(t), \quad \text{где} \quad f(t) = e^{-at}\cos t.$$

Решение. По теореме смещения

$$g(p) = \mathrm{L}f(t) = \frac{p+a}{(p+a)^2+1}, \quad \text{а} \quad f(+0) = 1.$$

Поэтому, по правилу дифференцирования оригинала, имеем

$$\mathrm{L}f'(t) = \frac{p(p+a)}{(p+a)^2+1} - 1.$$

Как легко видеть,

$$f'(t) = -e^{-at}(a\cos \omega t + \sin t),$$

поэтому

$$\mathrm{L}\left[-e^{-at}(a\cos t + \sin t)\right] = \frac{p(p+a)}{(p+a)^2+1} - 1.$$

6.104. Найти $\mathrm{L}f(t) = g(p)$, где $f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$.

Решение. По определению функции ошибок

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\, du,$$

поэтому

$$f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\, du.$$

Так как

$$\left(\int_0^{b(t)} \varphi(\tau)\, d\tau\right)' = \varphi(b(t))\, \frac{db}{dt},$$

то

$$f'(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^t \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

По правилу дифференцирования оригинала

$$\mathrm{L}f'(t) = pg(p) - f(+0),$$

поэтому, замечая, что $f(+0) = 0$,

$$\mathrm{L}\left[f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = pg(p),$$

или, учитывая линейность преобразования Лапласа,

$$g(p)+\mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}=pg(p).$$

На основании формулы задачи **6.25** имеем

$$\mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{L}t^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Поэтому

$$g(p)+\frac{1}{\sqrt{p}}=pg(p),$$

откуда

$$g(p)=\frac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)}.$$

6.105. Найти преобразование Лапласа многочлена Лагерра, определяемого равенством

$$L_n(t)=e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}).$$

Решение. Известно (см. **6.24**), что

$$\mathrm{L}t^n=\frac{n!}{p^{n+1}},$$

поэтому по теореме смещения

$$\mathrm{L}(t^ne^{-t})=\frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Если $f(t)=t^ne^{-t}$, то $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$; следовательно, по формуле изображения n-й производной оригинала

$$\mathrm{L}f^{(n)}(t)=\mathrm{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})\right]=\frac{n!\,p^n}{(p+1)^{n+1}}.$$

По теореме смещения

$$\mathrm{L}(L_n(t))=\mathrm{L}\left[e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})\right]=\frac{n!\,(p-1)^n}{p^{n+1}},$$

или

$$\mathrm{L}[L_n(t)]=\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n.$$

6.106. Найти $\mathrm{L}\sin\omega t$. **6.109.** Найти $\mathrm{L}f'(t)$, где $f(t)=e^{-at}\sin t$.
6.107. Найти $\mathrm{L}\operatorname{ch}\lambda t$. **6.110.** Найти $\mathrm{L}f'(t)$, где $f(t)=e^{-at}\operatorname{ch}\lambda t$.
6.108. Найти $\mathrm{L}\operatorname{sh}\lambda t$. **6.111.** Найти $\mathrm{L}f'(t)$, где $f(t)=e^{-at}\operatorname{sh}\lambda t$.

В задачах **6.112—6.117** найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях, считая функцию $x=x(t)$ удовлетворяющей условиям правила II (тогда $x(+0)=x(0)$, $x'(+0)=x'(0)$ и т. д.), полагая $\mathrm{L}x(t)=\bar{x}=\bar{x}(p)$ и применяя правило III.

6.112. $x''+3x'+2x+1$ при условии $x(0)=-1$, $x'(0)=-2$.

Решение. На основании правила III получаем

$$L(x''+3x'+2x+1)=(p^2+3p+2)\bar{x}+(p+3)+2+\frac{1}{p}=$$

$$=(p^2+3p+2)\bar{x}+p+5+\frac{1}{p}.$$

6.113. $x^{IV}+4x'''+2x''-3x'-5$ при условии $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=-3$, $x'''(0)=5$.

Решение. На основании правила III получаем:

$$L(x^{IV}+4x'''+2x''-3x'-5)=(p^4+4p^3+2p^2-3p)\bar{x}-$$

$$-(p^3+4p^2+2p-3)+(p^2+4p+2)+3(p+4)-20-\frac{5}{p}=$$

$$=(p^4+4p^3+2p^2-3p)\bar{x}-p^3-3p^2+5p-3-\frac{5}{p}.$$

6.114.

$x'''-2x'+x-1$ при условии $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

6.115.

$x''+5x'-7x+2$ при условии $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

6.116.

$x'''+6x''+x'-2x$ при условии $x(0)=-3$, $x'(0)=7$, $x''(0)=1$.

6.117.

$x^{IV}+3x'''+2x''-5x+8$ при условии $x(0)=0$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=2$, $x'''(0)=3$.

7. Дифференцирование изображения.

I. *Если*

$$Lf(t)=g(p),\ то$$
$$L[-tf(t)]=g'(p).$$

Таким образом, *изображение произведения оригинала на минус аргумент равно производной изображения.*

II. *Если*

$$Lf(t)=g(p),\ то$$
$$L[(-1)^n t^n f(t)]=g^{(n)}(p).$$

6.118. Найти

$$L(t\cos\omega t).$$

Решение. По правилу дифференцирования изображения получаем:

$$L(t\cos\omega t)=-[L\cos\omega t]'=-\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)'=$$

$$=-\frac{\omega^2-p^2}{(p^2+\omega^2)^2}=\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

6.119. Найти

$$L(t^n e^{qt}).$$

Решение. По правилу II находим

$$L(t^n e^{qt})=(-1)^n(Le^{qt})^{(n)}=(-1)^n\left(\frac{1}{p-q}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(p-q)^{n+1}}.$$

6.120. Найти

$$\mathrm{L}\ln t.$$

В задачах **6.121—6.127** найти изображения, применяя правило дифференцирования изображения.

6.121. $f(t)=t\sin\omega t$.
6.122. $f(t)=t^2\cos\omega t$.
6.123. $f(t)=t\,\mathrm{sh}\,\lambda t$.
6.124. $f(t)=t^2\,\mathrm{ch}\,\lambda t$.
6.125. $f(t)=t^3e^{2t}$.
6.126. $f(t)=(t^2-t+1)e^{3t}$.
6.127. $f(t)=t\,\mathrm{sh}\,t\sin t$.

8. Интегрирование изображения.

Если $\frac{f(t)}{t}$ *является оригиналом* (тогда $f(t)$ тоже оригинал) *и* $Lf(t)=g(p)$, *то*

$$\mathrm{L}\frac{f(t)}{t}=\int_p^\infty g(z)\,dz, \quad \text{где} \int_p^\infty = \lim_{\mathrm{Re}\,P\to\infty}\int_p^P.$$

В задачах **6.127—6.135** найти изображения соответствующих оригиналов.

6.128.

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}.$$

Решение. Функция $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом, так как она ограничена на всей числовой оси и ее показатель роста $s_0=0$. Изображение $\mathrm{L}\sin t=\frac{1}{p^2+1}$, следовательно, по правилу интегрирования изображения,

$$\mathrm{L}\frac{\sin t}{t}=\int_p^\infty \frac{dz}{z^2+1}=\operatorname{arctg} z\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.$$

6.129. $f(t)=\frac{e^t-1}{t}$.

Решение. Функция $f(t)=\frac{e^t-1}{t}$ является оригиналом. Так как $\mathrm{L}(e^t-1)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}$, то, по правилу интегрирования изображения,

$$\mathrm{L}\frac{e^t-1}{t}=\int_p^\infty\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz=\ln\frac{p}{p-1}.$$

6.130.

$$f(t)=\frac{\cos t-1}{t}.$$

Решение. Функция $f(t)=\frac{\cos t-1}{t}$ является оригиналом $\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=0\right)$ и $\mathrm{L}(\cos t-1)=\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p}$.

Поэтому, по правилу интегрирования изображения,

$$\mathrm{L}\frac{\cos t-1}{t}=\int\limits_p^\infty\left(\frac{z}{z^2+1}-\frac{1}{z}\right)dz=\ln\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}\Bigg|_p^\infty=\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

6.131. $f(t)=\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}$.

6.132. $f(t)=e^{-at}\frac{\sin t}{t}$.

6.133. $f(t)=\frac{\mathrm{sh}\,t}{t}$.

6.134. $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$.

6.135. $f(t)=e^{-t}\frac{1-\cos t}{t}$.

6.136. $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t^2}$.

9. Интегрирование оригинала. *Если $f(t)$ — оригинал, непрерывный на $(0, +\infty)$ и $Lf(t)=g(p)$, то*

$$\mathrm{L}\left[\int\limits_0^t f(u)\,du\right]=\frac{g(p)}{p}.$$

В задачах 6.137—6.143 найти изображения соответствующих интегралов.

6.137.

$$\int\limits_0^t(u-\cos u)\,du.$$

Решение. Так как

$$\mathrm{L}(t-\cos t)=\frac{1}{p^2}-\frac{p}{p^2+1},$$

то

$$\mathrm{L}\left(\frac{t^3}{2}-\sin t\right)=\mathrm{L}\int\limits_0^t(u-\cos u)\,du=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{p}{p^2+1}\right)=\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^3+1}.$$

6.138.

$$S(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du\quad\textit{(синус-интеграл Френеля)}.$$

Решение. В решении задачи **6.72** мы видели, что

$$\mathrm{L}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right).$$

Поэтому, в силу правила интегрирования оригинала,

$$LS(t)=L\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,p}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}-\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}\cdot\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{p\sqrt{p^2+1}}.$$

6.139.

$$\mathrm{Si}(t)=\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du\quad(\textit{интегральный синус}).$$

Решение. В решении **6.128** было показано, что функция $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом и что $L\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p$. Поэтому, по правилу интегрирования оригинала, интегральный синус имеет изображение

$$L\,\mathrm{Si}(t)=\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p\right).$$

6.140.

$$\int_0^t(\sin u+u^2)\,du.$$

6.141.

$$\int_0^t e^{-u}u^3\,du.$$

6.142.

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du\quad(\textit{косинус-интеграл Френеля}).$$

Указание. Использовать решение **6.80**.

6.143. $\mathrm{Ci}(t)=-\int_0^\infty\frac{\cos u}{u}\,du=\int_0^t\frac{\cos u-1}{u}\,du+\ln t+\gamma$ (*интегральный косинус*), где γ — *Эйлерова постоянная* (см. гл. IV, § 1, п. 1).

Указание. Учесть решения задач **6.129** и **6.130**.

6.144.

$\mathrm{Ei}(t)=\int_{-\infty}^t\frac{e^u}{u}\,du=\int_0^t\frac{e^u-1}{u}\,du+\ln t+\gamma$ (*интегральная показательная функция*), где γ — Эйлерова постоянная.

Указание. Учесть решения **6.120** и **6.129**.

6.145. Найти

$$\mathrm{L}\int_0^t \frac{f(u)}{u}\,du$$

при условии, что $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал и $\mathrm{L}f(t)=g(p)$.

Решение. Так как $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал, по правилу интегрирования изображения

$$\mathrm{L}\frac{f(t)}{t}=\int_p^\infty g(z)\,dz.$$

Применяя теперь к оригиналу $\frac{f(t)}{t}$ правило интегрирования, получим

$$\mathrm{L}\int_0^t \frac{f(u)}{u}\,du=\frac{1}{p}\int_p^\infty g(z)\,dz.$$

6.146.

$$\mathrm{L}\int_0^t \frac{\operatorname{ch} u-1}{u}\,du.$$

10. Свертка оригиналов. Умножение изображений и формула Дюамеля.

Сверткой оригиналов $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *называют функцию, обозначаемую* $f_1(t)*f_2(t)$ *и определяемую равенством*

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Теорема умножения изображений (*теорема Бореля*). *Произведение изображений является изображением свертки их оригиналов.*

Таким образом, если

$$\mathrm{L}f_1(t)=g_1(p),\quad \mathrm{L}f_2(t)=g_2(p),$$

то

$$\mathrm{L}\,[f_1(t)*f_2(t)]=L\left[\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right]=g_1(p)\,g_2(p).$$

Формула Дюамеля. *Если на* $[0,+\infty]$ *оригинал* $f_1(t)$ *непрерывен, а* $f_2(t)$ *непрерывно дифференцируем (т. е. имеет непрерывную производную), то имеет место формула Дюамеля:*

$$\mathrm{L}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right]=pg_1(p)\,g_2(p),$$

или

$$\mathrm{L}^{-1}\,[pg_1(p)\,g_2(p)]=\int_0^t f_1(\tau)\,f_2'(t-\tau)\,d\tau+f_1(t)\,f_2(0).$$

В задачах 6.147—6.150 найти свертки заданных оригиналов и изображения сверток.

6.147.

$$f_1(t)=t, \quad f_2(t)=\cos t.$$

Решение. По определению свертки

$$t*\cos t=\int_0^t (t-\tau)\cos\tau\,d\tau=\underbrace{(t-\tau)\sin\tau}_{=0}\Big|_0^t+$$

$$+\int_0^t \sin\tau\,d\tau=-\cos\tau\Big|_0^t=1-\cos t.$$

Изображения заданных оригиналов таковы:

$$Lt=\frac{1}{p^2}, \quad L\cos t=\frac{p}{p^2+1}.$$

Поэтому, на основании теоремы умножения изображений, получим

$$L(t*\cos t)=L(1-\cos t)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}.$$

6.148.

$$f_1(t)=\eta(t), \quad f_2(t)=\sin t.$$

Решение.

$$\eta(t)*\sin t=\int_0^t \eta(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=\int_0^t 1\cdot\sin\tau\,d\tau=-\cos\Big|_0^t=1-\cos t.$$

Здесь

$$L\eta(t)=\frac{1}{p}, \quad L\sin t=\frac{1}{p^2+1}.$$

Поэтому

$$L[\eta(t)*\sin t]=L(1-\cos t)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}.$$

6.149.

$$f_1(t)=t, \quad f_2(t)=e^t.$$

Решение.

$$t*e^t=\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau=(t-\tau)e^t\Big|_0^t+\int_0^t e^{\tau}\,d\tau=e^t-t-1.$$

Поэтому

$$L(t*e^t)=L(e^t-t-1)=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

6.150.

а) $f_1(t)=\cos t, \quad f_2(t)=\sin t.$
б) $f_1(t)=e^{2t}, \quad f_2(t)=\sin 3t.$
в) $f_1(t)=\cos t, \quad f_2(t)=\cos t.$
г) $f_1(t)=t, \quad f_2(t)=\sin t.$
д) $f_1(t)=e^t, \quad f_2(t)=e^{-t}.$

В задачах 6.151—6.153, применяя теорему умножений изображений, найти оригиналы по их изображениям.

6.151.

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)}.$$

6.152.

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Решение. Так как

$$L^{-1}\frac{1}{p^2+1}=\sin t,$$

то, по теореме умножения изображений,

$$L^{-1}\frac{1}{(p^2+1)^2}=L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right)=\sin t*\sin t=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(2\tau-t)-\cos t]\,d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\tau-t)}{2}-\cos t\cdot\tau\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

6.153.

а) $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$, г) $\dfrac{1}{p^2-1}$,

б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$, д) $\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$,

в) $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$, е) $\dfrac{1}{p^4(p-1)}$.

В задачах 6.154—6.158, применяя формулу Дюамеля, найти оригиналы по их изображениям.

6.154.

$$\frac{1}{(p-1)(p+1)}.$$

Решение. Так как

$$L^{-1}\frac{1}{p-1}=e^t,\quad L^{-1}\frac{1}{p+1}=e^{-t},\quad (e^t)'=e^t\ \text{и}\ e^t|_{t=0}=1,$$

то, по формуле Дюамеля,

$$L^{-1}\frac{p}{(p-1)(p+1)}=L^{-1}\left(p\cdot\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p+1}\right)=e^{-t}+\int_0^t e^{-\tau}e^{t-\tau}\,d\tau=$$

$$=e^t+e^t\int_0^t e^{-2\tau}\,d\tau=e^{-t}-e^{-t}\cdot\frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_0^t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\operatorname{ch}t.$$

6.155.

$$\frac{1}{(p^2+1)p^3}.$$

Решение. Очевидно,

$$\frac{1}{(p^2+1)p^3} = p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^4},$$

причем

$$L^{-1}\frac{1}{p^2+1} = \sin t = f_1(t), \quad L^{-1}\frac{1}{p^4} = \frac{t^3}{6} = f_2(t), \quad f_2'(t) = \frac{t^2}{2}, \quad f_2(0) = 0.$$

Поэтому по формуле Дюамеля

$$L^{-1}\frac{1}{(p^2+1)p^3} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\tau\,(t-\tau)^2\,d\tau = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

6.156.

$$\frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}.$$

6.157.

$$\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

6.158.

$$\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}.$$

§ 2. ОРИГИНАЛЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Теорема. *Если изображение $g(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, т. е.*

$$g(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — многочлены со степенью знаменателя большей степени числителя и знаменатель имеет корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то соответствующий оригинал

$$f(t) = L^{-1}g(p) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{p_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left[(p-p_k)^{r_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt}\right].$$

В случае же, когда все корни знаменателя простые, т. е. $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Замечание 1. При наличии у знаменателя пар мнимых сопряженных корней выражение оригинала упрощается. В этом случае каждой паре мнимых сопряженных корней $p = \alpha \pm i\beta$ соответствуют слагаемые $\operatorname{res}_{\alpha+i\beta} g(p)\, e^{pt}$

и $\operatorname{res}_{\alpha-i\beta} g(p)\, e^{pt}$, являющиеся также числами сопряженными, а потому их сумма равна удвоенной действительной части каждого из них, т. е.

$$\operatorname{res}_{\alpha+i\beta} g(p)\, e^{pt} + \operatorname{res}_{\alpha-i\beta} g(p)\, e^{pt} = 2\,\mathrm{Re} \operatorname{res}_{\alpha+i\beta} g(p)\, e^{pt}.$$

Замечание 2. Написанные выше формулы оригиналов дробно-рациональных изображений получаются применением теории вычетов (гл. III) из общей теоремы обращения: если $g(p)$ — изображение оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\, g(p)\, dp,$$

где $c > s_0$.

В задачах **6.159 — 6.179** восстановить оригиналы по их рациональным изображениям.

6.159.

$$g(p) = \frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Решение. Здесь корни знаменателя и их кратности таковы:

$$p_1 = 1, \qquad r_1 = 1;$$

$$p_2 = -1, \qquad r_2 = 2.$$

Поэтому по формуле обращения

$$f(t) = \operatorname{res}_{1} g(p)\, e^{pt} + \operatorname{res}_{-1} g(p)\, e^{pt}.$$

Далее,

$$\operatorname{res}_{1} g(p) = \lim_{p\to 1}\left[\frac{p^2+p+1}{(p+1)^2}\, e^{pt}\right] = \frac{3}{4} e^{t}, \qquad \operatorname{res}_{-1} g(p) =$$

$$= \lim_{p\to -1} \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2+p+1}{p-1}\, e^{pt}\right) = \lim_{p\to -1}\left[\frac{p^2-2p-2}{(p-1)^2}\, e^{pt} + \right.$$

$$\left. + \frac{p^2+p+1}{p-1}\, te^{pt}\right] = \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t}.$$

Поэтому

$$f(t) = \frac{3}{4} e^{t} + \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t}.$$

6.160.

$$g(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

Решение. $A(p)=p-1$, $B(p)=(p+1)(p^2+1)$.
Здесь

$$B'(p)=3p^2+2p+1.$$

Корни знаменателя

$$p_1=-1, \quad r_1=1;$$

$$p_{2,3}=\pm i, \quad r_{2,3}=1.$$

Так как все корни знаменателя простые, применяем соответствующую формулу. Составляем для удобства подсчета таблицу, в которую, однако, корень $p_3=-i$ не включаем (в этом нет надобности в силу замечания о сопряженности).

Таблица 3

p_k	$A(p)=p-1$	$B'(p)=3p^2+2p+1$	$\frac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}$
-1	-2	2	$-e^{-t}$
i	$-1+i$	$-2-2i$	$-ie^{it}$

Из таблицы следует, что

$$f(t)=\operatorname*{res}_{-1} g(p)e^{pt}+2\operatorname{Re}\operatorname*{res}_{i} g(p)e^{pt}=-e^{-t}+2\operatorname{Re}(-ie^{it})=$$

$$=-e^{-t}+2\operatorname{Re}(\sin t-i\cos t)=2\sin t-e^{-t}.$$

6.161.

$$g(p)=\frac{1}{(p+1)^3(p^2-2p+2)}=\frac{1}{(p+1)^3(p-1-i)(p-1+i)}.$$

6.162.

$$g(p)=\frac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}.$$

6.163.

$$g(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$$

6.164.

$$g(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)^3}.$$

6.165.

$$g(p)=\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}.$$

6.166.

$$g(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$$

6.167.

$$g(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p^3+1)}.$$

Восстановления оригинала по его рациональному изображению можно достичь и разлагая это изображение на простейшие дроби, что технически иногда удобнее.

6.168.

$$g(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}.$$

Решение. Разложение данного изображения на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-3}.$$

Отсюда

$$p+1=A(p+2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p+2).$$

Полагая в этом тождестве p последовательно равным каждому из полюсов $g(p)$, т. е $p=1$, $p=-2$, $p=3$, получим

$$A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{15},\ C=\frac{2}{5}.$$

Поэтому

$$g(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{2}{5}\frac{1}{p-3}=$$
$$=\mathrm{L}^{-1}\left(-\frac{1}{3}e^{t}+\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{3t}\right).$$

6.169.

$$g(p=\frac{1}{(p-2)^2(p^2+1)}.$$

Решение. Разложение данного изображения на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{1}{(p-2)^2(p^2+1)}=\frac{A}{(p-2)^2}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-i}+\frac{D}{p+i}.$$

Поэтому

$$1\equiv A(p^2+1)+B(p-2)(p^2+1)+$$
$$+C(p-2)^2(p+i)+D(p-2)^2(p-i).$$

Полагая в этом тождестве последовательно $p=2$, $p=i$, $p=-i$, находим

$$A=\frac{1}{5},\ C=\frac{1}{8},\ D=\frac{1}{8}.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при p^3, получаем

$$0=B+C+D=B+\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$g(p)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(p-2)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p-i}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+i}$$ и

$$f(t)=\frac{1}{5}te^{2t}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{8}(e^{it}+e^{-it})=\frac{1}{5}te^{2t}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\cos t.$$

6.170. $g(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$.

6.171. $g(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

6.172. $g(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

6.173. $g(p)=\dfrac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}$.

Иногда (в особенности при комплексных корнях знаменателя рационального изображения) удобно применять для восстановления оригинала теорему смещения.

6.174.

$$g(p)=\frac{1}{p^2+6p+10}.$$

Решение.

$$L^{-1}g(p)=L^{-1}\frac{1}{p^2+6p+10}=L^{-1}\frac{1}{(p+3)^2+1}=$$
$$=e^{-3t}L^{-1}\frac{1}{p^2+1}=e^{-3t}\sin t.$$

6.175.

$$g(p)=\frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+3}.$$

Решение

$$L^{-1}g(p)=L^{-1}\frac{p^2+2}{(p+1)(p^2+2p+3)}=$$
$$=L^{-1}\frac{(p+1)^2-2(p+1)+3}{(p+1)[(p+1)^2+2]}=e^{-t}L^{-1}\frac{p^2-2p+3}{p(p^2+2)}.$$

Разлагая последнее изображение на простейшие дроби, получим

$$\frac{p^2-2p+3}{p(p^2+2)}=\frac{A}{P}+\frac{Bp+C}{p^2+2}.$$

Отсюда

$$A=\frac{3}{2},\ B=\frac{1}{2},\ C=-2,$$

поэтому

$$L^{-1}g(p)=e^{-t}L^{-1}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+2}-2\frac{1}{p^2+2}\right)=$$
$$=e^{-t}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t\right).$$

6.176. $g(p)=\dfrac{1}{p^2+6p+10}$. **6.178.** $g(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+1}$.

6.177. $g(p)=\dfrac{1}{p^2-p+7}$. **6.179.** $g(p)=\dfrac{p+1}{p^3-1}$.

Для восстановления оригинала изображения, обладающего рациональной производной, удобно применять теорему об интегрировании изображения.

6.180. Найти

$$L^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Решение.

$$L^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=L^{-1}\int_p^\infty\frac{dz}{z(z+1)}=\frac{1}{t}L^{-1}\frac{1}{p(p+1)}=$$
$$=\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{t}(1-e^{-t}).$$

6.181. Найти

$$L^{-1} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

6.182. Найти

$$L^{-1} \ln \left(1 + \frac{1}{p^2}\right).$$

6.183. Найти

$$L^{-1} \ln \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИХ СИСТЕМЫ

I. Решение задачи Коши. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t), \quad a_0 \neq 0$$

состоит в отыскании решения $x = x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_0(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Эта задача может быть решена с помощью преобразования Лапласа в предположении, что $x^{(n)}(t)$ и $f(t)$ — оригиналы.

Введем обозначения

$$Lx(t) = \bar{x}(p) = \bar{x}, \quad Lf(t) = g(p).$$

Пользуясь этими обозначениями, по правилу III (§ 1, пункт 6) получим изображающее уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)\,\bar{x} - x_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) -$$

$$- x_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) - \ldots - x_{n-2}(a_0 p + a_1) - x_{n-1} a_0 = g(p),$$

откуда

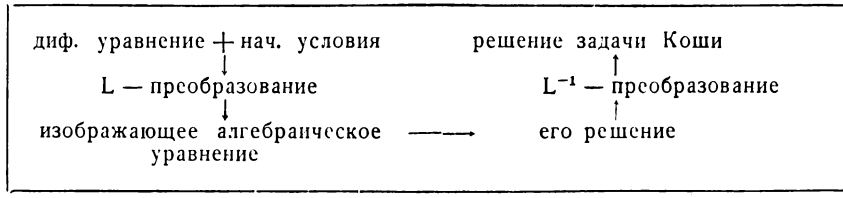
$$\bar{x} = \frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} [x_0 (a_0 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}) + x_1 (a_0 p^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-2}) + \ldots + x_{n-1} a_0 + g(p)].$$

Для решения задачи Коши остается перейти к оригиналу

$$x(t) = L^{-1}\bar{x}.$$

Таким образом, решение задачи Коши осуществляется по следующей схеме:



В задачах **6.184 — 6.196** найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

6.184.

$$x'' + 4x = \sin 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Р е ш е н и е. Полагая

$$Lx = \bar{x},$$

получим

$$Lx' = p\bar{x}, \quad Lx'' = p^2\bar{x} - 1.$$

Далее

$$L \sin 2t = \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Поэтому изображающее уравнение будет иметь вид

$$p^2\bar{x} + 4\bar{x} = \frac{2}{p^2 + 4} + 1.$$

Его решение

$$\bar{x} = \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{2}{(p^2 + 4)^2} = \frac{p^2 + 6}{(p^2 + 4)^2}.$$

Отсюда

$$x = L^{-1}\bar{x} = 2 \operatorname{Re} \operatorname*{res}_{2i} \frac{p^2 + 6}{(p^2 + 4)^2} e^{pt} = 2 \operatorname{Re} \lim_{p \to 2i} \frac{d}{dp} \frac{p^2 + 6}{(p + 2i)^2} e^{pt} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \lim_{p \to 2i} \left\{ \left[\frac{2p}{(p + 2i)^2} - \frac{2(p^2 + 6)}{(p + 2i)^3} \right] e^{pt} + \frac{p^2 + 6}{(p + 2i)^2} te^{pt} te^{pt} \right\} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(-\frac{5}{16} ie^{2it} - \frac{1}{8} te^{2it} \right) = \frac{5}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t.$$

6.185.

$$x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

6.186.

$$x^{IV} + x''' = e^t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

6.187.

$$x'' + 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

6.188.

$$x'' + x' = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = -2.$$

6.189.

$$x'' + 4x = 8 \sin 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6.190.

$$x'' + 9x' = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

6.191.

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^t \cos \frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

6.192.

$$x'' - 2x' - 3x = 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

6.193.

$$x'' + 4x = 4e^{2t} + 4t^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

6.194.

$$x''' + 3x'' - 4x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2.$$

6.195.

$$x''' + 2x'' - x' - 2x = 1, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 4.$$

6.196.

$$x^{IV} + x''' - 2x'' = 20t \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x'''(0) = 0, \quad x''(0) = -1.$$

В задачах **6.197 — 6.198** найти общие решения дифференциальных уравнений (для чего следует начальные условия задавать в виде $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$ и т. д.).

6.197.

$$x''' - 3x' + 2x = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}.$$

6.198.

$$x^{IV} + y''' = \cos t.$$

2. Применение формулы Дюамеля. Задача Коши для линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t), \quad a_0 \neq 0$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

сводится с помощью формулы Дюамеля к решению той же задачи для вспомогательного уравнения с правой частью, равной единице.

По формуле предыдущего пункта

$$\bar{x} = \frac{g(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

В частном случае, когда $f(t) = 1$ и $g(p) = \frac{1}{p}$ (обозначая решение задачи Коши для этого случая $y = y(t)$), имеем:

$$\bar{y} = \frac{1}{p(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)}, \text{ или } p\bar{y} = \frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

что дает возможность записать $\bar{x}$ в виде

$$\bar{x} = pg(p)\bar{y}(p).$$

Отсюда, по формуле Дюамеля (§ 1, п. 10), учитывая значение $y(0) = 0$, получим

$$x(t) = L^{-1}\bar{x} = L^{-1}[pg(p)\bar{y}(p)] = \int_0^t f(\tau) y'(t - \tau)\, d\tau.$$

В задачах **6.199 — 6.206** найти решения задачи Коши при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

6.199.

$$x'' - 5x' + 6x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Для вспомогательного уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{p(p^2 - 5p + 6)} = \frac{1}{6p} - \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{3(p-3)}.$$

Поэтому

$$y = L^{-1}\bar{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}, \text{ а } y' = e^{3t} - e^{2t}.$$

По формуле этого пункта

$$x = \int_0^t f(\tau)\, y'(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \sin\tau\, [e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)}]\, d\tau =$$

$$= e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau}\sin\tau\, d\tau - e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}\sin\tau\, d\tau = \frac{1}{10}(e^{3t} - 2e^{2t} + \sin t + \cos t).$$

6.200.

$$x' + 2x = \sin 3t, \quad x(0) = 0.$$

6.201.

$$x'' - 3x' + 2x = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6.202.

$$x'' + x = e^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6.203.

$$x'' - 2x' + x = \operatorname{sh} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6.204.

$$x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6.205.

$$x'' = e^{-t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

6.206.

$$x''' - x' = 2e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

3. Решение задачи Коши для системы линейных уравнений. Задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k = f_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k = f_n(t) \end{cases}$$

при начальных условиях $x_k(0) = x_{k_0}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ также может быть решена с помощью преобразования Лапласа в предположении, что производные $\frac{dx_k}{dt}$ и функции $f_k(t)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются оригиналами (тогда и функции $x_k(t)$ — оригиналы).

Введем обозначения $Lf_k(t) = g_k(p)$; тогда изображающая система уравнений может быть записана так:

$$pLx_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{1k} Lx_k = g_1(p) + x_{10},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$pLx_n + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} Lx_k = g_n(p) + x_{n0}.$$

Решая эту линейную систему алгебраических (относительно Lx_k) уравнений, найдем $Lx_k = \bar{x}_k(p)$. Тогда совокупность соответствующих оригиналов $x_k(t) = L^{-1}\bar{x}_k(p)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ дает искомое решение задачи Коши.

Замечание. Задача Коши для систем уравнений порядка выше первого решается аналогично. Кроме того, такую систему всегда можно заменить эквивалентной ей системой уравнений первого порядка, вводя новую систему искомых функций.

В задачах **6.207 — 6.221** решить задачу Коши для соответствующих систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

6.207.

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$$

6.208.

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, \\ y' = 2x - y - 2\cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Решение. Полагая $Lx = \bar{x}$ и $Ly = \bar{y}$, учитывая начальные условия и привлекая известные изображения синуса и косинуса, придем к операторной системе:

$$(p-4)\bar{x} + 3\bar{y} = \frac{1}{p^2+1},$$

$$-2\bar{x} + (p+1)\bar{y} = -\frac{2p}{p^2+1}.$$

Для этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-4 & 3 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix} = (p-1)(p-2), \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2+1} & 3 \\ -\frac{2p}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix} = \frac{7p+1}{p^2+1},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-4 & \frac{1}{p^2+1} \\ -2 & -\frac{2p}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{-2p^2+8p+2}{p^2+1}.$$

Поэтому

$$\bar{x}=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{7p+1}{(p-1)(p-2)(p^2+1)}=\frac{A(p)}{B(p)},\qquad B'(p)=4p^3\quad 9p^2+6p-3,$$

$$\bar{y}=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-2p^2+8p+2}{(p-1)(p-2)(p^2+1)}.$$

Отсюда

$$x=\mathrm{L}^{-1}\bar{x}=\frac{A(1)}{B'(1)}e^t+\frac{A(2)}{B'(2)}e^{2t}+2\mathrm{Re}\,\frac{A(i)}{B'(i)}e^{it}=$$

$$=-4e^t+3e^{2t}+\cos t-2\sin t,$$

$$y=\mathrm{L}^{-1}\bar{y}=-4e^t+2e^t+2\cos t-2\sin t.$$

6.209. $\begin{cases} x''+3y''-x=0, \\ x'+3y'-2y=0, \end{cases}$ $x(0)=x'(0)=y(0)=0,\ y'(0)=-\frac{2}{3}$.

Решение. Полагая $\mathrm{L}x=\bar{x}$ и $\mathrm{L}y=\bar{y}$, в силу начальных условий получим

$$\mathrm{L}x'=p\bar{x},\quad \mathrm{L}x''=p^2\bar{x},$$

$$\mathrm{L}y'=p\bar{y},\quad \mathrm{L}y''=p^2\bar{y}+\frac{2}{3}.$$

Изображающая система будет иметь вид

$$\begin{cases} (p^2-1)\,\bar{x}+3p^2\bar{y}=-\frac{2}{3}, \\ p\bar{x}+(3p-2)\,\bar{y}=0 \end{cases}$$

Решение этой системы таково:

$$\bar{x}=\frac{3p-2}{(p+2)\left(p-\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p-\frac{1}{2}},$$

$$\bar{y}=\frac{2p}{(p+2)\left(p-\frac{1}{2}\right)}=\frac{A_1}{p+2}+\frac{B_1}{p-\frac{1}{2}}.$$

Определение коэффициентов дает

$$A=\frac{16}{5},\quad B=-\frac{1}{5},$$

$$A_1=\frac{8}{5},\quad B_1=\frac{2}{5}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \bar{x}=\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-\frac{1}{2}}, \\ \bar{y}=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Обратное преобразование Лапласа приводит к искомому решению задачи Коши для заданной системы:

$$\begin{cases} x = \mathrm{L}^{-1}\bar{x} = \frac{16}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}, \\ y = \mathrm{L}^{-1}\bar{y} = \frac{8}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{\frac{t}{2}}. \end{cases}$$

6.210.

$$\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

6.211.

$$\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 15.$$

6.212.

$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$$

6.213.

$$\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

6.214.

$$\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^{t}, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

6.215.

$$\begin{cases} x'' + y' + x = e^{t}, & x(0) = 1, & x'(0) = 0, \\ x' + y'' = 1, & y(0) = -1, & y'(0) = 2. \end{cases}$$

6.216.

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^{t}, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

6.217.

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0.$$

6.218.

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - 2x, \\ z' = 2x - y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0.$$

6.219.

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 47, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{cases} \quad x(0) = 1, \; y(0) = 2, \; z(0) = -1.$$

6.220.

$$\begin{cases} x'' + 2y = 0, \\ y'' - 2x = 0, \end{cases} \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; z(0) = z'(0) = 0.$$

6.221.

$$\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \; y'(0) = 0.$$

ГЛАВА VII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Под *случайным событием* в теории вероятностей понимается всякий факт, который может произойти или не произойти при данном комплексе условий в результате определенного опыта или испытания. Случайные события будут обозначаться буквами A, B, C, D и т. д. Например, A — появление герба при бросании монеты (здесь опыт заключается в подбрасывании монеты); B — попадание в мишень при выстреле (опыт состоит в стрельбе по мишени); C — на сборку поступила нестандартная деталь (опыт — поступление деталей на сборку).

Совокупность всех случайных событий, которые возможны при данном комплексе условий (при данном опыте), называется *полем событий* S. В S включаются также *достоверное событие* I, которое неизбежно наступает при данных условиях, и *невозможное событие* O, которое при этих условиях произойти не может. Например, при бросании игрального кубика I — выпадание хотя бы одного очка, O — выпадание семи и большего числа очков.

В поле событий S определяются действия сложения, умножения событий и взятие противоположного события.

Суммой $A+B$ (или $A \cap B$) двух событий A, B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них, т. е. или A или B, или обоих вместе. *Произведением* AB (или $A \cap B$) двух событий A, B называется событие, состоящее в совместном появлении и события A, и события B. Сумма и произведение большего числа событий определяется аналогично. *Противоположным* к A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что A не произошло.

Сложение и умножение событий обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$; $AB=BA$.
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$; $(AB)C=A(BC)$.
3) $A(B+C)=AB+AC$; $A+BC=(A+B)(A+C)$.
4) $A+O=A$; $AI=A$.
5) $A+\overline{A}=I$; $A\overline{A}=O$.

Таким образом, в алгебре событий выполняются все обычные свойства сложения и умножения, причем роль нуля играет невозможное событие O, а роль единицы — достоверное событие I. Интересно отметить, что распределительный закон 3) справедлив не только относительно умножения (как для чисел), но и относительно сложения (что в случае чисел не выполняется). Вообще в алгебре событий сложение и умножение равноправны, т. е. всякое алгебраическое соотношение между событиями сохраняется, если в нем

всюду знак суммы заменить на знак произведения и, наоборот, но при этом, разумеется, надо O заменить на I, а I на O.

События A и B из поля S называются *несовместными*, если $AB=O$, т. е. невозможно их одновременное появление.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если $A_1+A_2+\ldots+A_n=I$, т. е. при осуществлении данного комплекса условий хотя бы одно из событий обязательно осуществится. Наиболее часто рассматривают полную группу несовместных событий, которая определяется равенствами:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = I,\ A_iA_j = O,\ (i \neq j).$$

7.1. Доказать равенства

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \text{ и } \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$$

Решение. Сумма $A+B$ означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B. Поэтому противоположное событие $\overline{A+B}$ равносильно тому, что ни событие A, ни событие B не появились, но то же самое означает и произведение $\overline{A}\,\overline{B}$. Тем самым первое равенство установлено. Второе получается аналогичным рассуждением либо просто взаимной заменой суммы и произведения по принципу их равноправности.

7.2. Показать, что

$$A+A=A \text{ и } AA=A.$$

Решение. Эти равенства очевидны, так как появление хотя бы одного из двух одинаковых событий и их совмещение равносильны появлению этого же события.

7.3. Шарик бросают на стол и отмечают точку его падения. Пусть A обозначает событие, заключающееся в попадании шарика внутрь круга A, а B — попадание внутрь круга B (рис. 130). Какой смысл имеют события:

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $A+B$, $\overline{A+B}$, $\bar{A}\,\bar{B}$, $\overline{AB}$?

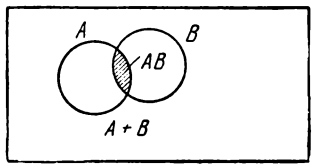


Рис. 130

Решение. Если A — попадание шарика внутрь круга A, то противоположное событие $\bar{A}$ означает, что шарик попал в область, лежащую вне круга A. Аналогично, $\bar{B}$ — попадание шарика в область, лежащую вне круга B. Событие $A+B$ означает, что шарик попал в область, в которую входят все точки кругов A и B, т.е. в их объединение. Событие $\overline{A+B}$ — противоположное к $A+B$, следовательно, шарик попал в область вне обоих кругов A и B, AB — попадание шарика в общую часть кругов A и B. Соответственно, $\overline{AB}$ — шарик попал в область, лежащую вне общей части кругов A и B.

7.4. Доказать, что

$$(A+B)(A+\bar{B})+(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})=I.$$

Решение. Раскрывая скобки в левой части и используя результат задачи 8.2 и свойства алгебры событий 4, 5, получим:

$$(A+B)(A+\bar{B})+(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})=A+A\bar{B}+AB+B\bar{B}+\bar{A}+$$

$$+\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+B\bar{B}=A+A\underbrace{(\bar{B}+B)}_{I}+O+\bar{A}+\bar{A}\underbrace{(\bar{B}+B)}_{I}+$$

$$+O=A+A+\bar{A}+\bar{A}=A+\bar{A}=I.$$

7.5. Пусть события A_1 и A_2 означают попадание в мишень соответственно при первом и втором выстрелах; тогда события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ — промахи при соответствующих выстрелах. Выразить через A_1, A_2, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ следующие события:

а) B — ровно одно попадание в мишень при двух выстрелах,

б) C — два попадания в мишень при двух выстрелах,

в) D — хотя бы одно попадание в мишень при двух выстрелах,

г) E — ни одного попадания в мишень при двух выстрелах.

Решение. а) Событие B может произойти в случае попадания в мишень при первом выстреле (событие A_1) и промаха при втором выстреле (событие $\bar{A}_2$) или — промаха при первом выстреле (событие $\bar{A}_1$) и попадания при втором (событие A_2), т. е. в случае совмещения событий (A_1 и $\bar{A}_2$) или (A_2 и $\bar{A}_1$). На языке алгебры событий это означает, что $B=A_1\bar{A}_2+\bar{A}_2A_1$. б) Событие C имеет место в случае попадания в мишень при первом и втором выстрелах (совмещение событий A_1 и A_2), т. е. $C=A_1A_2$; в) событие D означает, что имеет место либо одно попадание в мишень (событие B), либо два (событие C). Таким образом, $D=B+C=A_1\bar{A}_2+\bar{A}_2A_1+A_1A_2$; г) событие E означает совмещение промахов при первом и втором выстрелах, т. е. $E=\bar{A}_1\bar{A}_2$.

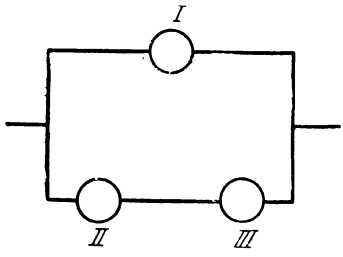


Рис. 131

7.6. Участок электрической цепи имеет вид, изображенный на рис. 131. Разрыв цепи (событие A) может произойти вследствие выхода из строя элементов I, II, III (соответственно, событий A_1, A_2, A_3). Выразить событие A через A_1, A_2, A_3.

Решение. Здесь событие A может произойти в одном из трех случаев: $A_1A_2A_3$ — выход из строя всех элементов I, II, III одновременно; $A_1A_2\bar{A}_3$ — выход из строя только I и II; $A_1\bar{A}_2A_3$ — выход из строя только I и III. Таким образом, $A=A_1A_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3$. Можно рассуждать и по другому: разрыв цепи произойдет либо при одновременном выходе I и II элементов

(событие A_1A_2), либо, если элемент II работает, при выходе из строя I и III элементов (событие $\bar{A}_2A_1A_3$). Значит,

$$A = A_1A_2 + A_1A_2A_3 = A_1(A_2 + \bar{A}_2A_3).$$

Это второе выражение для A можно получить из первого и чисто алгебраически:

$$A = A_1A_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 = A_1A_2(A_3 + \bar{A}_3) + \\ + A_1\bar{A}_2A_3 = A_1A_2I + A_1\bar{A}_2A_3 = A_1A_2 + A_1A_2A_3.$$

7.7. Даны два события A и B из поля S. Доказать, что $A_1 = A$, $A_2 = A \cdot B$, $A_3 = \overline{A + B}$ образуют полную группу несовместных событий.

Решение. Согласно задаче **7.2**

$$A_3 = \overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}.$$

Поэтому

$$A_1A_2 = AAB = OB = O, \quad A_1A_3 = A\bar{A}\bar{B} = O\bar{B} = O,$$

$$A_2A_3 = \bar{A}B\bar{A}\bar{B} = AB\bar{B} = \bar{A}O = O,$$

это значит, что события A_1, A_2, A_3 несовместны. Кроме того,

$$A_1 + A_2 + A_3 = A + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = A + A(B + \bar{B}) = \\ = A + \bar{A}I = A + \bar{A} = I,$$

т. е. данные события образуют полную группу.

7.8. Доказать, что для любых событий A и B из S имеют место равенства

$$A(A + B) = A, \quad A + AB = A.$$

С помощью этих равенств упростить выкладки задачи **7.4.**

7.9. Доказать, что

а) $(A + B)(A + \bar{B})(\bar{A} + B) = AB$;

б) $(A + B)(A + \bar{B})(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B}) = O$;

в) $(A + \bar{B})(A + \bar{B}) + \bar{A} = I$;

г) $(A + \bar{B})(\bar{A} + B) = AB + \bar{A}\bar{B}$.

7.10. С помощью геометрической интерпретации алгебры событий (задача **7.3**) истолковать свойства 1—5 этой алгебры.

7.11. Опыт заключается в вытаскивании карточек с цифрами от 1 до 10, беспорядочно разложенных на столе. Событие A — появление карточки с цифрой 5, событие B — карточки с цифрой 10, событие C — карточки с четной цифрой и, событие D — карточки с цифрой, кратной 5. Доказать, что $AC = B$, $A + B = D$.

7.12. Пусть A_1, A_2, A_3 — попадание в мишень соответственно первым, вторым и третьим стрелком при одном выстреле. События $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ — промахи этих стрелков. Найти выражение для со-

бытий: а) A — ни одного попадания в мишень; б) B — только одно попадание; в) C — только два попадания; г) D — три попадания; д) E — хотя бы одно попадание; е) F — хотя бы два попадания в результате этих трех выстрелов.

7.13. Решить задачу **7.6** для участков электрической цепи, изображенных на рис. 132 и 133.

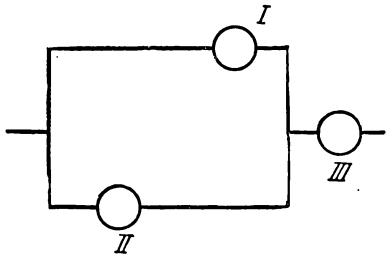


Рис. 132

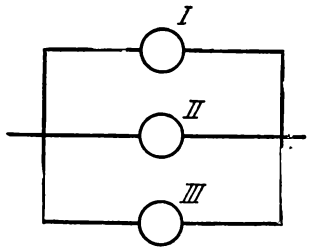


Рис. 133

7.14. Выделить полную группу несовместных событий в опыте с выбрасыванием одного игрального кубика. Выразить через события этой группы события A — выпадение четного числа очков, B — выпадение числа очков, кратного 3.

§ 2. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Классическое определение вероятности. В теории вероятностей с каждым событием A из поля S связывается определенное число $p(A)$ — *вероятность события* A, отражающее степень объективной возможности этого события. Наиболее просто вероятности определяются в классической схеме, когда в S можно выделить полную группу несовместных и равновозможных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Равновозможность означает, что ни одно из событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не имеет объективного преимущества в своем появлении перед другими. (Например, из симметрии игрального кубика вытекает равновозможность появления любого числа очков 1, 2, 3, 4, 5, 6.) Указанные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются элементарными событиями или элементарными исходами опыта.

Классическое определение вероятности. Пусть событие A происходит при осуществлении каких-то m элементарных исходов из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Иными словами, *вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих исходов опыта к числу всех его исходов.* Отсюда, в частности, следует, что вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю и для всех остальных событий A $0 < p(A) < 1$.

7.15. В урне содержится 5 белых, 10 красных и 6 черных шаров, различающихся только цветом. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность появления белого шара?

Решение. Здесь элементарным исходом является извлечение из урны любого шара. Число всех таких исходов равно числу шаров в урне, т.е. 21. Интересующее нас событие A состоит в том, что из урны вынут белый шар. Очевидно, что число m событий, благоприятствующих появлению события A, равно числу белых шаров в урне, т.е. 5. Таким образом:

$$p(A)=\frac{5}{21}.$$

7.16. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Все кубики перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь три окрашенные грани.

Решение. Всего кубиков $n=125$. Извлечение каждого такого кубика является элементарным исходом в данном опыте. Ожидаемому событию A — извлечению кубика с тремя окрашенными гранями — благоприятствует $m=8$ исходов (три окрашенные грани имеет только тот кубик, одна из вершин которого совпадает с вершиной куба).

Отсюда

$$p(A)=\frac{8}{125}=0{,}032.$$

7.17. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков окажется равной 7?

Решение. Игральный кубик может упасть шестью различными способами. Каждый из них комбинируется с шестью способами падения второго кубика. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно $6\cdot 6=36$. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A (сумма очков равна 7). Семь очков получится, если на первом и втором кубиках будет соответственно: 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 5 и 2, 6 и 1 очков, т. е. имеется всего 6 исходов, благоприятствующих событию A. Следовательно, искомая вероятность равна

$$p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

7.18. Слово «керамит» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются и из них извлекаются по очереди четыре карточки. Какова вероятность, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «река»?

Решение. Элементарным исходом является извлечение четырех карточек из семи. По четыре карточки из семи можно извлечь A_7^4 способами. Ожидаемому событию A (выпадение требуемого слова) соответствует только один исход.

Таким образом,

$$p(A)=\frac{1}{A_7^4}=\frac{1}{840}.$$

7.19. *(Задача о выборке.)* В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки шести деталей две окажутся нестандартными.

Решение. Элементарным исходом является выборка любых шести изделий из пятидесяти. Число n всех таких исходов, очевидно, равно числу сочетаний из пятидесяти по шесть, т.е. C_{50}^{6}. Нас интересует событие A, состоящее в том, что две из шести деталей нестандартные. Благоприятным исходом для A являются любые шесть деталей, из которых две нестандартные и четыре — стандартные. Такого рода групп по шесть деталей имеется $C_5^2 \cdot C_{45}^4$ (так как C_5^2 — число всевозможных пар нестандартных деталей, а C_{45}^4 — число всевозможных четверток стандартных деталей и каждая пара нестандартных деталей может оказаться в одной группе с каждой четверкой стандартных деталей).

Таким образом,

$$p(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{45}^4}{C_{50}^6} \approx 0{,}08.$$

7.20. r элементарных частиц регистрируется R счетчиками, причем каждая из частиц может с одинаковой вероятностью попасть в любой из счетчиков. Найти вероятность того, что: а) в определеннных r счетчиках окажется по одной частице; б) в каких-то r счетчиках окажется по одной частице.

Решение. Здесь элементарным исходом является размещение r частиц по R счетчикам. Так как каждая частица имеет R различных возможностей (частица может попасть в 1-й счетчик, или во 2-й, или в R-й, то число n всех исходов, т.е. число всех возможных размещений частиц по счетчикам, равно R^r.

В случае а) интересующее нас событие A состоит в том, что в определенных r счетчиках окажется по одной частице. Благоприятным исходом для A является размещение частиц по определенным счетчикам в определенном порядке. Таким образом, число m благоприятствующих размещений равно $r!$.

Отсюда

$$p(A) = \frac{r!}{R^r}.$$

В случае б) событие A состоит в том, что в любых r счетчиках окажется по одной частице. Благоприятным исходом для A в этом случае является размещение частиц по любой группе из r счетчиков. Так как таких групп будет C_R^r и в каждой группе возможно размещение r частиц $r!$ способами, то число m благоприятных исходов равно $C_R^r \cdot r!$

Отсюда

$$p(A) = \frac{C_R^r \cdot r!}{R^r}.$$

7.21. Делопроизводитель забыл последнюю цифру трехзначного номера нужного ему дела. Какова вероятность того, что наудачу взятая цифра (от 0 до 9) окажется последней цифрой нужного номера?

7.22. На стол бросается кубик, две грани которого окрашены. Какова вероятность того, что кубик упадет на стол окрашенной гранью?

7.23. На шести одинаковых карточках написаны числа: 2, 4, 7, 8, 12, 14. Наугад берутся две карточки. Какова вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима?

7.24. Из тридцати карточек с буквами русского алфавита наугад выбираются 4 карточки. Какова вероятность, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «небо»?

7.25. Десять книг на полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенных книги окажутся вместе?

7.26. В урне N неразличимых наощупь шаров одинакового размера и веса, из них M — белых, остальные черные. Шары тщательно перемешаны. Из урны вынимается n шаров. Какова вероятность того, что из этих n шаров будет m белых?

Указание. Решается аналогично задаче **7.19.**

7.27. Из 15 билетов выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу шести билетов будет два выигрышных?

7.28. В автобусе 5 пассажиров. Найти вероятность того, что на каждой из оставшихся 5 остановок будет сходить по одному человеку (предполагается, что каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любой из остановок).

7.29. Из последовательности целых чисел от 1 до 10 наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше 6, а другое больше 6?

2. Геометрическое определение вероятности. Если результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причем любые положения точек в этой области равновозможны, то при этом используется *геометрическое определение вероятности.* А именно, вероятность события равна

$$P=\frac{S_0}{S},$$

где S — размер (т. е. длина, площадь или объем) всей области, S_0 — размер той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

7.30. В квадрат вписан круг. Какова вероятность, что точка, брошенная наудачу в квадрат, окажется внутри круга?

Решение. Площадь квадрата $S=4r^2$, площадь круга $S_0=\pi r^2$ (рис. 134).

Отсюда

$$P=\frac{\pi}{4}.$$

7.31. В течение промежутка времени от 11 *ч* до 11 *ч* 30 *мин* должен последовать телефонный звонок. Какова вероятность, что звонок последует в последние 10 минут указанного промежутка времени (момент звонка случаен)?

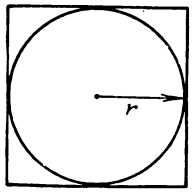


Рис. 134

Решение. Воспользуемся для решения этой задачи геометрической схемой. Промежуток времени от 11 *ч* до 11 *ч* 30 *мин* представим в виде отрезка AB длины 30 единиц; промежуток от 11 *ч* 20 *мин* до 11 *ч* 30 *мин* — отрезка CB длины 10 единиц, принадлежащего отрезку AB. Случайный звонок в некоторый момент времени t изображается попаданием случайно брошенной точки в точку t отрезка AB. Тогда вероятность того, что звонок произойдет в промежуток времени от 11 *ч* 30 *мин* до 11 *ч* 30 *мин* в геометрической схеме означает вероятность того, что случайно брошенная точка в отрезок AB попадет на отрезок CB. Эта вероятность, очевидно, равна

$$P=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

7.32. Производится выстрел в быстро вращающийся диск, разделенный на 20 равных секторов, попеременно окрашенных в черный и белый цвета. Какова вероятность, что пуля попадет в один из черных секторов?

Решение. Воспользуемся геометрическим определением вероятности. Область, занятая черными секторами, имеет площадь $\frac{1}{2}\pi R^2$, площадь же всего диска равна πR^2. Следовательно, искомая вероятность есть $P=\frac{1}{2}$.

7.33. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода — один час, а второго — два часа.

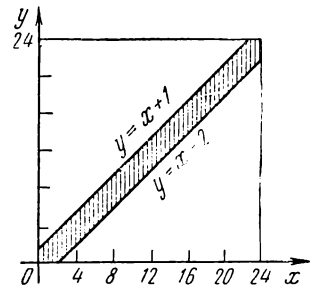


Рис. 135

Решение. Применим геометрическую схему. Рассмотрим декартову ортогональную систему координат (xOy), в которой x и y будем отсчитывать в часах от 0 до 24 (рис. 135). Пусть x — час прихода первого парохода, y — час прихода второго парохода. Тогда все возможные комбинации прихода пароходов к пристани изобразятся точками квадрата, для которого $0 \leqslant x \leqslant 24$. Очевидно,

что положения точек (x, y) в области этого квадрата равновозможны.

Выясним, какие точки (x, y) благоприятствуют интересующему нас событию A (один из пароходов ожидает освобождения причала). Событие A может состояться лишь в том случае, если момент y прихода второго парохода не более, чем на два часа раньше момента x прихода первого парохода и не более, чем на один час позже прихода первого парохода:

$$x-2\leqslant y\leqslant x+1. \qquad (*)$$

Таким образом, область квадрата, благоприятствующая событию A (на рис. 135 она заштрихована), состоит из точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам $(*)$, т. е. из точек, лежащих между прямыми $y=x-2$ и $y=x+1$. Площадь квадрата равна $S=24^2=576$. Площадь заштрихованной области равна $S_0=576-\frac{1}{2}\cdot 23^2=69{,}5$.

Отсюда

$$P(A)=\frac{69{,}5}{576}\approx 0{,}121.$$

7.34. Стержень длины a наудачу разломан на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

Решение. Пусть длина первой части отрезка x, второй — y. Тогда длина третьей части равна $a-(x+y)$. Рассматривая пары (x, y), как координаты точек декартовой ортогональной системы координат, получим, что возможным значением x и y соответствуют те точки плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам: $x>0$, $y>0$, $a-(x+y)>0$ — это будет область, ограниченная треугольником OAB (рис. 136). Но интересующему нас событию благоприятствуют только те точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам: $x+y>a-(x+y)$— сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей его стороны, т. е. $x+y>\frac{a}{2}$ и $x<\frac{a}{2}$, $y<\frac{a}{2}$. Таким образом, благоприятствуют событию точки части плоскости, ограниченной треугольником CKD.

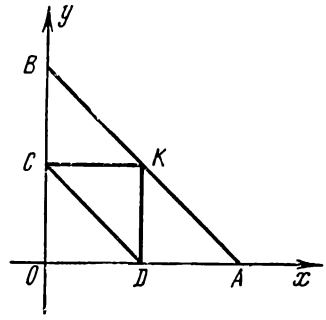


Рис. 136

Площадь треугольника OAB $S=\frac{1}{2}a^2$. Площадь треугольника CKD $S_0=\frac{1}{8}a^2$.

Отсюда

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

7.35. Предполагая, что все значения $|p| \leqslant 1$, $|q| \leqslant 1$ равновероятны и единственно возможны, определить вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ действительны.

Решение. Рассматривая пары значений (p, q), как координаты точек плоскости, получим, что всевозможным значениям p, q удовлетворяют точки плоскости, лежащие внутри квадрата $ABCD$ (рис. 137). Интересующему нас событию благоприятствуют только те точки, координаты (p, q) которых удовлетворяют условию $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$ (условие того, что корни приведенного квадратного уравнения — действительные числа), т. е. точки, лежащие внутри фигуры $AKOPD$. Площадь S квадрата равна 4. Площадь S_0 фигуры $AKOPD$

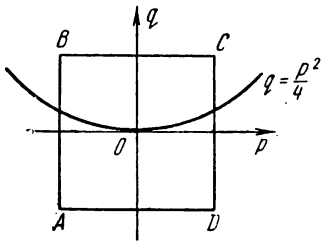


Рис. 137

$$S_0 = 2 + \int_{-1}^{1} \frac{p^2}{4}\, dp = \frac{13}{6}.$$

Отсюда

$$P = \frac{S_0}{S} = \frac{13}{24}.$$

7.36. Внутри круга радиусом $r = 20$ *см* начерчены две непересекающиеся окружности — одна радиусом $r_1 = 6$ *см* и вторая $r_2 = 8$ *см*. Какова вероятность того, что выбранная наудачу внутри большого круга точка окажется внутри одной из малых окружностей?

7.37. В некоторой точке C телефонной линии AB длины L произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее l?

7.38. На отрезке AB длины a поставлены наудачу две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется ближе к точке A, чем точка N?

7.39. В любые моменты времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух сигналов. Приемник будет забит, если разность по времени между сигналами будет меньше τ. Какова вероятность того, что приемник будет забит?

7.40. Между 12 и 13 часами дня должен произойти в случайный момент звонок квартирного телефона, причем вызывающий ждет 10 *мин*. В течение того же часа хозяин квартиры заходит домой в случайный момент и остается дома в течение 30 *мин*. Определить вероятность того, что разговор состоится.

Указание. Решается аналогично задаче **7.33.**

§ 3. АЛГЕБРА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Наиболее общим определением понятия вероятности является *аксиоматическое определение*, согласно которому каждому событию A из поля событий S сопоставляется число $p(A)$ — вероятность события A, удовлетворяющее следующим аксиомам:

I $p(A) \geqslant 0$ для любого A из S.
II $p(I) = 1$, $p(O) = 0$.
III Если события A и B несовместны, т. е. $AB = O$, то

$$p(A + B) = p(A) + p(B). \tag{3.1}$$

Последнее свойство распространяется на любое число несовместных событий.

Из этих аксиом вытекает, что:

1) вероятность всякого события A заключена в пределах

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1;$$

2) вероятность противоположного события $\bar{A}$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A); \tag{3.2}$$

3) имеет место теорема сложения совместных событий

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB). \tag{3.3}$$

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что имело место некоторое другое событие A, называется *условной вероятностью* и обозначается $p(B|A)$. Для условных вероятностей выполняется следующее соотношение:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B). \tag{3.4}$$

Если появление события A не влияет на вероятность события B, т. е. $p(B|A) = p(B)$, то события A и B называются *независимыми*. В этом случае из формулы (3.4) вытекает, что

$$p(A|B) = p(A)$$

и

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \tag{3.5}$$

Последнее равенство представляет теорему умножения (независимых) событий. Оно распространяется на любое число независимых событий.

7.41. Доказать равенство (3.2) в случае классической схемы вероятностей.

Решение. Если из n элементарных исходов событию A благоприятствуют m исходов, то событию A — остальные $n - m$ исходов.

Поэтому

$$p(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p(A).$$

7.42. Доказать равенство (3.3) в случае геометрической схемы вероятностей.

Решение. Пусть событиям A и B отвечает попадание точки в области A и B некоторого прямоугольника S (рис. 185). Площадь объединенной области $A + B$ состоит из суммы площадей S_A и S_B за вычетом S_{AB}, которая в сумме $S_A + S_B$ учитывается дважды. Поэтому

$$p(A + B) = \frac{S_A + S_B - S_{AB}}{S} = \frac{S_A}{S} + \frac{S_B}{S} - \frac{S_{AB}}{S} =$$

$$= p(A) + p(B) - p(AB).$$

7.43. Доказать, что если A и B — независимые события, то независимыми будут A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Решение. Докажем, например, независимость A и $\bar{B}$, независимость $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ доказывается аналогично. Поскольку после появления A с достоверностью происходит либо событие B, либо $\bar{B}$, то $p(B/A)+p(\bar{B}/A)=1$, откуда

$$p(\bar{B}/A)=1-p(B/A).$$

Но по условию $p(B/A)=p(B)$ ввиду независимости A и B. Значит, $p(\bar{B}/A)=1-p(B)=p(\bar{B})$, т. е. вероятность $\bar{B}$ не зависит от появления события A.

7.44. В урне находится 30 шаров, различающихся только цветом. Из них 15 — белых, 8 — черных и 7 — красных. Определить вероятность извлечения красного или черного шара.

Решение. Вероятность извлечения черного шара $p_1=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$, а вероятность появления красного шара $p_2=\frac{7}{30}$. Появление черного шара исключает появление в том же испытании красного шара — следовательно, эти события несовместимы. Применяя формулу (3.1), найдем искомую вероятность:

$$p=p_1+p_2=\frac{4}{15}+\frac{7}{30}=\frac{1}{2}.$$

Отметим, что эту задачу можно было решить иначе. В задаче требуется найти вероятность извлечения не белого шара. Вероятность извлечения белого шара равна $p_3=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$. Тогда вероятность появления противоположного события (извлечение не белого шара) равна

$$p=1-p_3=\frac{1}{2}.$$

7.45. Рабочий, обслуживающий два станка, вынужден был отлучиться на некоторое время. Вероятности того, что в течение этого времени станки не потребуют внимания рабочего, равны $p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}8$. Найти вероятность того, что за время отсутствия рабочего ни один станок не потребует его внимания.

Решение. В задаче требуется найти вероятность совмещения двух событий (оба станка не потребуют внимания рабочего). Эти события независимы (станки работают независимо друг от друга), поэтому по теореме умножения независимых событий получим

$$p=p_1\cdot p_2=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

7.46. При увеличении напряжения в два раза может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов соответственно с вероятностями 0,3; 0,4; 0,5. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи.

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3 означают выход из строя соответственно первого, второго и третьего элементов. Их вероятности по условию равны: $p(A_1)=0{,}3$, $p(A_2)=0{,}4$, $p(A_3)=0{,}5$. Тогда вероятность события $\bar{A}_1$, противоположного событию A_1 (первый элемент не вышел из строя), будет равна $p(\bar{A}_1)=1-p(A_1)=0{,}7$, аналогично вычисляются $p(\bar{A}_2)=0{,}6$, $p(\bar{A}_3)=0{,}5$. Искомая вероятность равна вероятности того, что не выйдут из строя все три элемента. Так как события A_1, $\bar{A}_2$, A_3 независимы, то по теореме умножения независимых событий имеем

$$p=p(\bar{A}_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)=0{,}21.$$

7.47. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели; вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8 для второго — 0,9. Найти вероятность поражения цели (цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль)

Решение. Пусть события A и B — попадания соответственно первого и второго стрелков в цель. Тогда $C=A+B$ — событие, состоящее в том, что хотя бы один из стрелков попал в цель. Очевидно, что события A и B — независимы, но совместны (так как оба стрелка, независимо друг от друга, могут поразить цель одновременно). Отсюда, используя равенство (3.3) и затем (3.5), получим

$$p(C)=p(A)+p(B)-p(AB)=p(A)+p(B)-p(A)\cdot p(B)=$$
$$=0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}98.$$

Задачу можно решить иначе, без использования формулы (3.3).

Согласно результату задачи **7.1** $\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$, поэтому

$$p(A+B)=1-p(\overline{A+B})=1-p(\bar{A}\bar{B}).$$

События A и $\bar{B}$ независимы (см. задачу **7.43**), так что

$$p(A\bar{B})=p(A)\cdot p(\bar{B})=[1-p(A)]\cdot[1-p(B)].$$

Следовательно,

$$p(A+B)=1-[1-p(A)]\cdot[1-p(B)]. \qquad (3.6)$$

Подставляя $p(A)=0{,}8$ и $p(B)=0{,}9$, получим

$$p(A+B)=0{,}98.$$

7.48. Статистика показывает, что в ежегодном заплыве из каждых 100 пловцов $\frac{3}{4}$ дистанции проходит в среднем 90, всю — дистанцию — 80 спортсменов. Найти вероятность того, что: а) спортсмен пройдет всю дистанцию, б) если спортсмен прошел $\frac{3}{4}$ дистанции, то он пройдет всю дистанцию.

Решение. а) Так как из 100 пловцов всю дистанцию проходят 80 спортсменов, то искомая вероятность равна $p_1 = \frac{80}{100} = 0{,}8$.

б) Так как из 90 спортсменов, прошедших $\frac{3}{4}$ дистанции, всю дистанцию проходят 80 пловцов, то для спортсмена, проплывшего $\frac{3}{4}$ дистанции, вероятность доплыть до финиша (вероятность пройти всю дистанцию при условии, что пройдено $\frac{3}{4}$ ее) равна

$$p_2 = \frac{80}{90} = \frac{8}{9} \approx 0{,}91.$$

7.49. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 3% всей продукции составляют нестандартные изделия, а 75% стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта?

Решение. Обозначим через B событие, заключающееся в том, что выбранное изделие — стандартное, а через A — что изделие первосортное.

Тогда

$$p(B) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97, \quad p(A/B) = 0{,}75.$$

Искомая вероятность

$$p(A) = p(B) \cdot p(A/B) = 0{,}97 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}73.$$

7.50. В урне 30 шаров, из них 5 красных, 10 — синих, 14 — зеленых и один — белый. Какова вероятность того, что в первый раз будет вынут красный шар (событие A), во второй раз — синий (событие B) и в третий — зеленый (событие C), если извлеченные из урны шары обратно не возвращаются.

Решение. Вероятность того, что первоначально будет вынут красный шар, равна $p(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. Вероятность вытянуть синий шар при условии, что первоначально из урны был вынут красный, равна $p(B/A) = \frac{10}{29}$, так как после изъятия красного шара в урне осталось 29 шаров, из них — 10 синих. Вероятность вытянуть в первый раз красный шар, а во второй синий, вычисляется по (3.3): $p(AB) = p(A) \cdot p(A/B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{29} \approx 0{,}06$. Вероятность вытянуть из урны зеленый шар, после того как были извлечены красный и синий шары, равна $p(C/AB) = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (после изъятия из урны красного и синего шаров осталось 28 шаров, из них 14 — зеленых). Отсюда вероятность вытянуть в первый раз красный, во второй — синий и третий — зеленый шары равна

$$p(ABC) = p(AB) \cdot p(C/AB) \approx 0{,}06 \cdot 0{,}5 = 0{,}03.$$

7.51. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображенной на рис. 138. Различные элементы цепи выходят из строя независимо одно от другого. Вероятности выхода элементов из строя за время T следующие:

Элемент	K_1	K_2	$Л_1$	$Л_2$
Вероятность	0,1	0,2	0,4	0,5

Определить вероятность перерыва питания за указанный промежуток времени.

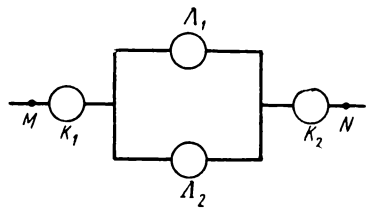


Рис. 138

Решение. Пусть событие A — прекращение тока в цепи, а события K_1, K_2, $Л_1$, $Л_2$ — отказы соответственно элементов K_1, K_2, $Л_1$, $Л_2$. Вычислим сначала вероятность $p(\bar{A})$ события $\bar{A}$ — участок MN электрической цепи пропускает ток. Событие $\bar{A}$ возможно в случае одновременной работы элементов K_1, K_2 и хотя бы одного из элементов $Л_1$ и $Л_2$.

Поэтому

$$A = \bar{K}_1\bar{K}_2(Л_1\bar{Л}_2 + \bar{Л}_1Л_2 + Л_1Л_2).$$

Так как событие $\bar{A}$ в данном случае представлено в виде произведения трех независимых событий, то

$$p(A) = p(\bar{K}_1)\cdot p(\bar{K}_2)\cdot p(Л_1\bar{Л}_2 + \bar{Л}_1Л_2 + Л_1Л_2).$$

Здесь

$$p(\bar{K}_1) = 1 - p(K_1) = 0{,}9$$

и аналогично

$$p(\bar{K}_2) = 1 - p(K_2) = 0{,}8.$$

Далее

$$p(Л_1\bar{Л}_2 + \bar{Л}_1Л_2 + \bar{Л}_1\bar{Л}_2) = p(Л_1\bar{Л}_2) + p(\bar{Л}_1Л_2) + p(\bar{Л}_1\bar{Л}_2)$$

ввиду несовместимости событий — слагаемых $Л_1\bar{Л}_2$, $\bar{Л}_1Л_2$, $\bar{Л}_1\bar{Л}_2$. Учитывая независимую друг от друга работу элементов $Л_1$ и $Л_2$, получим

$$p(Л_1\bar{Л}_2 + \bar{Л}_1Л_2 + \bar{Л}_1\bar{Л}_2) = p(Л_1)\,p(\bar{Л}_2) + p(Л_1)\,p(Л_2) +$$
$$+ p(\bar{Л}_1)\,p(\bar{Л}_2) = p(Л_1)[1 - p(Л_2)] + [1 - p(Л_1)]\cdot p(Л_2) +$$
$$+ [1 - p(Л_1)][1 - p(Л_2)] = 0{,}4\cdot 0{,}5 + 0{,}6\cdot 0{,}5 + 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}8.$$

Таким образом,

$$p(\bar{A}) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}576,$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0{,}576 = 0{,}424.$$

7.52. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность, что студент сдаст коллоквиум?

Решение. Пусть A_1 и A_2 — события, заключающиеся в том, что студент знает ответы соответственно на первый и второй вопросы. Тогда A_1 и A_2 — студент не знает ответов на эти вопросы. Пусть, далее, событие C означает, что студент сдал коллоквиум, т. е. ответил хотя бы на один вопрос. Тогда $\bar{C}$ — студент не сдал коллоквиум, т. е. не ответил на оба вопроса. Очевидно, что $\bar{C} = A_1\bar{A}_2$ и $p(\bar{A}_1) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$. Вероятность того, что студент не знает ответа на второй вопрос при условии, что он не ответил и на первый вопрос, равна $p(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{7}{39}$, (так как из 39 вопросов студент уже не знает только 7). По формуле (3.3)

$$p(\bar{C}) = p(\bar{A}_1\bar{A}_2) = p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{39} \approx 0{,}04.$$

Отсюда

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 0{,}96.$$

7.53. Доказать равенство (3.1) в случае классической схемы вероятностей.

7.54. Доказать равенство (3.4) в случае геометрической схемы вероятностей.

7.55. Доказать, что для трех совместных событий A, B, C

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) +$$
$$+ p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC).$$

7.56. Пассажир ждет автобуса № 3 или № 7 возле остановки, у которой останавливаются автобусы шести маршрутов — № 2, 3, 7, 8, 11, 23. Принимая, что автобусы всех маршрутов появляются в среднем одинаково часто, найти вероятность того, что первый подошедший к остановке автобус будет нужного пассажиру маршрута.

7.57. Прибор, работающий в течение времени t, состоит из трех узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени t отказать. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла равна 0,7, второго — 0,8 и третьего — 0,9. Найти вероятность безотказной работы прибора в целом.

7.58. Электрическая цепь состоит из двух последовательно соединенных элементов I и II. Различные элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга. Вероятности выхода из строя этих элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}1$ и $p_2 = 0{,}2$. Определить вероятность перерыва питания.

7.59. Вероятность того, что данный прибор проработает 150 часов, равна $\frac{5}{7}$, а 400 часов — $\frac{4}{7}$. Прибор проработал 150 часов. Какова вероятность, что он проработает еще 250 часов?

7.60. Проверяется большое количество партий в 10 изделий каждая, следующим образом: партия принимается, если взятые случайным образом три изделия из партии являются стандартными. Если же хотя бы одна деталь из данной выборки нестандартная, то партия не принимается. Какова вероятность, что будет принята партия, содержащая два нестандартных изделия?

7.61. В лотерее 10 билетов, из которых четыре выигрышных. Какова вероятность выиграть хотя бы раз, купив четыре билета?

7.62. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}8,\ p_2 = 0{,}4,\ p_3 = 0{,}7.$$

Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей.

7.63. Разыскивая определенную книгу, студент обходит три библиотеки. Вероятность того, что книга есть в каждой из трех библиотек, равна p_1, а вероятность того, что имеющаяся книга не выдана, равна p_2 для каждой библиотеки. Какова вероятность, что студент достанет книгу в одной из библиотек?

2. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Пусть событие A может наступить с одним и только с одним из несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу (такие события называются *гипотезами*). Тогда вероятность события A вычисляется по формуле

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A|H_1) + p(H_2) \cdot p(A|H_2) + \ldots + p(H_n) \cdot p(A|H_n),$$

которая носит название *формулы полной вероятности*.

Следствием теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности является *формула Байеса:*

$$p(H_i|A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A|H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вероятности гипотез $p(H_i)$ в формуле полной вероятности предполагаются известными до опыта. Формула Байеса показывает, как изменяется вероятность гипотез в том случае, если событие A наступит.

7.64. Имеется три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 3 черных, во второй — 5 белых и 2 черных, в третьей — 2 белых и 5 черных шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым, б) белый шар будет вынут из второй урны.

Решение. Обозначим через A событие, заключающееся в вытягивании белого шара. Вынуть шар можно из каждой из трех урн, т. е. возможны три случая (три гипотезы). Обозначим их: H_1 —

белый шар вынут из первой урны, H_2 — из второй и H_3 — из третьей. Вероятности гипотез равны:

$$p = (H_1) = p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A соответственно равны:

$$p(A/H_1) = \frac{4}{7}$$

(вероятность вытянуть белый шар из первой урны),

$$p(A/H_2) = \frac{5}{7}, \quad p(A/H_3) = \frac{2}{7}.$$

Тогда по формуле полной вероятности получим $p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{11}{21}$. Для определения вероятности того, что белый шар вытянут из второй урны, воспользуемся формулой Байеса:

$$p(H_2/A) = \frac{p(H_2) \cdot p(A/H_2)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7}}{\frac{11}{21}} = \frac{5}{11}.$$

7.65. Двадцать пять экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 40 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

Решение. Пусть событие A — экзамен будет сдан. Введем гипотезы: H_1 — экзаменующийся знает оба вопроса билета, H_2 — только один вопрос, H_3 — не знает ни одного вопроса. Найдем вероятности этих гипотез. Вероятность того, что экзаменующийся знает ответ на первый вопрос, равна $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$, на второй — $\frac{39}{40}$.

Тогда

$$p(H_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{39}{49} \approx 0{,}64.$$

Аналогично

$$p(H_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{39} + \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{49} = \frac{8}{39} + \frac{8}{49} \approx 0{,}37;$$

$$p(H_3) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \approx 0{,}04; \quad p(A/H_1) = 1$$

(если студент знает оба вопроса, то экзамен будет сдан). $p(A/H_2)$ равна вероятности того, что студент ответит на дополнительный вопрос из другого билета — эта вероятность равна $\frac{39}{48} = \frac{13}{16} \approx 0{,}81$;

$p(A/H_3)=0$ (так как при гипотезе H_3 экзамен сдан не будет). По формуле полной вероятности:

$$p(A)=p(H_1)\cdot p(A/H_1)+p(H_2)\cdot p(A/H_2)+p(H_3)\cdot p(A/H_3)=$$
$$=0{,}64\cdot 1+0{,}37\cdot 0{,}81+0{,}04\cdot 0\approx 0{,}94.$$

7.66. По линии связи передаются два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16. Из-за помех $\frac{1}{6}$ сигналов A искажается и принимается как B-сигналы, а $\frac{1}{8}$ часть переданных B-сигналов принимается как A-сигналы. Требуется: а) найти вероятность того, что на приемном пункте появится A-сигнал; B-сигнал; б) известно, что принят сигнал A. Какова вероятность, что он же и был передан?

Р е ш е н и е. Введём гипотезы: H_A — передан сигнал A, H_B — передан сигнал B. Через A и B обозначим события, означающие принятие соответственно A- и B-сигналов. По условию $p(H_A)=$ $=0{,}84$, $p(H_B)=0{,}16$. Вероятность того, что принят A-сигнал при условии, что он же и послан,

$$p(A/H_A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Вероятность того, что принят A-сигнал при условии, что послан B-сигнал,

$$p(A/H_B)=\frac{1}{8}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$p(A)=p(H_A)\cdot p(A/H_A)+p(H_B)\cdot p(A/H_B)=$$
$$=0{,}84\cdot\frac{5}{6}+0{,}16\cdot\frac{1}{8}=0{,}72.$$

Аналогично,

$$p(B)=p(H_A)\cdot p(B/H_A)+p(H_B)\cdot p(B/H_B=0{,}84\cdot\frac{1}{6}+0{,}16\cdot\frac{7}{8}=0{,}28.$$

Вероятность, того, что был передан A-сигнал при условии, что он же был и принят, вычислим по формуле Байеса:

$$p(H_A/A)=\frac{p(H_A)\cdot p(A/H_A)}{p(A)}=\frac{0{,}84\cdot\frac{5}{6}}{0{,}72}=\frac{35}{36}\approx 0{,}97.$$

7.67. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает 25%, второй — 30% и третий 45% деталей данного типа, поступающих на сборку. Первый автомат допускает 0,1% нестандартных деталей, второй — 0,2%, третий — 0,3%. Найти вероятность поступления на сборку нестандартной детали и вероятность того, что оказавшаяся нестандартная деталь изготовлена первым автоматом.

7.68. Радиолампа, поставленная в телевизор, может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1=0{,}25$, $p_2=0{,}5$,

$p_3 = 0{,}25$. Вероятности того, что лампа проработает определенное количество часов, для этих партий равны соответственно: 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

7.69. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит индикатор?

§ 4. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Определение дискретных случайных величин и действия с ними. В теории случайных величин имеют дело с такими опытами, в результате осуществления которых появляется то или иное числовое значение.

Величина ξ называется *дискретной случайной величиной*, если все ее возможные числовые значения образуют конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$, и появление каждого из них есть случайное событие с определенной вероятностью. Если обозначить $p_i = p(\xi = x_i)$ — вероятность появления значения x_i, то дискретная случайная величина полностью определяется следующей таблицей:

$$\xi = \begin{cases} x_1 & x_2 \ \ldots \ x_n \ \ldots \\ p_1 & p_2 \ \ldots \ p_n \ \ldots \end{cases} \tag{4.1}$$

где значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ выписываются, как правило, в порядке возрастания. Таблица (4.1) называется *законом или рядом распределения* дискрет-

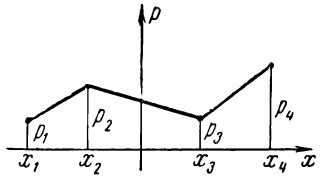


Рис. 139

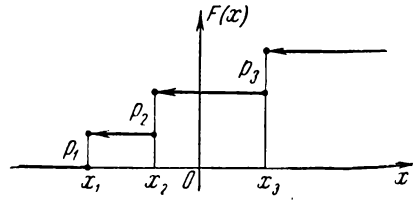


Рис. 140

ной случайной величины ξ. Поскольку в верхней строчке ряда распределения выписаны все возможные значения величины ξ, то нижняя строчка обладает тем свойством, что

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1. \tag{4.2}$$

Вместо ряда распределения (4.1) дискретная случайная величина может быть задана графически *многоугольником распределения* (рис. 139), либо *функцией распределения*

$$F(x) = p\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} p_i$$

— здесь для каждого значения x суммируются вероятности тех значений x_i, которые лежат левее точки x. График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид (см., например, рис. 140).

Действия над дискретными случайными величинами:

I. *Функция от случайной величины.* Пусть $y=f(x)$ — некоторая заданная функция и ξ — величина, определяемая законом (4.1). Если $f(x)$ — монотонная функция, то дискретная величина $\eta=f(\xi)$ определяется законом распределения:

$$\eta=f(\xi)=\begin{Bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

Если $f(x)$ — не монотонная функция, тогда возможно, что она принимает одинаковые значения при разных значениях аргумента. В этом случае сначала пишется вспомогательная таблица (4.3), а затем столбцы с равными значениями $f(x_i)$ объединяются в один столбец. При этом соответствующие вероятности складываются.

Пусть, например,

$$\xi=\begin{Bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}.$$

Тогда вспомогательная таблица для ξ^2 имеет вид

$$\begin{Bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \text{ и, следовательно, } \xi^2=\begin{Bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Bmatrix}.$$

II. *Сумма случайных величин.* Пусть даны две величины

$$\lambda=\begin{Bmatrix} x_1 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & \dots & p_n & \dots \end{Bmatrix}, \quad \mu=\begin{Bmatrix} y_1 & \dots & y_n & \dots \\ q_1 & \dots & q_n & \dots \end{Bmatrix}.$$

Обозначим $p_{ij}=p\{\lambda=x_i,\ \mu=y_j\}$ — вероятность совмещения случайных событий $\{\lambda=x_i\}$ и $\{\mu=y_j\}$, тогда сумма $\xi=\lambda+\mu$ принимает всевозможные значения x_i+y_j с вероятностями p_{ij}.

Если все суммы x_i+y_j разные, то

$$\xi=\lambda+\mu=\begin{Bmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_2+y_1 & x_2+y_2 & \dots \\ p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{22} & \dots \end{Bmatrix}. \tag{4.4}$$

Если же имеются одинаковые значения сумм, то строится вспомогательная таблица (4.4), затем одинаковые числа в верхней строчке объединяются в один столбец со сложением соответствующих вероятностей. Сумма $\xi=\lambda+\mu$ обладает обычными свойствами сложения:

$$\lambda+\mu=\mu+\lambda, \quad (\lambda+\mu)+\nu=\lambda+(\mu+\nu), \quad C(\lambda+\mu)=C\lambda+C\mu \quad (C=\text{const}).$$

III. *Произведение случайных величин* определяется по аналогии со сложением, но только в верхней строчке формулы (4.4) ставятся произведения x_iy_j.

Две дискретные случайные величины λ и μ называются *независимыми*, если независима каждая пара случайных событий $\{\lambda=x_i\}$ и $\{\mu=y_j\}$. В этом случае по теореме умножения в определении суммы $\lambda+\mu$ и произведения $\lambda\mu$ должно быть $p_{ij}=p_iq_j$, где $p_i=p(\lambda=x_i)$, $q_j=p(\mu=y_j)$.

7.70. Пусть A — случайное событие с вероятностью p. Случайная величина λ называется характеристической для A, если при появлении события A она принимает значение 1, а при непоявле-

нии A — значение 0. Написать ряд распределения и функцию распределения величины λ.

Решение. Поскольку событие A появляется с вероятностью p, то с той же вероятностью λ принимает значение 1. Событие $\bar{A}$, а вместе с ним и $\{\lambda=0\}$ имеет, следовательно, вероятность $q=1-p$.

Поэтому

$$\lambda=\begin{Bmatrix}0 & 1\\ q & p\end{Bmatrix}\quad (q=1-p).$$

По определению функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ 1-p & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 141.

7.71. Бросаются два игральных кубика. Пусть ξ — сумма очков, выпадающих на их верхних гранях. Написать закон распределения случайной величины ξ.

Решение. Любое число очков от 1 до 6 на одном игральном кубике может комбинироваться с любым числом очков на другом. Число всех таких возможных комбинаций, очевидно, равно $6\cdot 6=36$. Сумма очков, выпадающих на двух кубиках, принимает значения от 2 до 12. Так как два очка могут появиться только в одном случае из 36 ($2=1+1$), то $p(\xi=2)=\frac{1}{36}$. Три очка могут появиться в двух случаях из 36 ($3=2+1=1+2$), поэтому $p(\xi=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Для четырех очков три благоприятствующих возможности ($4=3+1=2+2=1+3$), так что $p(\xi=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Продолжая такие рассуждения, придем к таблице

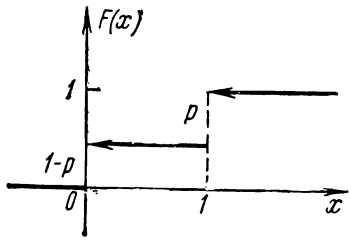


Рис. 141

$$\xi=\begin{Bmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36}\end{Bmatrix}. \tag{4.5}$$

Тот же результат можно получить и иным путем. Обозначим λ_1 — число очков, выпадающих на первом кубике, а λ_2 — на втором. Очевидно, $\xi=\lambda_1+\lambda_2$.

$$\lambda_1=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{Bmatrix},\quad \lambda_2=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{Bmatrix}.$$

По правилу сложения случайных величин составляем сначала вспомогательную таблицу, складывая каждое значение величины λ_1 с каждым значением λ_2 и учитывая, что ввиду независимости выпадания числа на обоих кубиках, $p_{ij}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$:

$$\left\{\begin{matrix}1+1 & 1+2 & 2+1 & 1+3 & 2+2 & 3+1 & \dots & 6+6\\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & & \frac{1}{36}\end{matrix}\right\}.$$

Объединяя теперь столбцы с одинаковыми значениями суммы и суммируя их вероятности, получим снова (4.5).

Замечание. Для сложения случайных величин формула $\lambda+\lambda=2\lambda$ не верна. В самом деле, в разобранном только что примере с точки зрения закона распределения $\lambda_1=\lambda_2$. Однако их сумма (4.6) не совпадает с величиной

$$2\lambda_1=\left\{\begin{matrix}2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{matrix}\right\}.$$

7.72. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлены три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1,5 *мин*, желтый — в течение 0,3 *мин*, красный — в течение 1,2 *мин*. Написать закон распределения числа ξ остановок автомобиля на этой улице.

Решение. Так как время, в течение которого светофор разрешает проезд (зеленый свет), равно времени, в течение которого проезд запрещен (желтый и красный свет), то вероятность того, что светофор задержит или пропустит машину, одна и та же и, следовательно, равна 0,5.

Ясно, что случайная величина ξ может принимать значения:

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=3.$$

Вероятности $p_i=p(\xi=x_i)$ того, что число остановок будет равно данному частному значению, вычисляются следующим образом:

$$p_1=q^3=0{,}5^3=0{,}125;\quad p_2=3pq^2=3\cdot0{,}5^2=0{,}375;$$

$$p_3=3p^2q=3\cdot0{,}5^2\cdot0{,}5=0{,}375;\quad p_4=p^3=0{,}5^3=0{,}125.$$

Отсюда закон распределения случайной величины ξ:

$$\xi=\left\{\begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0{,}125 & 0{,}375 & 0{,}375 & 0{,}125\end{matrix}\right\}.$$

7.73. Из партии в 25 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить (с точностью до 0,01) закон распределения случайного числа ξ нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. Так как в выборке число нестандартных изделий может быть любым числом от 0 до 3 включительно, то возможные значения случайной величины ξ равны: 0, 1, 2, 3. Вероятность того, что в этой выборке окажется равно K ($K=0, 1, 2, 3$) нестандартных изделий, вычисляется по формуле:

$$p(\xi=K)=\frac{C_6^K\cdot C_{19}^{3-K}}{C_{25}^3}$$ (см. задачу 7.19).

Вычислим

$$p(\xi=2)=\frac{C_6^2\cdot C_{19}^1}{C_{25}^3}=\frac{6\cdot 5\cdot 19}{\underline{25\cdot 24\cdot 23}}=\frac{57}{460}\approx 0{,}11.$$
$$1\cdot 2\cdot 3$$

Аналогично находим $p(\xi=0)\approx 0{,}41$; $p(\xi=1)\approx 0{,}43$; $p(\xi=3)\approx$ $\approx 0{,}05$. Отсюда таблица распределения:

$$\xi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}41 & 0{,}43 & 0{,}11 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

7.74. Производится один выстрел по самолету. Вероятность попадания 0,3. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины ξ числа попаданий в самолет.

7.75. Случайная величина ξ может принимать только следующие значения: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=6$. Вероятности первых двух возможных значений таковы: $p(\xi=x_1)=0{,}4$; $p(\xi=x_2)=0{,}2$. Найти $p(\xi=x_3)$.

7.76. Пусть $\lambda=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Найти $\eta=2\lambda+3$, $\xi=(\lambda-1)^2$.

7.77. Пусть $\lambda=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $\mu=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найти $\xi=\lambda+\mu$ и $\eta=\lambda\mu$, если λ и μ — независимые случайные величины.

7.78. В одной урне 4 шара, в другой — 3 шара. На каждом шаре отмечено число очков от 1 до 4 для первой урны и от 1 до 3 — для второй. Из каждой урны наугад извлекается по одному шару. Пусть ξ — сумма очков, отмеченных на вынутых шарах. Составить таблицу распределения вероятностей случайной величины ξ, найти функцию распределения и построить ее график.

7.79. Написать закон распределения вероятностей и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания равна $p=0{,}4$.

7.80. Известно, что в партии из 20 телефонных аппаратов имеется 5 недействующих. Случайным образом из этой партии взято 4 аппарата. Найти закон распределения случайной величины числа недействующих аппаратов из выбранных.

7.81. Производятся выстрелы из орудий с вероятностью попадания 0,8 при каждом выстреле. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше четырех выстрелов. Написать закон распределения случайной величины ξ числа произведенных выстрелов.

7.82. В урне n шаров, из них один белый, остальные — черные. Из урны поочередно извлекают шары и затем снова возвращают в урну. Найти закон распределения случайной величины ξ числа извлечений, которое требуется до появления белого шара.

Указание. Величина ξ может принимать значения: 1, 2, 3, ..., n, ...

2. Числовые характеристики. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины вида (4.1) называется число

$$M\xi = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + \ldots \tag{4.6}$$

В случае бесконечного множества значений x_i в правой части (4.6) стоит ряд, и мы будем рассматривать только те величины ξ, для которых этот ряд абсолютно сходится. $M\xi$ представляет собой среднее ожидаемое значение случайной величины. Оно обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&1)\ MC = C, \text{ где } C = \text{const},\\
&2)\ M(C\xi) = CM\xi,\\
&3)\ M[\xi + \eta] = M\xi + M\eta \text{ для любых } \xi \text{ и } \eta,\\
&4)\ M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta, \text{ если } \xi \text{ и } \eta \text{ независимы.}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Для оценки степени разбросанности значений случайной величины около ее среднего значения $M\xi = a$ вводятся понятия *дисперсии* $D\xi$ и *среднего квадратичного отклонения* $\sigma\xi$. Дисперсией называется математическое ожидание квадрата разности $(\xi - a)$, т. е. $D\xi = M(\xi - a)^2$, $\sigma\xi$ определяется как квадратный корень из дисперсии, т. е. $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$. Для вычисления дисперсии пользуются формулой

$$D\xi = M(\xi^2) - a^2, \text{ где } a = M\xi. \tag{4.8}$$

Свойства дисперсии и среднего квадратичного отклонения:

$$\begin{aligned}
&1)\ DC = 0;\ \sigma C = 0, \text{ где } C = \text{const},\\
&2)\ D(C\xi) = C^2D\xi;\ \sigma(C\xi) = |C|\sigma\xi,\\
&3)\ D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta;\ \sigma(\xi + \eta) = \sqrt{(\sigma\xi)^2 + (\sigma\eta)^2},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

если ξ и η независимы.

Заметим, что размерность величин $M\xi$ и $\sigma\xi$ совпадает с размерностью самой случайной величины ξ, а размерность $D\xi$ равна квадрату размерности ξ.

7.83. Случайная величина ξ^0 называется нормированной, если $M\xi^0 = 0$, а $D\xi^0 = 1$. Показать, что с помощью линейного преобразования любую величину ξ можно привести к нормированной величине ξ^0.

Решение. Положим $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$. Тогда $\xi^0 = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$. Действительно, $M\xi^0 = M\left[\dfrac{1}{\sigma}(\xi - a)\right] = \dfrac{1}{\sigma}M(\xi - a) = \dfrac{1}{\sigma}(M\xi - Ma) =$

$= \frac{1}{\sigma}(a - a) = 0$. Здесь были последовательно применены свойства 2, 3, 1 математического ожидания.

$$D\xi^0 = D\left[\frac{1}{\sigma}(\xi - a)\right] = \frac{1}{\sigma^2} D(\xi - a) = \frac{1}{D\xi}\left[D\xi + Da\right] =$$

$$= \frac{1}{D\xi}\left[D\xi + 0\right] = 1$$

в силу свойств 2, 3, 1 дисперсии.

7.84 Найти математическое ожидание и дисперсию характеристической случайной величины λ (задача **7.70**).

Решение. Так как λ принимает только два значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ соответственно с вероятностями $p_1 = 1 - p$ и $p_2 = p$, то по определению

$$M\lambda = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0(1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Для отыскания дисперсии случайной величины λ воспользуемся формулой (4.8). Поскольку $\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, то $M(\lambda^2) = 0(1 - p) + 1 \cdot p = p$. Отсюда

$$D\lambda = M(\lambda^2) - a^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

7.85. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение в задаче **7.73.**

Решение. Случайная величина ξ принимает значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ соответственно с вероятностями $p_1 = 0{,}41$; $p_2 = 0{,}43$; $p_3 = 0{,}11$; $p_4 = 0{,}05$.

Отсюда по формуле (4.6)

$$M\xi = 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}80.$$

$D\xi$ найдем по формуле (4.8). Для этого запишем закон распределения для ξ^2:

$$\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0{,}41 & 0{,}43 & 0{,}11 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Тогда $M(\xi^2) = 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 4 \cdot 0{,}11 + 9 \cdot 0{,}05 = 1{,}32$ и $D\xi = M(\xi^2) - a^2 = 1{,}32 - (0{,}8)^2 = 0{,}68$.

Так как $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$, то $\sigma\xi = \sqrt{0{,}68} \approx 0{,}82$.

7.86. Билет на право разового участия в азартной игре стоит x долларов. Игрок выбрасывает две игральные кости и получает выигрыш 100 долларов, если выпали две шестерки, 10 долларов при выпадании только одной шестерки и проигрывает, если ни одной шестерки не появилось. Какова должна быть стоимость x билета, чтобы игра приносила доход ее устроителям?

Решение. Стоимость выигрыша есть случайная величина ξ, принимающая значения $x_1=0$, $x_2=10$, $x_3=100$ соответственно с вероятностями $p_1=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$, $p_2=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$, $p_3=\frac{1}{6}\times$ $\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Математическое ожидание случайной величины ξ

$$M\xi=0\cdot\frac{25}{36}+10\cdot\frac{5}{8}+100\cdot\frac{1}{36}=5\frac{5}{9}.$$

Таким образом, ожидаемое среднее значение выигрыша равно $5\frac{5}{9}$ долларам. Поэтому билет должен стоить $x>5\frac{5}{9}$ долларов.

7.87. Производится стрельба по некоторой цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайного числа ξ выстрелов.

Решение. Возможные значения случайной величины ξ: $x_1=1$, $x_2=2,\ldots,$ $x_n=n,\ldots$

Случайная величина ξ примет значение $x_1=1$, если попадание будет с первого выстрела — вероятность этого равна p. Случайная величина ξ примет значение $x_2=2$, если будет иметь место промах при первом выстреле и попадание в цель при втором — вероятность этого равна pq, где $q=1-p$. Аналогично, ξ примет значение $x_3=3$ в случае попадания с третьего выстрела (при первых двух промахах) — вероятность равна pq^2 и т. д. Таким образом, получаем следующий ряд распределения для ξ:

$$\xi=\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots\\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{n-1} & \ldots\end{Bmatrix},\quad (q=1-p).$$

Вычисляем математическое ожидание этой величины:

$$M\xi=1\cdot p+2pq+3pq^2+\ldots+npq^{n-1}+\ldots=p\,(1+2q+3q^2+\ldots$$

$$\ldots+nq^{n-1}+\ldots)=p\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}=p\,\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty}q^n\right)=$$

$$=p\,\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right)=p\,\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Для определения дисперсии $D\xi$ воспользуемся формулой (4.8). Ряд распределения случайной величины ξ^2 имеет вид

$$\xi^2=\begin{Bmatrix}1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 & \ldots\\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{n-1} & \ldots\end{Bmatrix}.$$

Тогда

$$M\xi^2 = 1 \cdot p + 4pq + 9pq^2 + \ldots + n^2 pq^{n-1} + \ldots = p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} =$$

$$= p \frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n\right) = p \frac{d}{dq}\left(q \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}\right) = p \frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right] =$$

$$= p \frac{1+q}{(1-q)^3} = p \frac{1+1-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Таким образом,

$$D\xi = M\xi^2 - a^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

7.88. При сборке прибора для наиболее точной подгонки основной детали может потребоваться (в зависимости от удачи) 1, 2, 3, 4, или 5 проб соответственно с вероятностями 0,07; 0,21; 0,55; 0,16; 0,01. Требуется снабдить сборщика необходимым количеством деталей для сборки 30 приборов. Сколько деталей надо отпустить сборщику?

Решение. Число x_i проб, необходимых для достижения удовлетворительной сборки прибора, есть случайная величина ξ, ряд распределения которой выглядит следующим образом:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}07 & 0{,}21 & 0{,}55 & 0{,}16 & 0{,}01 \end{pmatrix}.$$

Среднее число проб, необходимых для сборки одного прибора, равно $M\xi$. Следовательно, для сборки 30 деталей необходимо число проб

$$30M\xi = 30 \cdot [1 \cdot 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}21 + 3 \cdot 0{,}55 + 4 \cdot 0{,}16 + 5 \cdot 0{,}11] =$$

$$= 30 \cdot 2{,}83 \approx 85.$$

Это число и есть ответ на вопрос задачи.

7.89. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ числа попаданий в самолет в задаче **7.74.**

7.90. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ числа остановок автомобиля (задача **7.72**).

7.91. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ числа недействующих аппаратов в выборке из 4 телефонных аппаратов (задача **7.80**).

7.92. На артиллерийском полигоне производится стрельба из орудия по цели. Каждая стрельба ведется до первого попадания в цель. Вероятность попадания при одном выстреле $p = 0{,}6$. Каков средний ожидаемый расход снарядов, если про-

изводится серия из 100 стрельб, условия которых одинаковы для каждой стрельбы?

7.93. В лотерее 100 билетов, на которые падает один выигрыш в 100 руб., пять выигрышей по 10 руб. и десять выигрышей по 5 руб. Найти математическое ожидание и дисперсию выигрышей на один билет.

7.94. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, выпадающих на двух игральных кубиках.

Указание. См. задачу **7.71.**

7.95. В двух урнах по 5 пронумерованных шаров. В первой урне 2 шара имеют номер 1, 2 шара — номер 2 и 1 шар — номер 3. Во второй урне 3 шара имеют номер 1 и 2 шара имеют номер 2. Из этих урн наугад берут по одному шару и находят произведение их номеров. Получившееся число есть случайная величина ξ. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3. Распределения Бернулли и Пуассона. Пусть при одних и тех же условиях происходит повторение n раз одного и того же опыта. Рассматривается случайное событие A, которое может появиться при каждом из этих испытаний с одинаковой вероятностью p. Обозначим $P_n(k)$ — вероятность появления события A ровно k раз в n опытах. Случайная величина

$$\beta = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ P_n(0) & P_n(1) & \dots & P_n(k) & \dots & P_n(n) \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

определяет так называемое *распределение или схему Бернулли*. Вероятности $P_n(k)$ вычисляются по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q = 1 - p. \tag{4.11}$$

Правая часть этого равенства представляет общий член биномиального разложения $(p+q)^n$, поэтому закон (4.10) называют иногда биномиальным.

Вероятности $P_n(k)$ при данном n сначала увеличиваются при увеличении k от 0 до некоторого значения k_0, а затем уменьшаются при изменении k от k_0 до n. Поэтому k_0 называется наивероятнейшим числом наступления события A в n испытаниях. Это число находят по формуле *

$$k_0 = [np + p]. \tag{4.12}$$

Если число $(np+p)$ целое, то наивероятнейшим будет также и число $k_0 - 1$ с той же вероятностью $P_n(k_0)$.

В случае, когда n велико, а p мало (более точно, $p = \frac{\alpha}{n}$, где $\alpha = \text{const}$) вместо (4.11) используют приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \quad (\alpha = pn). \tag{4.13}$$

---

* $[x]$ обозначает целую часть числа x. Для ее нахождения дробная часть числа x отбрасывается. Например, $[2{,}13] = 2$, $\left[3\frac{1}{3}\right] = 3$ и т. д.

Случайная величина

$$\pi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-\alpha} & \alpha e^{-\alpha} & \frac{\alpha^2}{2} e^{-\alpha} & \dots & \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} & \dots \end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

называется *законом (или распределением) Пуассона.*

7.96. Найти математическое ожидание и дисперсию закона Бернулли.

Решение. Пусть $\lambda_i\,(i=1,\ 2,\dots,\ n)$ — характеристическая случайная величина события A (задача 7.70) при i-м испытании. Так как испытания проводятся при одинаковых условиях, то все λ_i имеют один и тот же закон

$$\lambda_i = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{Bmatrix} \quad (q = 1 - p)$$

и $M\lambda_i = p$, $D\lambda_i = pq$ (см. задачу **7.84**). Нетрудно понять, что закон Бернулли (4.10) представляет собой сумму (проверьте!):

$$\beta = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Поэтому по свойствам (4.7) и (4.9):

$$M\beta = M\lambda_1 + M\lambda_2 + \dots + M\lambda_n = \underbrace{p + p + \dots + p}_{n} = np,$$

$$D\beta = D\lambda_1 + D\lambda_2 + \dots + D\lambda_n = \underbrace{pq + pq + \dots + pq}_{n} = npq.$$

7.97. Найти математическое ожидание и дисперсию закона Пуассона.

Решение. По определению:

$$M\pi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = e^{-\alpha} \cdot \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot e^{\alpha} = \alpha.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой (4.8). Вычислим

$$M(\pi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = e^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\alpha^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} \left[\alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \right] = e^{-\alpha} \alpha \frac{d}{d\alpha} (\alpha e^{\alpha}) =$$

$$= e^{-\alpha} \cdot \alpha (e^{\alpha} + \alpha e^{\alpha}) = \alpha + \alpha^2.$$

Тогда

$$D\pi = M(\pi^2) - (M\pi)^2 = \alpha + \alpha^2 - \alpha^2 = \alpha.$$

7.98. По каналу связи передается сообщение с помощью кода, состоящего из двух знаков. Вероятность появления первого знака равна $\frac{2}{3}$. Передано 4 знака. Найти закон распределения для числа ξ появлений первого знака, наивероятнейшее число появления первого знака и его вероятность.

Решение. В данной задаче опыт заключается в передаче некоторого знака $n=4$ раза. Вероятность появления интересующего нас события (появление первого знака) равна $p=\frac{2}{3}$ и, следовательно, вероятность его непоявления равна $q=1-p=\frac{1}{3}$. Возможные значения числа появлений первого знака: 0, 1, 2, 3, 4. Их вероятности, очевидно, вычисляются по формуле (4.11):

$$P_4(0)=C_4^0p^0q^4=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}; \qquad P_4(1)=C_4^1pq^3=\frac{8}{81};$$

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=\frac{24}{81}; \qquad P_4(3)=C_4^3p^3q=\frac{32}{81};$$

$$P_4(4)=C_4^4p^4q^0=\frac{16}{81}.$$

Отсюда получаем закон распределения:

$$\xi=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{Bmatrix}$$

Наивероятнейшее число появлений первого знака равно

$$k_0=[np+p]=\left[4\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{10}{3}\right]=3.$$

Первый знак появляется $k_0=3$ раза с вероятностью $p_4(3)=\frac{32}{81}$.

7.99. Среди деталей, вырабатываемых рабочим, бывает в среднем 3% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 6 деталей две детали будут нестандартными. Каково наивероятнейшее число нестандартных деталей в данной выборке из шести изделий и какова его вероятность?

Решение. Вероятность появления нестандартной детали $p=0{,}03$, а стандартной $q=1-p=0{,}97$. Отсюда по формуле (4.11) получим $P_6(2)=C_6^20{,}03^2\cdot 0{,}97^4\approx 0{,}03$.

Наивероятнейшее число нестандартных деталей в данной выборке равно $k_0=[np+p]=[6\cdot 0{,}03+0{,}03]=[0{,}21]=0$. Вероятность этого (все детали стандартные) равна $P_6(0)=C_6^00{,}03^0\cdot 0{,}97^6\approx 0{,}81$.

7.100. Телефонная станция обслуживает абонентов, которые в час производят ν разговоров со средней продолжительностью τ. Какова вероятность, что в момент t_0 из данного часа говорит ровно k абонентов?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что один абонент говорит в момент t_0. A осуществляется, если одновременно произошли два независимых события: B — абонент говорил в течение выбранного часа, C — момент t_0 попал в промежуток разговора τ. По классической схеме $p(B)=\frac{\nu}{n}$, по геометрической схеме $p(C)=\frac{\tau}{1}=\tau$. Следовательно,

$$p=p(A)=p(BC)=p(B)\cdot p(C)=\frac{\nu}{n}\cdot\tau=\frac{\nu\tau}{n}.$$

В таком случае по закону Бернулли вероятность разговора в момент t_0 k абонентов равна

$$P_n(k)=C_n^k\left(\frac{\nu\tau}{n}\right)^k\left(1-\frac{\nu\tau}{n}\right)^{n-k}.$$

Поскольку число n достаточно велико, а $p=\frac{\alpha}{n}$, где $\alpha=\nu\tau$, то по закону Пуассона

$$P_n(k)=\frac{(\nu\tau)^k}{k!}e^{-\nu\tau}.$$

7.101. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

Решение. Формула Бернулли приведет к громоздким вычислениям, поэтому воспользуемся формулой Пуассона.

Здесь $k=5$, $p=0{,}004$, $n=1\,000$, тогда $\alpha=4$. Отсюда

$$P_{1\,000}(5)=\frac{4^5}{5!}e^{-4}\approx 0{,}1562.$$

7.102. Производится четыре независимых выстрела в одинаковых условиях, причем вероятность попадания $p=0{,}3$ при каждом выстреле. Построить закон распределения случайной величины ξ — числа попаданий — и найти функцию распределения ξ.

7.103. На телефонной станции за время T в среднем бывает n вызовов. Какова вероятность, что за время $t<T$ возникает k вызовов?

7.104. Оптовая база снабжает 90 магазинов. Вероятность заявки на данный день от каждого магазина $p=0{,}4$. Найти наивероятнейшее число заявок k_0 на данный день.

7.105. Что вероятнее: выиграть у равносильного партнера:

а) три партии из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти из восьми.

7.106. Завод отправил на базу 5 000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятности того, что на базу прибудет ровно три и не более трех негодных изделий.

§ 5. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Основные свойства. В общем случае случайная величина ξ задается *функцией распределения* $F(x)$, которая определяет $p\{\xi < x\}$, т. е. вероятность попадания левее точки x. Функция распределения характеризуется тремя свойствами:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, 3) $F(x)$ — неубывающая функция.

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если, во-первых, все ее возможные значения заполняют целый интервал (α, β), и, во-вторых, ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на (α, β) и имеет там кусочно-непрерывную производную*. В дальнейшем мы будем считать, что $F(x)$ определена на всей числовой оси, доопределяя ее равенствами $F(x) = 0$ при $x < \alpha$ и $F(x) = 1$ при $x > \beta$ (если, конечно, сам интервал (α, β) не совпадает со всей числовой осью).

Непрерывную случайную величину удобнее характеризовать *плотностью вероятностей*

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x < \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

и, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\, dx.$$

Плотность вероятностей обладает свойствами:

$$1)\ p(x) \geqslant 0, \quad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина ξ примет некоторое значение из интервала $(a; b)$, может быть вычислена по одной из двух формул:

$$p(a < \xi < b) = F(b) - F(a),$$

$$p(a < \xi < b) = \int_{a}^{b} p(x)\, dx.$$

Так как для непрерывной случайной величины вероятность попадания в отдельную точку равна нулю, то по тем же формулам вычисляются вероятности попадания в полузакрытый и закрытый интервалы. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение непрерывной величины ξ определяются равенствами:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\, dx,$$

$$D\xi = M(\xi - a)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 p(x)\, dx, \text{ где } a = M\xi,$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$$

Все свойства математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения, записанные в § 4, п. 2, сохраняются полностью и для непрерывных случайных величин.

---

* Т. е. $F'(x)$ может иметь только конечное число точек разрыва 1 рода. В таких точках график самой функции $F(x)$ имеет угловую точку.

7.107. Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{x^2}{16}, & 0\leqslant x<2;\\ x-\frac{7}{4}, & 2\leqslant x<\frac{11}{4};\\ 1, & x\geqslant\frac{11}{4}.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятностей $p(x)$ случайной величины ξ; б) построить графики $F(x)$ и $p(x)$; в) определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое откло-

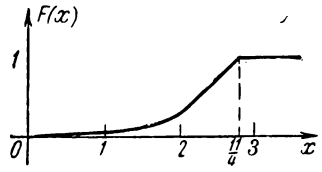


Рис. 142

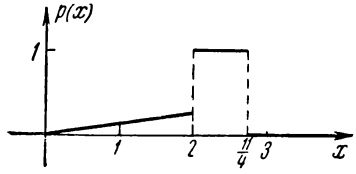


Рис. 143

нение величины ξ; г) найти вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[1;\ 1{,}5]$.

Решение. а) Для отыскания $p(x)$ воспользуемся тем, что $p(x)=F'(x)$, т. е.

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{x}{8}, & 0\leqslant x<2;\\ 1, & 2\leqslant x<\frac{11}{4};\\ 0, & x\geqslant\frac{11}{4}.\end{cases}$$

б) графики $F(x)$ и $p(x)$ изображены на рис. 142, 143.

в) $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx=\int\limits_{0}^{2}x\cdot\frac{x}{8}\,dx+\int\limits_{2}^{\frac{11}{4}}x\,dx=$

$$=\frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+\frac{x^2}{2}\Big|_2^{\frac{11}{4}}=2\frac{11}{96}\approx 2{,}1.$$

Для того чтобы найти $D\xi$, воспользуемся формулой

$$D\xi = M\xi^2 - a^2, \quad \text{где } a = M\xi:$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{8}\,dx + \int_2^{\frac{11}{4}} x^2\,dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^{\frac{11}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{11}{4}\right)^3 - \frac{8}{3} \approx 5{,}6.$$

Отсюда

$$D\xi \approx 5{,}6 - 4{,}4 = 1{,}2.$$

г) $p(1 \leqslant \xi \leqslant 1{,}5) = F(1{,}5) - F(1) = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

7.108. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = A + B\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \quad (-\infty < x < +\infty) \text{ (закон Коши).}$$

Определить постоянные A и B и найти плотность вероятностей $p(x)$.

Решение. Воспользуемся свойствами 1 и 2 функции распределения:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty}\left(A + B\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(A + B\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} A + B\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ A + B \cdot \frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{\pi}$ и значит, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. Теперь нетрудно найти $p(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 + x^2}}$. Графики $F(x)$ и $p(x)$ изображены на рис. 144, 145.

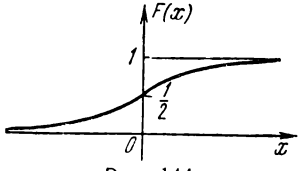


Рис. 144

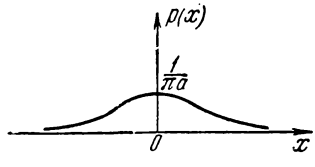


Рис. 145

7.109. Случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{A}{x^2}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Определить: а) коэффициент A; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность $p\{2 < \xi < 3\}$ попадания случайной величины ξ

в интервал (2; 3); г) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях величина ξ ни разу не попадает в интервал (2; 3).

Решение. а) Для нахождения коэффициента A воспользуемся следующим свойством $p(x)$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{A}{x^2}\,dx = -\frac{A}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = A,$$

то $A = 1$;

б) находим $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 & \text{при } x < 1, \\ \int\limits_{1}^{x} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{x} = \frac{x-1}{x} & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Графики $F(x)$ и $p(x)$ изображены на рис. 146, 147. в) $p\{2 < \xi < 3\} = F(3) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. г) Вероятность того, что ξ не попадет в интервал (2, 3) при одном испытании, очевидно, равна $\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$, а при четырех испытаниях $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$.

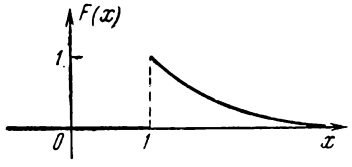


Рис. 146

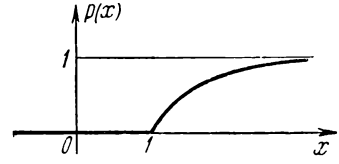


Рис. 147

7.110. Пусть функция распределения $F(x)$ некоторой случайной величины ξ имеет в точке $x = a$ разрыв 1-го рода (скачок). Какой вероятностный смысл имеет этот разрыв?

Решение. Положим, что в точке $x = a$ функция распределения $F(x)$ имеет скачок, величина которого равна p. Если x_1 и x_2 — любые два числа, такие, что $x_1 < a < x_2$, то $p(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$. При $x_1 \to a$ и $x_2 \to a$ это выражение $F(x_2) - F(x_1)$ имеет своим пределом p. Следовательно, p — есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, в точности равное a. Таким образом,

$$p(\xi = a) = p.$$

Отметим, что в данном примере ξ не является непрерывной случайной величиной. Конечно, для непрерывной случайной величины $\xi p(\xi = a) = 0$.

7.111. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ задана следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятностей $p(x)$ величины ξ; б) построить графики $F(x)$ и $p(x)$; в) найти $M\xi$, $D\xi$ и $\delta\xi$; г) определить вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $[0;\ \pi]$

7.112. Дана функция $p(x)=Ax^2e^{-2x}\ (0\leqslant x<+\infty)$. Определить: а) при каком значении A функция $p(x)$ будет являться плотностью вероятностей некоторой непрерывной случайной величины ξ; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания ξ в интервал $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

7.113. Скорость молекул газа задана плотностью вероятностей:

$$f(v)=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}\qquad (v\geqslant 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию скорости молекул.

2. Равномерное и нормальное распределение вероятностей. Непрерывная случайная величина ξ называется *равномерной*, если на интервале $(\alpha,\ \beta)$, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность вероятностей $p(x)$ имеет постоянное значение.

Непрерывная случайная величина ξ называется *нормальной*, если она описывается плотностью вероятностей

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.1}$$

Входящий сюда параметр a есть математическое ожидание, а параметр σ — среднее квадратичное отклонение нормально распределенной величины ξ. График плотности вероятностей нормальной случайной величины называют нормальной кривой (кривой Гаусса), он изображен на рис. 148.

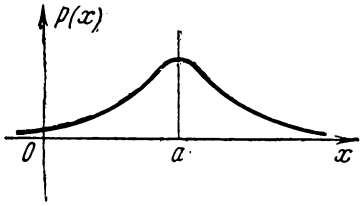


Рис. 148

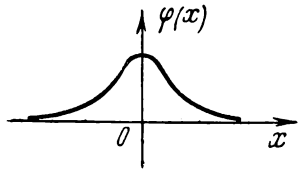


Рис. 149

При $\sigma = 1$ и $a = 0$ из (5.1) получается основной нормальный закон распределения случайной величины $\xi_0 = \frac{\xi - a}{\sigma}$. Его плотность

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{5.2}$$

График $\varphi(x)$ изображен на рис. 149. Вероятность попадания нормальной случайной величины ξ в интервал (α, β) вычисляется по формуле

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\Big], \tag{5.3}$$

$$\Phi(x) = p\{-x < \xi_0 < x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{5.4}$$

$\Phi(x)$ — называется *функцией Лапласа* или интегралом вероятностей (см. гл. IV, § 2, п. 2). Для симметричного относительно a промежутка $(a - l; a + l)$ имеем:

$$p(a - l < \xi < a + l) = p(|\xi - a| < l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right). \tag{5.5}$$

Функция Лапласа обладает свойствами:

$$1)\ \Phi(0) = 0, \quad 2)\ \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1, \qquad 3)\ \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Краткая таблица значений функции Лапласа приведена в приложении.

7.114. Равномерно распределенная случайная величина ξ задана на интервале $(\alpha; \beta)$. Найти плотность вероятностей $p(x)$ величины ξ, математическое ожидание и дисперсию.

Решение. По условию имеем

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ C\,(\text{const}), & a < x < b; \\ 0, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Остается найти величину C, для чего воспользуемся условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1.$$

Тогда

$$\int_a^b C\, dx = 1, \qquad C(b - a) = 1, \qquad C = \frac{1}{b - a}.$$

Таким образом,

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ \frac{1}{b - a}, & a < x < b, \\ 0, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Математическое ожидание по определению равно

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{b} = \frac{b+a}{2}$$

— математическое ожидание совпадает с серединой интервала возможных значений случайной величины ξ.

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M\xi]^2\,p(x)\,dx = \int_{a}^{b} \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{3}(b-a)^2.$$

7.115. Случайная величина ξ распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 8 и 3. Какова вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение в интервале (5; 9)?

Решение. Здесь $m=8$, $\sigma=3$, $\alpha=5$, $\beta=9$. По формуле (5.3) имеем:

$$p(5<\xi<9) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{9-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{5-8}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}33) + \Phi(1)] =$$

$$= \frac{1}{2}[0{,}2586 + 0{,}0797] = \frac{1}{2}\cdot 0{,}3383 = 0{,}1691$$

(значения $\Phi(0{,}33)$ и $\Phi(1)$ найдены из таблицы).

7.116. Цех изготовляет детали, длины ξ которых представляют собой случайную величину, распределенную по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины ξ соответственно равны 15 и 0,1 *см*. Найти вероятность того, что отклонение длины детали в ту или другую сторону от математического ожидания не превзойдет 0,25 *см*.

Решение. Имеем $m=15$; $\sigma=0{,}1$; $l=0{,}25$. Тогда по формуле (5.5) получим

$$p(14{,}75<\xi<15{,}25) = p(|\xi-15|<0{,}25) = \Phi\left(\frac{0{,}25}{0{,}1}\right) = \Phi(2{,}5) \approx 0{,}9876.$$

7.117. При взвешивании тела получен средний вес $m=2{,}3$ *г*, среднее квадратическое отклонение веса $\sigma=0{,}02$ *г*. Какое отклонение веса тела от среднего веса можно гарантировать с вероятностью 0,9?

Решение. Требуется найти такое положительное число l, что

$$p(2{,}3-l<\xi<2{,}3+l) = p(|\xi-2{,}3|<l = \Phi\left(\frac{l}{0{,}02}\right) \geqslant 0{,}9.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим такое значение

$\frac{l}{0{,}02}$, для которого $\Phi\left(\frac{l}{0{,}02}\right) \geqslant 0{,}9$. Это неравенство выполняется при $\frac{l}{0{,}02} \geqslant 1{,}35$ ($\Phi(x)$ — монотонно возрастающая функция). Отсюда $l \geqslant 0{,}27$. Таким образом, с вероятностью, не меньшей 0,9, можно гарантировать, что при различных взвешиваниях тела получаемый вес отклоняется от среднего веса не больше чем на 0,27 *г*.

7.118. Длина детали, изготовленной на станке, есть нормальная случайная величина с математическим ожиданием 45 *см* и средним квадратическим отклонением 0,4 *см*. Найти вероятность того, что две взятые наудачу детали имеют отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не более 0,16 *см*.

Решение. Вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет отклонение в ту или другую сторону от математического ожидания не более чем на 0,16 *см*, равна

$$p(45-0{,}16<\xi<45+0{,}16)=p(|\xi-45|<0{,}16)=$$
$$=\Phi\left(\frac{0{,}16}{0{,}4}\right)=\Phi(0{,}4)=0{,}31.$$

Тогда для двух наудачу взятых деталей искомая вероятность равна $0{,}31^2 \approx 0{,}09$.

7.119. Вычислить вероятность того, что случайная величина ξ, подчиненная нормальному закону распределения, при трех испытаниях хотя бы один раз окажется в интервале (1, 2), если математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ее соответственно равны 1,5 и 1,2.

Решение. Вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (1, 2) вычисляется по формуле

$$p(1<\xi<2)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{2-1{,}5}{1{,}2}\right)-\Phi\left(\frac{1-1{,}5}{1{,}2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}[\Phi(0{,}42)+\Phi(0{,}42)]=\Phi[0{,}42]=0{,}3255.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина ξ не попадет в интервал (1, 2) при одном испытании, равна $(1-0{,}3255)=0{,}6645$, а при трех испытаниях — $0{,}6745^3=0{,}3015$. Отсюда искомая вероятность равна $(1-0{,}3015)=0{,}6985$.

7.120. Детали, выпускаемые цехом, по размерам распределяются по нормальному закону. Параметры этого нормального закона таковы: математическое ожидание равно 5 *см*, а среднее квадратическое отклонение — 0,9. Требуется:

а) найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры в пределах от 4 до 7 *см*; б) найти вероятность того, что размер диаметра наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более чем на 2 *см*; в) найти, в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

7.121. Стрельба ведется по точке O вдоль прямой OX. Средняя дальность полета снаряда равна 1200 *м*. Предполагая, что дальность полета распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 40 *м*, найти вероятность того, что выпускаемый снаряд даст перелет от 60 до 80 *см* ($p(1260 < \xi < 1280)$).

7.122. При среднем весе некоторого изделия в 8,4 *кг* найдено, что отклонения, по абсолютному значению не превосходящие 50 *г*, встречаются в среднем 3 раза на каждые 100 изделий. Допускается, что вес изделий распределен по нормальному закону. Определить его среднее квадратическое отклонение.

7.123. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием 2,2 и средним квадратическим отклонением 0,5. Какова вероятность того, что при первом испытании случайная величина окажется в отрезке [3, 4], а при втором испытании окажется в отрезке [1, 2]?

7.124. Равномерно распределенная случайная величина ξ сосредоточена на интервале (0, 2). Определить $M\xi$, $D\xi$, нарисовать график ее функции распределения $F(x)$.

§ 6. ТЕОРЕМЫ МУАВРА — ЛАПЛАСА

Пусть производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых событие A наступает с вероятностью p. Тогда, как уже отмечалось в § 4, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение k (биноминальное распределение), будет равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

Локальная теорема Муавра — Лапласа состоит в том, что при $p \neq 0$ и 1 и достаточно большом n биноминальное распределение близко к нормальному закону (причем их математические ожидания и дисперсии совпадают), т. е. имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } \sigma = \sqrt{npq},\ a = np.$$

Тогда

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \tag{6.1}$$

для достаточно больших n (здесь $\varphi(x)$ — плотность вероятностей основной нормальной случайной величины $\xi_0 = \frac{\xi - a}{\sigma}$ и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$).

Интегральная теорема Муавра — Лапласа утверждает, что при постоянном $p \neq 0$ и 1 и при $n \to \infty$

$$p(\alpha < \xi < \beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx, \text{ где } x_1 = \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}},\quad x_2 = \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}.$$

Отсюда для определения вероятности попадания случайной величины ξ, распределенной по биноминальному закону, в определенный интервал (α, β),

т. е. вероятности $p(\alpha \leqslant \xi < \beta)$, пользуются формулой

$$p(\alpha < \xi < \beta) \approx \frac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)], \tag{6.2}$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

В частности, если интервал $(\alpha; \beta)$ расположен симметрично относительно математического ожидания $a = np$, то

$$p(\alpha < \xi < \beta) = p(|\xi - np| < l) \approx \Phi(t), \tag{6.3}$$

где

$$l = \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad t = \left|\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right| = \left|\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right| = \frac{l}{\sigma}.$$

Интегральная теорема Муавра — Лапласа позволяет оценить вероятность неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ при достаточно больших n и значениях p, не слишком близких к 0 или 1, т. е. определить вероятность $\bar{p}$ того, что отклонение частоты $\frac{m}{n}$ случайного события от его вероятности p по абсолютной величине не превосходит некоторого $\varepsilon > 0$:

$$\bar{p}\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi(t), \tag{6.4}$$

где

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Вероятность $\bar{p}$ в этом случае называется *надежностью* оценки $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$, а сама оценка называется *доверительной оценкой* частоты $\frac{m}{n}$ с надежностью $\bar{p}$.

На практике надежность $\bar{p}$ оценки задается заранее. Тогда по заданной надежности $\bar{p}$ можно найти соответствующее значение $t = t(\bar{p})$ из уравнения $\Phi(t) = \bar{p}$ с помощью таблиц функции Лапласа. В этом случае доверительная оценка с заданной надежностью примет вид

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = t(\bar{p})\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Это неравенство означает, что частота $\frac{m}{n}$ с заданной надежностью $\bar{p}$ должна лежать в интервале $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, где $\varepsilon = t(\bar{p})\sqrt{\frac{pq}{n}}$. Интервал $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ называется *доверительным интервалом*.

7.125. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов 50 будет бракованными?

Решение. Применяя к данной задаче схему Бернулли, мы должны были бы подсчитать вероятность

$$P_{400}(50) = C_{400}^{50} p^{50} q^{350}, \text{ где } p = 0{,}1, \ q = 0{,}9.$$

Непосредственный подсчет этой вероятности вызывает большие технические трудности. Поскольку $n = 400$ здесь достаточно велико, используем локальную теорему Муавра — Лапласа. По формуле (6.1)

$$P_{400}^{50} \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\varphi\left(\frac{50 - 400 \cdot 0{,}1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = \frac{1}{6}\varphi\left(\frac{5}{3}\right) \approx \frac{1}{6}\varphi(1{,}67) \approx 0{,}0989.$$

7.126. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена от 200 до 250 раз в серии из 600 выстрелов?

Решение. В задаче требуется вычислить вероятность попадания случайной величины ξ числа поражений цели в интервал $[\alpha=200;\ \beta=250]$. Для этого воспользуемся интегральной формулой Муавра — Лапласа (6.2).

Так как $n=600$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$, то $x_1=\frac{200-600\cdot 0{,}4}{\sqrt{600\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=-\frac{40}{12}=$

$=-3\frac{1}{3}\approx -3{,}33$ и $x_2=\frac{250-600\cdot 0{,}4}{\sqrt{600\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\approx 0{,}83.$

Отсюда

$$p(200\leqslant\xi\leqslant 250)\approx\frac{1}{2}\,[\Phi(x_2)-\Phi(x_1)]=\frac{1}{2}\,[\Phi(0{,}83)-\Phi(-3{,}33)]=$$

$$=\frac{1}{2}\,[\Phi(0{,}83)+\Phi(3{,}33)]=\frac{1}{2}\,[0{,}5935+0{,}9991]=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5926=0{,}7963.$$

7.127. Вероятность выхода из строя за некоторое время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что из 100 конденсаторов в течение времени T выйдет из строя: а) не менее 30 конденсаторов, б) не более 20 конденсаторов.

Решение. а) Нужно определить вероятность того, что за время T из строя выйдет от 30 до 100 конденсаторов, т. е. вероятность попадания случайной величины ξ числа вышедших из строя конденсаторов в интервал $[\alpha=30;\ \beta=100]$. Для определения $p(30\leqslant\xi\leqslant 100)$ воспользуемся интегральной формулой Муавра — Лапласа (6.2). Здесь $n=100$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$,

$$x_1=\frac{30-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}5,\quad x_2=\frac{100-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=20.$$

Тогда $p(30\leqslant\xi\leqslant 100)\approx\frac{1}{2}\,[\Phi(x_2)-\Phi(x_1)]=\frac{1}{2}\,[\Phi(20)-\Phi(2{,}5)]=$

$$=\frac{1}{2}\,[1-0{,}9876]=\frac{1}{2}\cdot 0{,}0124=0{,}0012$$

($\Phi(20)$ практически равно единице).

б) Требуется определить вероятность того, что за время T выйдет из строя от 0 до 20 приборов, т. е. $p(0\leqslant\xi\leqslant 20)$. В этом случае $\alpha=0$; $\beta=20$; $n=100$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $x_1=\frac{0-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=$

$=-5$, $x_2=\frac{20-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=0.$

По интегральной формуле Муавра — Лапласа (6.2)

$$p(0\leqslant\xi\leqslant 20)\approx\frac{1}{2}\,[\Phi(0)-\Phi(-5)]=\frac{1}{2}\,[\Phi(0)+\Phi(5)]=\frac{1}{2}\,\Phi(5)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=0{,}5.$$

7.128. Электростанция обслуживает сеть с 10 000 ламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,6. Определить вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет лежать между 5900 и 6100.

Решение. В задаче требуется определить вероятность попадания случайной величины ξ числа включенных ламп в интервал ($\alpha = 5900$, $\beta = 6100$). Здесь $n = 10\,000$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$;

$$a = np = 10\,000 \cdot 0{,}6 = 6000, \quad \sigma = \sqrt{npq} \approx \sqrt{10\,000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{2400} \approx 4{,}9.$$

Так как в данном случае интервал (5900; 6100) расположен симметрично относительно математического ожидания $a = 6000$ величины ξ, то для определения $p\,(5900 < \xi < 6100)$ воспользуемся формулой (6.3):

$$p\,(5900 < \xi < 6100)) = p\,(|\xi - 6000| < 100) \approx \Phi\left(\frac{100}{49}\right) \approx \Phi\,(2{,}04) = 0{,}958.$$

7.129. В магазине 10 000 книг. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна 0,8. Какое максимальное число книг будет продано в течение дня с вероятностью 0,999?

Решение. Пусть β — максимальное число книг, проданных в течение дня. По условию задачи $p\,(0 \leqslant \xi \leqslant \beta) = 0{,}999$. С другой стороны, по интегральной формуле Муавра — Лапласа (6.2)

$$p\,(0 \leqslant \xi \leqslant \beta) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - 10\,000 \cdot 0{,}8}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 10\,000 \cdot 0{,}8}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - 8000}{40}\right) + \Phi\,(200)\right].$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - 8000}{40}\right) + \Phi\,(200)\right] = 0{,}999.$$

Практически $\Phi\,(200) = 1$, поэтому

$$\Phi\left(\frac{\beta - 8000}{40}\right) + 1 = 1{,}998. \quad \Phi\left(\frac{\beta - 8000}{40}\right) = 0{,}998.$$

По таблице находим, что $0{,}998 = \Phi\,(3{,}09)$, т. е.

$$\frac{\beta - 8000}{40} = 3{,}09; \quad \beta = 8124.$$

Таким образом, максимальное число книг, проданных в течение дня с вероятностью 0,999, равно 8124.

7.130. Какова вероятность $\bar{p}$ того, что в 10 000 независимых испытаниях частота наступления события будет иметь отклонение от его вероятности $p = 0{,}36$ не более чем на 0,01?

Решение. Искомая вероятность вычисляется по формуле (6.4). Здесь $n=10\,000$, $p=0{,}36$, $q=0{,}64$, $\varepsilon=0{,}01$, тогда

$$t=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=0{,}01\cdot\sqrt{\frac{10\,000}{0{,}36\cdot 0{,}64}}=2{,}08.$$

Отсюда

$$\bar{p}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}36\right|<0{,}01\right)\approx\Phi(2{,}08)=0{,}9625.$$

7.131. Вероятность приема некоторого сигнала равна $p=0{,}72$. Определить, каково должно быть общее количество принятых сигналов, чтобы частота приема этого сигнала отличалась от вероятности его приема не более чем на $\varepsilon=0{,}1$ с надежностью $\bar{p}=0{,}95$?

Решение. Воспользуемся формулой (6.4). У нас $p=0{,}72$; $q=0{,}28$; $\Phi(t)=0{,}95$. По таблице для $\Phi(t)$ находим, что $\Phi(1{,}96)=0{,}95$. Поэтому $t=1{,}96$. Теперь, воспользовавшись выражением для $t=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, находим n:

$$1{,}96=0{,}1\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}72\cdot 0{,}28}},$$

откуда $n=19{,}6^2\cdot 0{,}72\cdot 0{,}28\approx 76{,}8$. Так как n должно быть целым, то общее количество принятых сигналов равно 77.

7.132. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

7.133. Вероятность некоторого события равна 1/3. Производится 45 000 опытов. Каково вероятное отклонение* числа l появлений события от среднего значения?

7.134. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,4. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет отклоняться от вероятности ее не более чем на 0,1?

7.135. Вероятность p некоторого события при каждом испытании равна 0,6. Сколько раз достаточно повторить испытание, чтобы можно было ожидать, что частота появления события будет отклоняться от вероятности его не более чем на $\varepsilon=0{,}05$ с надежностью $\bar{p}=0{,}9$?

---

* Под вероятным отклонением случайной величины ξ понимается число l, удовлетворяющее условию:

$$p(|\xi-M\xi|<l)=0{,}5.$$

ГЛАВА VIII

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. МЕТОД ФУРЬЕ

§ 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что однородное линейное уравнение 2-го порядка

$$L(y) = A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y = 0, \tag{1.1}$$

где функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $A(x)$ не обращается в нуль на этом отрезке, имеет общее решение вида:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые * частные решения (1.1); C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения

$$L(y) = A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y = f(x) \tag{1.2}$$

с теми же условиями на функции A, B, C и непрерывной правой частью $f(x)$ записывается в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x),$$

где $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (1.1), а $\tilde{y}(x)$ — некоторое частное решение полного уравнения (1.2).

Для уравнений (1.1) или (1.2) в общем курсе рассматривалась задача Коши. В ней требуется из всех решений уравнения выделить то, которое в фиксированной точке $x = x_0$ из $[a, b]$ удовлетворяет начальным данным Коши:

$$y(x_0) = c,\ y'(x_0) = d.$$

При условиях, наложенных выше на коэффициенты уравнения (1.1) и (1.2), решение задачи Коши существует и единственно при любом выборе чисел c, d и точки x_0 отрезка $[a, b]$. Находится оно путем подстановки общего решения в начальные условия и определения соответствующих значений констант C_1 и C_2.

В ряде задач для уравнений (1.1) и (1.2) требуется найти решения, которые в двух фиксированных точках, концах отрезка $[a, b]$ удовлетворяют определенным *краевым условиям.*

---

* Для уравнений 2-го порядка это равносильно тому, что

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C\ (\text{const}).$$

Мы будем рассматривать краевые условия вида

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = c,$$
$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = d \tag{1.3}$$

и краевые условия типа периодичности: *

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b). \tag{1.4}$$

Краевые условия называются *однородными*, если $c = 0$ и $d = 0$. (Условия (1.4) однородные.) Решение однородного уравнения при однородных краевых условиях называется решением *однородной краевой задачи*. В том случае, когда либо уравнение, либо краевые условия неоднородны, говорят о решении неоднородной краевой задачи.

Чтобы решить краевую задачу, надо: 1) найти общее решение уравнения; 2) подставить его в краевые условия (при этом получается система двух уравнений для определения констант C_1 и C_2); 3) найти, если это возможно, константы C_1 и C_2.

Мы предполагали ранее, что $A(x) \neq 0$ в точках отрезка $[a, b]$. Точка $x = x_0$ называется особой точкой дифференциального уравнения (1.1) или (1.2), если $A(x_0) = 0$.

Мы будем допускать в дальнейшем существование особых точек только на концах отрезка $[a, b]$. При этом если, например, $x = a$ — особая точка, $A(a) = 0$, то краевое условие в этой точке заменяется требованием ограниченности (или, наоборот, требованием роста) решения при $x \to a$.

Отметим одно существенное отличие в постановке начальной и краевой задачи. В первой из них не требуется, чтобы решение было определено на всем отрезке $[a, b]$, лишь бы оно существовало в некоторой окрестности начальной точки x_0. До концов отрезка это решение может и не дойти, обратившись, например, в какой-то точке в бесконечность. Напротив, по самому смыслу краевой задачи искомое решение должно быть определено на всем отрезке $[a, b]$. Уже отсюда ясно, что краевая задача далеко не всегда разрешима. Теорема единственности для нее также, вообще говоря, не соблюдается, что будет видно в дальнейшем из приведенных примеров.

Однородная краевая задача всегда имеет решение $y = 0$, которое не представляет интереса. Поэтому говорят, что *однородная краевая задача разрешима, если она допускает хотя бы одно нетривиальное, т. е. ненулевое, решение* $y = \varphi(x)$. В таком случае функция $y = C\varphi(x)$ при любом значении постоянной C также будет решением. Следовательно, нетривиальные решения однородной краевой задачи разыскиваются с точностью до постоянного множителя.

8.1. Дано $y'' + y = 0$, решить следующие краевые задачи:
1) $y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 3) $y(0) = 1,\ y(\pi) = 2$;
2) $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 4) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$.

Решение. Уравнение имеет постоянные коэффициенты, поэтому для определения линейно независимых частных решений запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 1 = 0,\ k_{1,2} = \pm i.$$

---

* Условия вида (1.3), (1,4) являются частными случаями общих краевых условий, которые для уравнений (1.1) и (1.2) записываются так:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) + \gamma y(b) + \delta y'(b) = c,$$
$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y(b) = d.$$

Этим корням отвечают решения $y_1(x)=\cos x$ и $y_2(x)=\sin x$, так что общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

а) Подставляя общее решение в краевые условия 1, получаем

$$\begin{aligned} &C_1\cos 0+C_2\sin 0=1,\\ &C_1\cos\tfrac{\pi}{2}+C_2\sin\tfrac{\pi}{2}=0, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1=1,\\ C_2=0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y=\cos x$ — единственное решение краевой задачи 1.

б) Задача с краевыми условиями 2 является соответствующей однородной задачей для задачи 1.

Система уравнений для определения констант C_1, C_2 в этом случае запишется так:

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=0,\\ C_1\cos\tfrac{\pi}{2}+C_2\sin\tfrac{\pi}{2}=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1=0,\\ C_2=0, \end{cases}$$

так что однородная задача имеет только тривиальное решение.

в) Подставляя общее решение в краевые условия 3, получаем

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=1,\\ C_1\cos\pi+C_2\sin\pi=2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1=1,\\ -C_1=2. \end{cases}$$

Система противоречива. Краевая задача 3 не разрешима.

г) Задача с краевыми условиями 4 является соответствующей однородной для задачи 3.

Система в этом случае запишется так:

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=0,\\ C_1\cos\pi+C_2\sin\pi=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1=0,\\ -C_1=0. \end{cases}$$

Таким образом $C_1=0$, а C_2 — произвольное число. Любая функция вида $y=C\sin x$ является решением задачи 4.

8.2. При каких значениях параметра λ разрешима однородная краевая задача

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=0?$$

Решение. Здесь надо рассмотреть три случая: $\lambda>0$, $\lambda=0$, $\lambda<0$, от которых зависит вид общего решения данного уравнения.

Пусть $\lambda<0$. Положим $\lambda=-\mu^2$ $(\mu>0)$ и запишем характеристическое уравнение

$$k^2-\mu^2=0,\quad k_{1,2}=\pm\mu.$$

Этим корням соответствуют следующие функции: $y_1(x)=e^{\mu x}$ и $y_2(x)=e^{-\mu x}$ и общее решение вида

$$y(x)=C_1e^{\mu x}+C_2e^{-\mu x}.$$

Подставляя это решение в краевые условия, получаем

$$C_1+C_2=0,$$
$$C_1e^{\mu\pi}+C_2e^{-\mu\pi}=0.$$

Определитель этой однородной системы $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\mu\pi} & e^{-\mu\pi}\end{vmatrix}=e^{-\mu\pi}-e^{\mu\pi}$ отличен от нуля при $\mu\neq 0$, поэтому система имеет только тривиальное решение $C_1=0$, $C_2=0$, и поставленная краевая задача не разрешима при $\lambda<0$.

Пусть $\lambda=0$. Характеристическое уравнение $k^2=0$ имеет кратные корни $k_{1,2}=0$, поэтому общее решение запишется в виде $y=C_1x+C_2$. Подставляя это решение в краевые условия, получаем систему

$$\begin{aligned}&C_1\cdot 0+C_2=0,\\ &C_1\cdot\pi+C_2=0,\end{aligned}\quad\text{или}\quad C_1=0,\ C_2=0,$$

имеющую только нулевое решение.

Пусть $\lambda>0$. Положим $\lambda=\alpha^2$, $\alpha>0$. Характеристическое уравнение примет вид

$$k^2+\alpha^2=0,\quad k_{1,2}=\pm i\alpha.$$

Этим корням отвечают решения $y_1(x)=\cos\alpha x$ и $y_2(x)=\sin\alpha x$, поэтому общее решение запишется в виде $y=C_1\cos\alpha x+C_1\sin\alpha x$. Подставляя это решение в краевые условия, получаем следующую систему:

$$\begin{cases}C_1\cos\alpha\cdot 0+C_2\sin\alpha\cdot 0=0,\\ C_1\cos\alpha\pi+C_2\sin\alpha\pi=0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}C_1=0,\\ C_2\sin\alpha\pi=0.\end{cases}$$

Данная система имеет ненулевые решения только в том случае, если $\sin\alpha\pi=0$. Последнее равенство при $\alpha>0$ выполняется для бесконечной последовательности чисел

$$\alpha_n=n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Таким образом, рассматриваемая краевая задача разрешима для бесконечной последовательности чисел

$$\lambda_n=\alpha_n^2=n^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

и соответствующими решениями этой задачи являются функции

$$y_n(x)=C\sin nx.$$

8.3. Найти решения уравнения Бесселя нулевого порядка

$$xy''+y'+xy=0$$

при краевых условиях:

$$y(0) \text{ — ограничено,}$$

$$y(l) = 1.$$

(Точка $x = 0$ является особой для уравнения).

Решение. Линейно независимыми частными решениями уравнения являются функция Бесселя 1-го рода $J_0(x)$ и функция Бесселя 2-го рода — $Y_0(x)$. Общее решение запишется так:

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x).$$

Функция $Y_0(x) \to -\infty$ при $x \to 0$ (см. гл. IV, § 3, формула (3.6)), поэтому из условия ограниченности решения в точке $x = 0$ следует, что $C_2 = 0$, так как иначе решение было бы неограниченным по абсолютной величине при $x \to 0$. (Заметим, что $J_0(0) = 1$).

Учитывая, что $C_2 = 0$, подставим решение во второе краевое условие:

$$C_1 J_0(l) = 1.$$

Это уравнение разрешимо только в том случае, когда $J_0(l) \neq 0$, т. е. значение l не является нулем функции $J_0(x)$.

Итак, если $J_0(l) \neq 0$, то $C_1 = \frac{1}{J_0(l)}$, и решение задачи запишется в виде

$$y(x) = \frac{1}{J_0(l)} \cdot J_0(x).$$

8.4. Найти решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = e^x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

8.5. Разрешима ли однородная краевая задача

$$y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(2) = 0?$$

Какая имеется связь между данной краевой задачей и задачей 8.4?

8.6. Определить, для каких значений l разрешима однородная краевая задача

$$xy'' + y' + xy = 0; \quad y(l) = 0, \quad y(0) \text{ — ограничено.}$$

(Сравните с решением задачи 8.3).

8.7. Определить, для каких значений параметра λ разрешима однородная краевая задача

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 0.$$

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Задачи на собственные функции линейного дифференциального оператора 2-го порядка. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(y) = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y$ (с прежними условиями на его коэффициенты) * и поставим краевую задачу одного из указанных в § 1 видов для уравнения

$$L(y) = -\lambda y. \tag{2.1}$$

Значения λ, при которых эта задача разрешима, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения $y(x)$ — *собственными функциями* оператора $L(y)$ или, что то же, уравнения (2.1).

При решении задач на собственные функции оператор $L(y)$ преобразуют к другому, более удобному, виду

$$L(y) = \frac{1}{\rho(x)}\{[p(x)y']' - q(x)y\}.$$

Уравнение (2.1) преобразуется при этом к виду

$$[p(x)y']' - q(x)y = -\lambda\rho(x)y. \tag{2.2}$$

Функции $p(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ выражаются через коэффициенты оператора $L(y)$ по формулам **:

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x}\frac{B(x)}{A(x)}dx}, \quad \rho(x) = \frac{p(x)}{A(x)}, \quad q(x) = -C(x)\rho(x). \tag{2.3}$$

Функция $\rho(x)$ называется *весовой функцией* оператора $L(y)$.

Для уравнения (2.2) в этом пункте рассматриваются две однородные краевые задачи:

I. *Задача Штурма — Лиувилля с краевыми условиями*

$$\begin{aligned} &\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0),\\ &\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \qquad (\gamma^2 + \delta^2 \neq 0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

II. *Краевая задача с условиями типа периодичности*

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b). \tag{2.5}$$

Если точка $x = a$ является особой для дифференциального уравнения (2.2), т. е. $p(a) = 0$, то краевые условия (2.4) следует заменить на одно из требований:

$$y(a) \text{ — ограничено}, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \tag{2.4'}$$

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)| = \infty, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \tag{2.4''}$$

Разумеется, аналогичную замену надо сделать, если особая точка $x = b$.

В теоретических курсах доказывается, что собственные значения поставленных краевых задач образуют бесконечную последовательность неотрицательных чисел ***:

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \tag{2.6}$$

---

* Предполагаем только, что $A(x) > 0$ на рассматриваемом интервале (a, b). Это, очевидно, не ограничивает общности, так как иначе мы изменили бы знак у оператора $L(y)$.

** На интервале (a, b) $p(x) > 0$ и $\rho(x) > 0$ (см. предыдущую сноску).

*** Здесь существенно используется предположение $A(x) > 0$. Если бы $A(x) < 0$, то все λ_n были бы неположительными.

причем $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Решение, отвечающее числу λ_n, называют n-й собственной функцией и обозначают y_n.

Для задачи I (Штурма — Лиувилля) каждому собственному числу λ_n соответствует только одна собственная функция $y_n(x)$ (с точностью до постоянного множителя). В случае задачи II одному собственному значению могут соответствовать две линейно независимые собственные функции.

8.8. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи (задача I):

$$y'' = -\lambda y, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Решение. Из (2.6) вытекает, что $\lambda \geqslant 0$. То же самое получается и непосредственно (см. 8.2 и 8.7). При этом значение $\lambda = 0$ исключается, так как всякое решение уравнения $y'' = 0$ есть прямая $y = C_1 x + C_2$, которая не может дважды пересечь ось Ox и поэтому заданным краевым условиям не удовлетворяет.

Пусть $\lambda = \alpha^2$. Общее решение уравнения $y'' = -\alpha^2 y$ имеет вид $y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$. Из краевых условий получаем $C_1 = 0$, $\sin \alpha l = 0$, т. е. $\alpha l = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$ и, следовательно, собственные значения и собственные функции данной краевой задачи таковы:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad y_n = \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Постоянную C_2 мы не выписываем, поскольку собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя.

8.9. Найти систему собственных функций краевой задачи (задача II)

$$y'' = -\lambda y; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$$

Решение. Из (2.6) вытекает, что все собственные числа неотрицательны. Пусть сначала $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$. Общее решение уравнения будет $y(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$. Подставляя его в краевые условия, получаем после приведения подобных членов следующую систему уравнений для C_1 и C_2:

$$C_1(\cos 2\pi\alpha - 1) + C_2 \sin 2\pi\alpha = 0,$$

$$-C_1 \alpha \sin 2\pi\alpha + C_2 \alpha (\cos 2\pi\alpha - 1) = 0.$$

Определитель этой системы $\Delta = 2\alpha(1 - \cos 2\pi\alpha)$. Очевидно, что однородная краевая задача разрешима только при условии $\Delta = 0$. Для определения собственных чисел находим α_n — корни уравнения $2\alpha(1 - \cos 2\pi\alpha) = 0$ при $\alpha > 0$. Очевидно, что

$$\alpha_n = n \text{ и } \lambda_n = \alpha_n^2 = n^2, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Заметим далее, что при $\alpha_n = n$ системе условий, наложенных на C_1 и C_2, удовлетворяют *любые* значения констант C_1 и C_2. Поэтому при любых C_1, C_2 функция $C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$ будет

собственной и, в частности, пара функций $\cos nx$ и $\sin nx$ образует систему линейно независимых собственных функций, соответствующих собственному числу $\lambda_n = n^2$. Поскольку значения C_1, C_2 для каждого n могут быть своими, то обозначим их a_n и b_n, тогда собственная функция $y_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Остается рассмотреть случай $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $y'' = 0$ имеет вид $y(x) = C_2^* + C_1^* x$. Подставляя это решение в краевые условия, получаем, что $C_1^* = 0$, а C_2^* — любое. Таким образом, числу $\lambda_0 = 0$ соответствует одна собственная функция $y_0(x) = 1$ (с точностью до константы).

Оба результата можно объединить одной формулой:

$$\lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что собственную функцию $y_n(x)$ записывают часто по-другому:

$$y_n(x) = A_n \sin(nx + \varphi_n), \quad \left(A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \ \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}\right).$$

Если считать, что x — время, то $y_n(x)$ определяет гармоническое колебание с амплитудой A_n, начальной фазой φ_n и периодом $T_n = \frac{2\pi}{n}$.

8.10. Определить весовую функцию оператора

$$\mathrm{L}(y) = y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{\nu^2}{x^2} y$$

($x = 0$ — особая точка).

Найти систему собственных функций краевой задачи

$$\mathrm{L}(y) = -\lambda y, \quad y(0) \text{ — ограничено}, \quad y(l) = 0.$$

Решение. По формулам (2.3) при $x > 0$

$$p(x) = e^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = x, \quad \rho = x, \quad q(x) = \frac{\nu^2}{x^2} x = \frac{\nu^2}{x},$$

так что весовая функция $\rho(x) = x$ и уравнение $\mathrm{L}(y) = -\lambda y$ эквивалентно уравнению (см. (2.2))

$$(xy')' - \frac{\nu^2}{x} y = -\lambda x y.$$

Нетрудно проверить, что подстановкой $t = x\sqrt{\lambda}$ уравнение преобразуется к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) y = 0.$$

Запишем общее решение уравнения Бесселя

$$y(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t),$$

где $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Возвращаясь к переменной x, получим общее решение исходного уравнения

$$y(x)=C_1J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)+C_2Y_\nu(\sqrt{\lambda}\,x).$$

Подставим это решение в краевые условия. Так как при $x\to 0$ функция Y_ν бесконечно возрастает (гл. IV, § 3, п. 1), то из ограниченности решения в нуле следует, что $C_2=0$. Второе краевое условие дает уравнение для определения собственных значений:

$$y(l)=C_1J_\nu(\sqrt{\lambda}\,l)=0,\ \text{т. е. } J_\nu(\sqrt{\lambda}\,l)=0.$$

Обозначим $\alpha_{\nu,n}$ — n-й положительный нуль функции $J_\nu(x)$ и $\lambda_{\nu,n}$ — n-е собственное значение краевой задачи. Из уравнения $J_\nu(\sqrt{\lambda}\,l)=0$ получим

$$\sqrt{\lambda_{\nu,n}}\cdot l=\alpha_{\nu,n},\ \text{или } \lambda_{\nu,n}=\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{l}\right)^2,$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

ν — фиксированное число (не обязательно целое). Запишем собственные функции краевой задачи

$$y_{\nu,n}(x)=J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{l}\cdot x\right),\ n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Заметим, что при $\nu>0$ корнем является и $\alpha_{\nu,0}=0$. Однако ему отвечает тривиальное решение $y=0$, которое не считается собственной функцией.

8.11. Доказать, что оператор Лежандра

$$\mathrm{L}(y)=(1-x^2)y''-2xy'\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

имеет весовую функцию $\rho(x)=1$. Установить, что собственными функциями краевой задачи

$$\mathrm{L}(y)=-\lambda y,\quad y(-1)\ \text{и}\ y(1)\ \text{— ограничены}$$

являются многочлены Лежандра (гл. IV, § 4) и только они.

Решение. Для данного оператора по формулам (2.3)

$$p(x)=e^{\int_0^x\frac{-2x}{1-x^2}dx}=1-x^2,\quad \rho(x)=\frac{1-x^2}{1-x^2}=1.$$

Приступая к решению поставленной краевой задачи, отметим прежде всего, что вид краевых условий обусловлен тем, что $x=1$ и $x=-1$ являются особыми точками оператора Лежандра. Известно (гл. IV, § 4), что многочлены Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяют уравнению Лежандра при $\lambda_n=n(n+1)$. Краевые условия также соблюдаются, так как многочлены — непрерывные функ-

ции. Поэтому $P_n(x)$ образуют систему собственных функций данной краевой задачи, отвечающих собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Покажем, что других собственных функций эта краевая задача не имеет. Почленным дифференцированием и подстановкой в данное уравнение $Ly = -\lambda y$ доказывается, что сумма следующего степенного ряда есть одно из его частных решений:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{k+1},$$

$$a_{k+1} = \frac{(\nu+1)\ldots(\nu+k+1)(-\nu)(\nu+1)\ldots(-\nu+k)}{[(k+1)!]^2},$$

где обозначено $\lambda = \nu(\nu+1)$. Покажем, что при $\nu \neq 1, 2, \ldots$ это решение ограничено при $x = 1$ и неограничено при $x = -1$. (При $\nu = 1, 2, \ldots$ $y_1(x)$ совпадает с многочленами Лежандра). Преобразуем коэффициент при a_{k+1}, перемножая попарно скобки в числителе $(\nu+m)(-\nu+m) = m^2 - \nu^2$. Запишем

$$a_{k+1} = \frac{(\nu+1)\ldots(\nu+k+1)(-\nu)(-\nu+1)\ldots(-\nu+k)}{[(k+1)!]^2} =$$

$$= \frac{-\nu(\nu+k+1)(1-\nu^2)\ldots(k^2-\nu^2)}{[(k+1)!]^2}$$

и, продолжая преобразования, получаем

$$a_{k+1} = \frac{-\nu(\nu+k+1)(k!)^2\left(1-\frac{\nu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)}{[(k+1)!]^2} =$$

$$= -\frac{\nu}{k+1}\cdot\left(1+\frac{\nu}{k+1}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right).$$

Обозначим

$$C_k(\nu) = (1-\nu^2)\left(1-\frac{\nu^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right).$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} C_k(\nu) = C(\nu)$.

Очевидно

$$\ln C_k(\nu) = \sum_{m=1}^{k} \ln\left(1-\frac{\nu^2}{m^2}\right)$$

и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \ln C_k(\nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{\nu^2}{m^2}\right).$$

Ряд справа сходится $\left(\text{сравнить с рядом } \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)$, поэтому предел слева существует, но тогда существует и искомый предел

$$C(\nu) = \lim_{k\to\infty} C_k(\nu) = e^{\lim\limits_{k\to\infty} \ln C_k(\nu)}.$$

Продолжая преобразования выражения для a_{k+1}, получаем окончательно

$$a_{k+1} = -\frac{\nu\left(1+\frac{\nu}{k+1}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{1}\right)\left(1-\frac{\nu^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)}{k+1} \sim -\frac{\nu C(\nu)}{k+1}.$$

при $k \to \infty$

В силу предельного признака сравнения с гармоническим рядом ряд для $y_1(x)$ расходится при $x = -1$*, $\lim\limits_{x \to -1} |y(x)| = +\infty$. Вследствие неограниченности при $x = -1$ ни $y_1(x)$, ни $C_1 y_1(x)$ не удовлетворяют данной краевой задаче.

Всякое же другое решение может быть представлено в виде (см. задачу 4.181)

$$y(x) = y_1(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)\, y_1^2(x)} + C_1 y_1(x)$$

и так как y_1 ограничено в точке $x = 1$, то $y(x)$ имеет логарифмическую особенность в этой точке $\left(\int \frac{dx}{1-x} = \ln|x-1| + C\right)$ и не может удовлетворять краевому условию ограниченности при $x = 1$. Значит, при $\nu \neq 1, 2, \ldots$ краевая задача неразрешима.

8.12. Доказать, что всякие две собственные функции задачи Штурма — Лиувилля (2.2), (2.4), отвечающие разным собственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ (см. гл. I, § 1, п. 3).

Решение. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — собственные функции, отвечающие собственным числам λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Запишем, что эти функции удовлетворяют уравнению (2.2) при соответствующем значении λ:

$$(py_1')' - qy_1 = -\lambda_1 \rho y_1,$$

$$(py_2')' - qy_2 = -\lambda_2 \rho y_2.$$

Умножаем первое уравнение на y_1, второе — на y_2 и вычитаем:

$$y_2 (py_1')' - y_1 (py_2')' = (\lambda_2 - \lambda_1)\, \rho y_1 y_2.$$

Интегрируя на отрезке $[a, b]$ по частям, получим

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b \rho(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx = \int_a^b y_2 (py_1')'\, dx -$$

$$- \int_a^b y_1 (py_2')'\, dx = y_2 p y_1' \Big|_a^b - \int_a^b p y_1' y_2' - y_1 p y_2' \Big|_a^b +$$

$$+ \int_a^b p y_1' y_2'\, dx = [p(y_2 y_1' - y_1 y_2')]_{x=b} - [p(y_2 y_1' - y_1 y_2')]_{x=a} = 0,$$

---

* Если, конечно, $\nu \neq 1, 2, \ldots$, иначе ряд превращается в многочлен.

так как обе указанные подстановки равны нулю. В самом деле, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на конце $x=b$ удовлетворяют равенствам

$$\gamma y_1(b)+\delta y_1'(b)=0,$$
$$\gamma y_2(b)+\delta y_2'(b)=0.$$

Ввиду того, что хотя бы одно из чисел γ, δ отлично от нуля, определитель этой системы относительно γ, δ равен нулю, т. е.

$$y_1(b)\,y_2'(b)-y_2(b)\,y_1'(b)=0.$$

Аналогичное равенство имеет место и при $x=a$.
Далее, по условию $\lambda_2\neq\lambda_1$, поэтому из доказанного равенства следует

$$\int_a^b \rho(x)\,y_1(x)\,y_2(x)\,dx=0,$$

т. е. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$.

8.13. Пусть $x=a$ — особая точка уравнения (2.2), т.е. $p(a)=0$. Предполагая, что $p'(a)\neq 0$, показать справедливость утверждения задачи **8.12** для краевых условий вида (2.41) (ограниченность решения при $x=a$).

Указание. Из уравнения (2.2) получить ограниченность $y'(a)$ и применить метод решения задачи **8.12**.

8.14. В предположении $p(a)=p(b)$ установить справедливость утверждения задачи **8.12** для краевой задачи II — (2.2), (2.5).

8.15. Найти собственные числа и функции краевых задач

а) $y''=-\lambda y$, $\alpha y(0)+\beta y'(0)=0$, $\gamma y(l)+\delta y'(l)=0$;

б) $y''=-\lambda y$, $y'(0)=0$, $y'(l)=0$.

Записать решение б как частный случай а.

8.16. Найти собственные числа и функции оператора $L(y)$ задачи **8.10** при краевых условиях

а) $y(0)$ — ограничено, $y'(b)=0$;

б) $y(0)$ — ограничено, $\alpha y(b)+\beta y'(b)=0$.

8.17. Найти собственные числа и функции оператора Лежандра (задача **8.11**) при краевых условиях

а) $y(1)$ — ограничено, $y(0)=0$;

б) $y(1)$ — ограничено, $y'(0)=0$.

8.18. Найти собственные числа и функции краевых задач для уравнения

$$x^2y''+2xy'-m(m+1)\,y=-\lambda x^2y$$

(m — фиксированное, целое положительное число).

а) $y(0)$ — ограничено, $y(b)=0$;

б) $y(0)$ — ограничено, $y'(b)=0$.

Указание. 1) Ввести новое независимое переменное $t=\sqrt{\lambda}\,x$. 2) Сделать замену $y(t)=\frac{u(t)}{\sqrt{t}}$, показать, что функция $u(t)$ является решением уравнения Бесселя порядка $\nu=m+\frac{1}{2}$.

2. Собственные функции оператора Лапласа. Пусть D — ограниченная область в пространстве или на плоскости. Обозначим Γ — границу области D, при этом будем считать, что Γ состоит из конечного числа гладких связных частей Γ_i (рис. 150, 151). Область D вместе с границей обозначается $\bar{D}$.

Задача отыскания собственных значений и собственных функций *оператора Лапласа** в области D ставится следующим образом: определить зна-

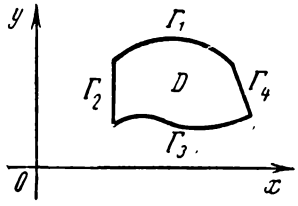


Рис. 150

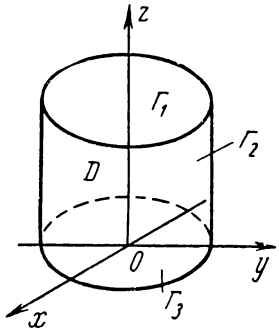


Рис. 151

чения параметра λ *(собственные значения)*, при которых разрешима однородная краевая задача для уравнения вида

$$\Delta u=-\lambda u(P) \tag{2.7}$$

при краевых условиях:

$$\left(\alpha_i u(P)+\beta_i\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_i}=0, \tag{2.8}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, P — точка области D, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к Γ_i, совокупность Γ_i при $1\leqslant i\leqslant k$ образует полную границу Γ области D; числа α_i, β_i берутся независимым образом на разных частях границы Γ. Решения краевой задачи (2.7), (2.8) называются *собственными функциями* оператора Лапласа.

Сравнительно легко построить систему собственных функций в том случае, когда удается «расщепить» уравнение (2.7) и краевые условия (2.8) на ряд задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В декартовой, полярной, цилиндрической и сферической системах координат всегда можно «расщепить» уравнение (2.7), т. е. найти его решения в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного переменного. Для того чтобы одновременно с уравнением расщеплялись бы и краевые условия (2.8), необходимо, чтобы каждое Γ_i было бы частью коор-

* Определение оператора Лапласа и его выражение в различных системах координат см. в гл. II, § 5, п. 3.

динатной поверхности (линии) одной из систем координат, перечисленных выше. Так, например, если D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, то краевые условия расщепляются в декартовой системе координат; если D — круг, кольцо, круговой или кольцевой сектор, то расщепить краевые условия удается в полярной системе координат и т. д.

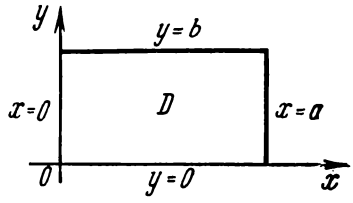


Рис. 152

8.19. Построить систему собственных функций для уравнения (2.7) в прямоугольнике со сторонами a и b (рис. 152) и при краевом условии

$$u(P)|_{\Gamma}=0.$$

Решение. Используем для решения задачи декартову систему координат xOy. Направим координатные оси вдоль сторон прямоугольника так, как это указано на рис. 152. Запишем уравнение и краевые условия в этой системе координат

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\lambda u\ (x,\ y);$$

$$u(x,\ y)|_{x=0}=0,\quad u(x,\ y)|_{x=a}=0;$$

$$u(x,\ y)|_{y=0}=0,\quad u(x,\ y)|_{y=b}=0.$$

Ищем собственные функции среди функций вида

$$u(x,\ y)=X(x)\cdot Y(y).$$

Подставим такую функцию в данное уравнение. Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Y(y)\,X''(x)\quad\text{и}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)\,Y''(y),\ \text{то}$$

$$Y\cdot X''+X\cdot Y''=-\lambda X\cdot Y.$$

Разделим обе части равенства на $X\cdot Y$:

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\lambda.$$

Каждое слагаемое в левой части равенства должно быть постоянным числом. Действительно, записывая это равенство в виде $\frac{X''}{X}=-\lambda-\frac{Y''}{Y}$, замечаем, что правая часть не зависит от x, а левая — от y. Поэтому в силу равенства ни та, ни другая не зависят от обоих переменных, т. е. обе — постоянны.

$$\frac{X''}{X}=-\alpha\quad\text{и}\quad\frac{Y''}{Y}=-\beta\qquad(\alpha,\ \beta=\text{const}).$$

При этом $\alpha+\beta=\lambda$. Таким образом, данное уравнение в декартовой системе координат расщепляется на два обыкновенных уравнения.

Подставляя теперь функцию $u(x, y) = X(x) Y(y)$ в краевые условия, на сторонах $x = 0$ и $x = a$ прямоугольника получаем

$$u(x, y)|_{x=0} = X(0) \cdot Y(y) = 0,$$
$$u(x, y)|_{x=a} = X(a) \cdot Y(y) = 0.$$

Из этих равенств следует, что $X(0) = 0$ и $X(a) = 0$. Аналогичным образом из краевых условий на сторонах прямоугольника $y = 0$, $y = b$ следует, что $Y(0) = 0$, $Y(b) = 0$.

В результате наша краевая задача свелась к решению двух задач на собственные значения для обыкновенных уравнений. Одна краевая задача

$$X'' = -\alpha X; \quad X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

и другая

$$Y'' = -\beta Y; \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Собственные числа и функции каждой из этих задач уже известны (см. 8.8):

$$\alpha_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\beta_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b}, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку $\lambda = \alpha + \beta$ и $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, то собственные числа и функции исходной краевой задачи записываются следующим образом:

$$\lambda_{n,m} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad u_{n,m}(x, y) = \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b}.$$

$$(n, m = 1, 2, \ldots)$$

8.20. Построить систему собственных функций краевой задачи

$$\Delta u = -\lambda u, \quad u(P)|_\Gamma = 0$$

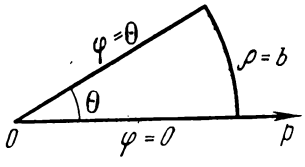


Рис. 153

а) для круга радиуса $\rho = b$;

б) для кругового сектора радиуса b и раствора Θ.

Решение. В обоих случаях области ограничены координатными линиями полярной системы координат, поэтому для решения задачи следует использовать эту систему координат. Направим полярную ось вдоль стороны сектора так, как это указано на рис. 153. Запишем

уравнение и краевые условия в координатах ρ и φ:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\lambda u(\rho, \varphi)$$

а) $u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

б) $u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = 0$, $u(\rho, \varphi)|_{\varphi=0} = 0$ $u(\rho, \varphi)|_{\varphi=0} = 0$.

Ищем решения данного уравнения среди функций вида $u(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$. Подставим такую функцию в уравнение и затем умножим обе части равенства на $\rho^2/R\Phi$:

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \lambda\rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Левая часть здесь зависит только от ρ, а правая — только от φ. Поскольку обе части равны, то обе они должны быть постоянными.

Обозначим эту постоянную ν. В результате получим два обыкновенных уравнения:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \lambda\rho^2 = \nu, \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\nu. \qquad \text{(II)}$$

Каждое из этих уравнений надо решить при соответствующих краевых условиях.

Подставим функцию $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ в краевые условия для задачи а).

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = R(b) \cdot \Phi(\varphi) = 0.$$

Отсюда следует, что $R(b) = 0$. Так как в круге $0 \leqslant \rho \leqslant b$, то должно быть еще условие при $\rho = 0$. Оно вытекает из требования гладкости $U(\rho, \varphi)$ в круге. Действительно, значение $\rho = 0$ является особым для уравнения (I), поэтому роль краевого условия в этой точке должно играть требование ограниченности функции $R(\rho)$. Таким образом, краевые условия для уравнения (I) запишутся так: $R(0)$ — ограничено, $R(b) = 0$.

Далее, из непрерывности функций $u(\rho, \varphi)$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi)$ следует, что функции $\Phi(\varphi)$ и $\Phi'(\varphi)$ должны быть периодическими с периодом 2π. Поэтому уравнение (II) надо решать при краевых условиях:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi); \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

Используя решение задачи **8.9**, запишем собственные числа и

функции краевой задачи для уравнения (II):

$$\nu_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где A_n и B_n — произвольные числа.

Собственные функции краевой задачи для уравнения (I) найдены в задаче 8.10. При $\nu = n$ имеем

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\alpha_{n,m}}{b}\right)^2, \quad R_{n,m}(\rho) = J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}\rho}{b}\right),$$

где $\alpha_{n,m}$ — m-й положительный нуль функции $J_n(x)$. Окончательно, собственные числа и функции задачи а) записываются так:

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\alpha_{n,m}}{b}\right)^2, \quad u_{n,m}(\rho, \varphi) = J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}\rho}{b}\right) \times$$

$$\times [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Перейдем к решению задачи б). Краевые условия для функции $R(\rho)$ очевидно те же, что и в задаче а), а функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\Theta) = 0.$$

Собственные числа и функции последней краевой задачи (см. 8.8):

$$\tilde{\nu}_n = \frac{n^2\pi^2}{\Theta^2}, \quad \tilde{\Phi}_n(\varphi) = \sin\frac{n\pi\varphi}{\Theta}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Собственные числа и функции краевой задачи для уравнения (I) при $\nu = \frac{n^2\pi^2}{\Theta^2}$:

$$\tilde{\lambda}_{n,m} = \left(\frac{\alpha_{\frac{n\pi}{\Theta},m}}{b}\right)^2, \quad \tilde{R}_{n,m}(\rho) = J_{\frac{n\pi}{\Theta}}\left(\frac{\alpha_{\frac{n\pi}{\Theta},m}\rho}{b}\right),$$
$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

где $\alpha_{\frac{n\pi}{\Theta},m}$ — m-й положительный корень уравнения $J_{\frac{n\pi}{\Theta}}(x) = 0$. Запишем собственные функции краевой задачи б)

$$\tilde{u}_{n,m}(\rho, \varphi) = J_{\frac{n\pi}{\Theta}}\left(\frac{\alpha_{\frac{n\pi}{\Theta},m}\rho}{b}\right) \cdot \sin\frac{n\pi\varphi}{\Theta},$$
$$n = 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots.$$

8.21. Построить систему собственных функций краевой задачи

$$\Delta u = -\lambda u; \quad u|_\Gamma = 0$$

для шара радиуса a.

Решение. В сферической системе координат уравнение и

краевое условие запишутся так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\lambda u,$$

$$u(a,\ \theta,\ \varphi)=0 \text{ при } 0\leqslant\varphi<2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

При подстановке функции вида

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)=R(r)\cdot T(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$$

в уравнение и краевое условие получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения, которые надо решить (в том порядке, как они написаны) при соответствующих краевых условиях:

$$\Phi''=-\nu\Phi,\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi); \tag{I}$$

$$T''+\operatorname{ctg}\theta\cdot T'+\left(\mu-\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)T=0, \tag{II}$$

$T(0)$ — ограничено, $T(\pi)$ — ограничено

(последнее уравнение после замены $x=\cos\theta$ превращается в уравнение для присоединенных функций Лежандра, которое имеет две особые точки $x=\pm 1$, соответствующие значениям $\theta=0$ и $\theta=\pi$);

$$r^2R''+2rR'+(\lambda r^2-\mu)R=0, \tag{III}$$

$R(a)=0$, $R(0)$ — ограничено.

Используя последовательно результаты задач **8.9**, **8.11**, **8.18 а**, находим собственные функции данной краевой задачи:

$$u_{m,n,k}=\cos m\varphi\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{n+1/2}\left(\alpha_{n+1/2,k}\cdot\frac{r}{a}\right),$$

$$v_{m,n,k}=\sin m\varphi\cdot P_n^m(\cos\theta)\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{n+1/2}\left(\alpha_{n+1/2,k}\cdot\frac{r}{a}\right),$$

где $\alpha_{n+1/2,k}$ — k-й положительный корень уравнения $J_{n+1/2}(x)=0$, $m=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ \ n=m,\ m+1,\ldots;\ \ k=1,\ 2,\ 3,\ldots$.

В задачах с **8.22** по **8.27** требуется найти системы собственных функций для уравнения $\Delta u=-\lambda u$ при заданных краевых условиях на границе области D.

8.22. D — прямоугольник со сторонами $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Краевые условия:

а) $u(x,\ 0)=u(x,\ b)=0$; $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ y)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a,\ y)=0$;

б) $u(x,\ 0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ b)=0$; $u(0,\ y)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a,\ y)=0$;

в) $u(x,\ 0)=0$, $u(x,\ b)=0$; $u(0,\ y)+h\frac{\partial u(0,\ y)}{\partial x}=0$,

$$u(a,\ y)+h\frac{\partial u(a,\ y)}{\partial x}=0.$$

Указание. Следует использовать результаты задачи 8.15.

8.23. D — прямоугольный параллелепипед, ограниченный следующими плоскостями: $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$. Краевые условия:

а) $u(x, y, z)|_{\Gamma}=0$ (Γ — полная поверхность области D);

б) $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z)|_{\Gamma}=0$;

в) $u(0, y, z)=u(x, 0, z)=u(x, y, 0)=0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y, z)=\frac{\partial u}{\partial y}(x, b, z)=\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, c)=0.$$

8.24. D — круг радиуса b. Краевые условия

$$\alpha u(b, \varphi)+\beta\frac{\partial u}{\partial \rho}(b, \varphi)=0.$$

8.25. D — круговой сектор радиуса b и раствора α (рис. 158). Краевые условия:

а) $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0$ (Γ — полная граница сектора);

б) $u(\rho, 0)=0$, $\frac{\partial u(\rho, \alpha)}{\partial \varphi}\Big|_{\Gamma}=0$, $u(b, \varphi)=0$.

8.26. D — круговое кольцо с внутренним радиусом $\rho=a$ и внешним радиусом $\rho=b$. Краевые условия:

а) $u|_{\Gamma}=0$; б) $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0$; в) $u(a, \varphi)=0$, $\frac{\partial u(b, \varphi)}{\partial \rho}=0$.

8.27. D — шар радиуса a. Краевое условие: $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=0$.

3. Разложение функций в ряд Фурье по системе собственных функций. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... — ортогональная с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ система функций, т. е.

$$\int_a^b u_n(x)\, u_m(x)\, \rho(x)\, dx=0 \qquad (n\neq m).$$

Обозначим $c_n=\| u_n(x)\|$ норму функции $u_n(x)$ (см. гл. I, § 1, п. 3), т. е.

$$c_n=\| u_n(x)\|=\sqrt{\int_a^b u_n^2(x)\, \rho(x)\, dx}. \tag{2.9}$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ дана некоторая функция $f(x)$. Ее *коэффициентами Фурье* по ортогональной системе $\{u_n(x)\}$ называются числа

$$a_n=\frac{1}{c_n^2}\int_a^b f(x)\, u_n(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{2.10}$$

а ряд

$$a_1u_1(x)+a_2u_2(x)+\ldots+a_nu_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n(x)$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ *. Сходимость ряда Фурье к функции $f(x)$ зависит от свойств системы $\{u_n(x)\}$ и от выбора функции $f(x)$. В этом пункте в качестве $\{u_n(x)\}$ мы будем брать систему собственных функций краевых задач, рассмотренных выше. В таком случае для достаточно широкого класса функций (например, для всех тех, у которых существует норма $\|f(x)\|$, в частности непрерывных) *можно гарантировать сходимость ряда Фурье в среднем* к $f(x)$. Это значит, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b |f(x)-S_N(x)|^2\rho(x)\,dx=0,$$

где $S_N(x)=a_1u_1(x)+\ldots+a_Nu_N(x)$ — частичная сумма ряда Фурье. Если же функция $f(x)$ не только непрерывна, но и имеет непрерывные (или кусочно-непрерывные) производные 1-го и 2-го порядка на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет, кроме того, тем же краевым условиям, что и собственные функции $u_n(x)$, то

$$f(x)=a_1u_1(x)+\ldots+a_nu_n(x)+\ldots, \tag{2.11}$$

причем сходимость ряда Фурье к $f(x)$ абсолютная и равномерная на $[a, b]$. В дальнейшем мы рассматриваем только функции $f(x)$, удовлетворяющие этим требованиям, поэтому между $f(x)$ и ее рядом Фурье будем ставить знак равенства.

Заметим, что все сказанное дословно повторяется и для системы собственных функций оператора Лапласа на плоскости или в пространстве. Разница лишь в том, что вместо отрезка $[a, b]$ надо брать плоскую или пространственную область D, а определенный интеграл по $[a, b]$ заменять двойным или тройным интегралом по области D.

8.28. Разложить функцию $f(x)=1-\frac{x^2}{b^2}$ на отрезке $[0, b]$ в ряд по собственным функциям $y_n(x)=J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right)$, α_n — n-й по величине нуль функции $J_0(x)$.

Решение. Функции $y_n(x)=J_0\left(\alpha_n\frac{x}{b}\right)$ являются собственными функциями краевой задачи, рассмотренной в **8.10** ($\nu=0$). Эти функции ортогональны с весом $\rho(x)=x$. Вычислим квадрат нормы собственных функций:

$$c_n^2=\left\|J_0\left(\alpha_n\frac{x}{b}\right)\right\|^2=\int_0^b J_0^2\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right)x\,dx=b^2\int_0^1 tJ_0^2(\alpha_n t)\,dt=$$

$$=\frac{b^2}{2}[J_0'(\alpha_n)]^2=\frac{b^2}{2}J_1^2(\alpha_n).$$

Здесь была произведена подстановка $x=tb$ и использованы результаты задач **4.149** и **4.110**.

Находим коэффициенты Фурье функции $f(x)=1-\frac{x^2}{b^2}$ по

* Иногда говорят «обобщенный ряд Фурье», называя рядом Фурье только разложение по тригонометрической системе.

формуле (2.10)

$$a_n = \frac{2}{b^2 J_1^2(\alpha_n)} \cdot \int_0^b \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \cdot J\left(\alpha_n \frac{x}{b}\right) \cdot x dx.$$

В интеграле произведем замену переменного $t = \alpha_n \cdot \frac{x}{b}$:

$$a_n = \frac{2}{b^2 J_1^2(\alpha_n)} \cdot \frac{b^2}{\alpha_n^2} \int_0^{\alpha_n} t\left(1 - \frac{t^2}{\alpha_n^2}\right) J_0(t)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \left[\int_0^{\alpha_n} t J_0(t)\, dt - \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{\alpha_n} t^3 J_0(t)\, dt\right].$$

Два последних интеграла вычисляются методом, рассмотренным в гл. IV, § 3, п. 4. Предоставляя читателю подробные выкладки, приведем результаты:

$$\int_0^{\alpha_n} t J_0(t)\, dt = t J_1(t) \Big|_0^{\alpha_n} = \alpha_n J_1(\alpha_n),$$

$$\int_0^{\alpha_n} t^3 J_0(t)\, dt = [t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t)] \Big|_0^{\alpha_n} = \alpha_n^3 J_1(\alpha_n) - 2\alpha_n^2 J_2(\alpha_n).$$

Последнее выражение можно несколько упростить, используя рекуррентную формулу (см. **4.111**)

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x).$$

Так как $J_0(\alpha_n) = 0$*, то $J_2(\alpha_n) = \frac{2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n)$ и

$$\int_0^{\alpha_n} t^3 J_0(t)\, dt = \alpha_n^3 J_1(\alpha_n) - 4\alpha_n J_1(\alpha_n).$$

Подставляя значения интегралов в формулу для a_n, получим

$$a_n = \frac{2}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \left\{\alpha_n J_1(\alpha_n) - \frac{1}{\alpha_n^2} [\alpha_n^3 J_1(\alpha_n) - 4\alpha_n J_1(\alpha_n)]\right\} = \frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}.$$

Запишем разложение (2.11) функции $f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2}$ в ряд Фурье по системе функций $\left\{J_0\left(\alpha_n \frac{x}{b}\right)\right\}$:

$$1 - \frac{x^2}{b^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} J_0\left(\frac{\alpha_n}{b} x\right).$$

---

* Напомним, что α_n — нули функции $J_0(x)$.

8.29. Доказать, что фундаментальные сферические функции ортогональны на поверхности сферы, вычислить нормы этих функций.

Решение. *Фундаментальными сферическими функциями* называются функции вида

$$Y_n^m(\theta,\ \varphi) = \cos m\varphi \cdot P_n^m(\cos\theta)$$

и

$$Y_n^{-m}(\theta,\ \varphi) = \sin m\varphi \cdot P_n^m(\cos\theta),$$

где $P_n^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра (гл. IV, § 4). Обозначим

$$A_{n,\ k}^{m,\ l} = \iint\limits_S Y_n^m(\theta,\ \varphi) \cdot Y_k^l(\theta,\ \varphi)\, dS,$$

где S — поверхность сферы радиуса R. Элемент площади dS на сфере $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Расставим пределы интегрирования по сфере и для определенности будем считать, что $m > 0$ и $l > 0$. Запишем

$$A_{n,\ k}^{m,\ l} = R^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos m\varphi \cdot \cos l\varphi d\varphi \cdot \int\limits_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta)\, P_k^l(\cos\theta) \sin\theta d\theta,$$

или после замены $x = \cos\theta$,

$$A_{n,\ k}^{m,\ l} = R^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos m\varphi \cdot \cos l\varphi d\varphi \int\limits_{-1}^{1} P_n^m(x) \cdot P_k^l(x)\, dx.$$

Интеграл разбит на произведение двух определенных интегралов. Очевидно, что при $m \neq l$ числа $A_{n,\ k}^{m,\ l} = 0$ в силу ортогональности тригонометрических функций, а если $m = l$ и $n \neq k$, то $A_{n,\ k}^{m,\ l} = 0$ в силу ортогональности функций Лежандра одного и того же порядка (см. **4.201**).

Вычислим квадрат нормы $Y_n^m(\theta,\ \varphi)$:

$$\| Y_n^m(\theta,\ \varphi) \|^2 = A_{n,\ n}^{m,\ m} = R^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi \int\limits_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2\, dx =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad \text{при } m \neq 0 \text{ (см. 4.201).}$$

$$\| Y_n^0(\theta,\ \varphi) \|^2 = R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{4\pi R^2}{2n+1} \text{ (см. 4.196).}$$

8.30. На поверхности S единичной сферы задана функция

$$f(\theta) = \begin{cases} u_1 & \text{при } 0 \leqslant \theta < \pi/2, \\ u_2 & \text{при } \pi/2 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Написать разложение этой функции в ряд Фурье по сферическим функциям.

Решение. Исходная функция не зависит от φ, поэтому в разложении функции $f(\theta)$ должны участвовать только сферические функции вида $Y_n^0 = P_n(\cos\theta)$. Таким образом,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta).$$

Вычисляем коэффициенты разложения по формулам

$$a_n = \frac{1}{\| Y_n^0 \|^2} \iint_S f(\theta) Y_n^0(\theta)\, dS\ *,$$

где S — поверхность единичной сферы и $dS = \sin\theta d\theta d\varphi$. При $R = 1$ (задача 8.29) $\| Y_n^0 \|^2 = \frac{4\pi}{2n+1}$,
поэтому

$$a_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Делая замену $\cos\theta = x$ и учитывая, что $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, получаем

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\left[u_2 \int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx + u_1 \int_0^1 P_n(x)\, dx\right] =$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[u_2 \int_0^1 P_n(-t)\, dt + u_1 \int_0^1 P_n(x)\, dx\right].$$

В первом интеграле произведена замена $x = -t$. При $n = 2k$ функция $P_n(x)$ четная, так что оба интеграла одинаковы. Вследствие результата задачи **4.204** эти интегралы равны нулю. Поэтому $a_{2k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как $P_0(x) = 1$, то $a_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}$.

При $n = 2k+1$ ввиду нечетности $P_n(x)$ и результата задачи **4.204**

$$a_{2k+1} = \frac{4k+3}{2}(u_1 - u_2) \int_0^1 P_{2k+1}(x)\, dx =$$

$$= \frac{4k+3}{2}(u_1 - u_2) \frac{(-1)^k}{4k+3} \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} = \frac{(-1)^k (u_1 - u_2)}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}.$$

---

* Можно было бы вычислить коэффициенты a_n, пользуясь ортогональностью системы функций $P_n(\cos\theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на отрезке $[0, \pi]$ с весом $\sin\theta$. Ортогональность этих функций следует из ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) \cdot P_m(\cos\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)\, dx = 0$$

при $n \neq m$, $x = \cos\theta$.

Таким образом, разложение данной функции $f(\theta)$ в ряд Фурье по системе сферических функций имеет вид

$$f(\theta) = a_0 P_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta) =$$

$$= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)!!} P_{2k+1}(\cos\theta).$$

8.31. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leqslant x \leqslant c; \\ \frac{l-x}{l-c} \cdot h, & c \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

в ряд Фурье по системе функций:

а) $u_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

б) $v_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

8.32. Разложить функцию $f(x) = x(l-x)$ в ряд Фурье по системе функций $u_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$

8.33. Функция $f_\varepsilon(x - x_0)$ принимает постоянное значение $\frac{1}{2\varepsilon}$ на интервале $(x_0, -\varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и вне этого интервала равна нулю. Разложить $f_\varepsilon(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, l)$ $(0 < x_0 < l)$ по системе функций: а) $u_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$; б) $u_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$.

8.34. В прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ разложить функцию $f(x, y) = xy(a-x)(b-y)$ в ряд по системе функций

$$u_{n,m}(x, y) = \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}.$$

8.35. В круге радиуса b разложить функцию $f(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi$ в ряд по собственным функциям краевой задачи **8.24**, считая, что $\alpha = 0$.

8.36. В шаре радиуса a разложить функцию $f(r, \theta, \varphi) = r$ в ряд по собственным функциям задачи **8.27**.

8.37. На поверхности единичной сферы разложить функцию $f(\theta, \varphi) = \cos\theta$ в ряд по сферическим функциям.

§ 3. МЕТОД ФУРЬЕ

1. Решение однородных задач для уравнений гиперболического и параболического типов. Рассмотрим однородные уравнения вида

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad \text{— волновое уравнение (гиперболический тип)} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{— уравнение теплопроводности, диффузии (параболический тип)} \tag{3.2}$$

Постановка задачи. Найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее на границе области D краевым условиям вида:

$$\left(\alpha_i u(P, t)) + \beta_i \frac{\partial u(P, t)}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_i} = 0 \tag{3.3}$$

(совокупность Γ_i образуют полную границу Γ области D) и начальным условиям:

$$u(P, t)|_{t=0} = \varphi(P) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P, t)\Big|_{t=0} = \varphi_1(P) \tag{3.5}$$

(P — точка области D).

Для уравнения (3.2) требуется найти решение, удовлетворяющее краевым условиям (3.3) и начальному условию (3.4).

В областях, допускающих разделение переменных, решение уравнения (3.1) может быть найдено методом Фурье по следующей схеме.

а) Ищутся всевозможные частные решения уравнения (3.1) вида

$$u(P, t) = v(P) \cdot T(t).$$

В результате подстановки функции такого вида в уравнение (3.1) получаем

$$\frac{1}{a^2} vT'' = T\Delta v \quad \text{или} \quad \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{\Delta v}{v}.$$

Последнее уравнение расщепляется на два уравнения:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\lambda \ (\text{const}) \quad \text{или} \quad \Delta v(P) = -\lambda v(P) \tag{3.6}$$

и

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda \quad \text{или} \quad T'' = -\lambda a^2 T(t). \tag{3.7}$$

б) Для уравнения (3.6) решается задача на собственные значения при краевых условиях

$$\left(\alpha_i v(P) + \beta_i \frac{\partial v(P)}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_i} = 0. \tag{3.3'}$$

Обозначаем λ_n — собственные числа и $v_n(P)$ — собственные функции оператора Лапласа.

в) Уравнение (3.7) решается для значений $\lambda = \lambda_n$. Общее решение этого уравнения записывается так:

$$T_n(t) = A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t.$$

г) Произведения функций $v_n(P)$ и $T_n(t)$

$$v_n(P)\,(A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t)$$

образуют частные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие краевым условиям (3.3). В силу линейности уравнения и однородности краевых условий линейная комбинация таких частных решений является решением уравнения (3.1) и также удовлетворяет краевым условиям (3.3). Запишем это решение

$$u(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(P)\,(A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t). \tag{3.8}$$

д) Подставляя решение (3.8) в начальные условия (3.4), (3.5), определяем значения коэффициентов A_n и B_n, пользуясь разложением функций $\varphi(P)$ и

$\psi(P)$ в ряды по системе собственных функций $\{v_n(P)\}$:

$$u(P, 0) = \varphi(P) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(P),$$

где A_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(P)$ находятся по формулам:

$$A_n = \frac{1}{\| v_n \|^2} \int_D \varphi(P)\, v_n(P)\, dP, \tag{3.9}$$

$$\left.\frac{\partial u(P, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(P) = \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_n} B_n v_n(P),$$

где B_n находятся по формулам

$$B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\, \| v_n(P) \|^2} \int_D \psi(P) \cdot v_n(P)\, dP. \tag{3.10}$$

Решение уравнения (3.2) получается применением этой же схемы с той лишь разницей, что вместо уравнения (3.7) надо решать уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = -\lambda \text{ или } T' = -a^2\lambda T \tag{3.7'}$$

и вместо формулы (3.8) в этом случае имеем формулу

$$u(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n t} \cdot v_n(P). \tag{3.8'}$$

8.38. Решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(уравнение колебания струны) при краевых условиях

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0$$

(концы струны закреплены) и начальных условиях

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) = x \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x) = 0.$$

Решение. Ищем всевозможные частные решения вида $u(x, y) = X(x) \cdot T(t)$. Функция $X(x)$ при этом является решением краевой задачи:

$$X'' = -\lambda X; \quad X(0) = 0; \quad X(l) = 0,$$

а функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению (3.7).

Решения краевой задачи для функции $X(x)$ уже известны (задача 8.8)

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}; \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Подставляя в формулу (3.8) найденные выражения собственных функций и чисел, получаем

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi t}{l}+B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Определяем коэффициенты A_n и B_n по начальным данным. Областью D является интервал $(0,\ l)$ и $\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\frac{l}{2}$.

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx}_{dv}=$$

$$=\frac{2}{l}\left[x\cdot\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l+\frac{l}{n\pi}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Очевидно, что $B_n=0$, так как $\psi(x)=0$.

Окончательно запишем решение задачи:

$$u(x,\ t)=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\frac{an\pi t}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

8.39. Доказать, что решение задачи 8.38 для произвольной функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, может быть представлено в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[\varphi^*(x+at)+\varphi^*(x-at)\right],$$

где $\varphi^*(x)$ определяется функцией $\varphi(x)$ следующим образом: сначала $\varphi(x)$ нечетно продолжается на интервал $(-l,\ 0)$ и затем

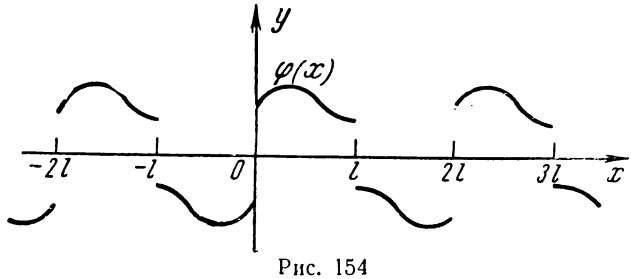


Рис. 154

функция, определенная на интервале $(-l,\ l)$, продолжается периодически, $T=2l$, на всю числовую ось (рис. 154).

Решение. Искомая функция $u(x,\ t)$ в ходе решения задачи 8.38 была записана в виде

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t<\infty,$$

где A_n — коэффициенты в разложении функции $\varphi(x)$ на интервале $(0, l)$ в ряд по синусам. Хорошо известно, что этот ряд Фурье вне интервала $(0, l)$ при $t=0$ представляет функцию $\varphi^*(x)$. Таким образом, во всех точках непрерывности функции $\varphi^*(x)$ имеет место равенство

$$\varphi^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad -\infty<x<\infty.$$

Используя формулу

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

запишем ряд для $u(x, t)$ в форме

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}(x+at)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi(x-at)}{l}.$$

Далее, принимая во внимание разложение функции $\varphi^*(x)$, имеем окончательно

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[\varphi^*(x+at)+\varphi^*(x-at)].$$

8.40. Решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

(уравнение колебания плоской мембраны) при краевом условии

$$u(\rho, \varphi, t)|_{\rho=b}=0$$

(мембрана закреплена по краю круга) и начальных условиях

$$u(\rho, \varphi, t)|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, t)\Big|_{t=0}=1-\frac{\rho^2}{b^2}.$$

Решение. Краевые и начальные условия не зависят от φ, можно ожидать, что и решение не будет зависеть от φ. Пусть $u(\rho, t)=R(\rho)T(t)$. Функции $R(\rho)$ являются при этом собственными функциями краевой задачи

$$\frac{R''+\frac{1}{\rho}R'}{R}=-\lambda, \text{ или } \rho R''+R'=-\lambda\rho R,$$

$$R(0) \text{ — ограничено}, \quad R(b)=0.$$

Как было найдено в задаче **8.10**,

$$\lambda_n=\left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2 \text{ и } R_n(\rho)=J_0\left(\alpha_n\frac{\rho}{b}\right),$$

где α_n — n-й по величине нуль функции $J_0(x)$.

Функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению (3.7) при $\lambda=\lambda_n$. Подставляя в формулу (3.8) найденные собственные функции и числа, получаем решение уравнения в виде

$$u(\rho,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\alpha_n t}{b}+B_n\sin\frac{a\alpha_n t}{b}\right)J_0\left(\alpha_n\frac{\rho}{b}\right).$$

Очевидно, что $A_n=0$, так как при $t=0$ $u(\rho,\ 0)=0$.

Коэффициенты B_n вычисляем по формуле (3.10), D — интервал $(0,\ b)$, весовая функция ρ, $\Psi(P)=1-\frac{\rho^2}{b^2}$

$$B_n=\frac{b}{a\alpha_n\left\|J_0\left(\frac{\alpha_n\rho}{a}\right)\right\|^2}\int_0^b\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right)J_0\left(\frac{\alpha_n\rho}{b}\right)\rho d\rho=\frac{b}{a\alpha_n}a_n,$$

где a_n — коэффициенты, вычисленные в задаче 8.28. Запишем окончательный результат:

$$u(\rho,\ t)=\frac{8b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^4J_1(\alpha_n)}\cdot\sin\frac{a\alpha_n t}{b}\cdot J_0\left(\frac{\alpha_n\rho}{b}\right).$$

В задачах 8.41 и 8.42 требуется решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

при однородных краевых условиях на концах интервала $(0,\ l)$ и при начальных условиях:

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=\varphi_1(x).$$

8.41. $u(0,\ t)=0$, $u(l,\ t)=0$, $\varphi(x)=0$,

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{l}{2};\\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x<l.\end{cases}$$

Указание. Использовать результат задачи 8.31б.

8.42.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,\ t)=0,\quad \varphi(x)=x(l-x),\quad \varphi_1(x)=0.$$

Указание. Использовать результат задачи 8.32.

В задачах с 8.43 по 8.45 требуется решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

при однородных краевых условиях на концах интервала $(0,\ l)$ и начальном условии $u(x,\ 0)=\varphi(x)$.

8.43. $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $\varphi(x) = T_0$.

8.44. $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$, $\varphi(x) = T_0$.

8.45. $\alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$,
$\varphi(x)$ — произвольная функция.

В задачах с **8.46** по **8.50** требуется решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

при однородных краевых условиях на границе Г области D при начальных условиях

$$u(P, t)|_{t=0} = \varphi(P), \quad \left.\frac{\partial u(P, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(P).$$

8.46. D — прямоугольник: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

$u(x, y)|_\Gamma = 0$, $\varphi(x, y) = Axy(a - x)(b - y)$, $\varphi_1(x, y) = 0$.

8.47. D — прямоугольник: $0 \leqslant x \leqslant d$, $0 \leqslant y \leqslant b$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=d} = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0, \quad \varphi_1(x, y) = Ax(d - x).$$

8.48. D — кольцо: $b_1 \leqslant \rho \leqslant b_2$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

$$u|_\Gamma = 0, \quad u(\rho, \varphi, t)|_{t=0} = f(\rho, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, t)|_{t=0} = f_1(\rho, \varphi).$$

8.49. D — сектор: $0 \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad u(\rho, \varphi, t)|_{t=0} = f_1(\rho, \varphi); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv 0$$

8.50. D — шар: $0 \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $u|_\Gamma = 0$, $\varphi(P) = r$, $\varphi_1(P) \equiv 0$.

В задачах с **8.51** по **8.53** требуется решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

при однородных краевых условиях на границе Г области D и при начальном условии $u(P, t)|_{t=0} = \varphi(P)$.

8.51. D — прямой параллелепипед: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$; $u(P, t)|_\Gamma = 0$, $u(P, t)|_{t=0} = T_0$.

8.52. D — цилиндр: $0 \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$, $u(\rho, \varphi, z, t)|_{z=0} = u(\rho, \varphi, z, t)|_{z=h} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0$, $u(P, t)|_{t=0} = T_0$.

8.53. D — шар радиуса b

$$u|_\Gamma = 0, \quad u(P, t)|_{t=0} = r.$$

2. Решение уравнения Лапласа. Будем решать уравнение

$$\Delta u = 0 \text{ (уравнение Лапласа, эллиптический тип)} \qquad (3.11)$$

в плоской или пространственной области D с границей Г. Решения уравнения Лапласа называются *гармоническими функциями.*

Для уравнения (3.11) рассматриваются следующие краевые задачи.

Найти гармоническую функцию в области D, которая на границе удовлетворяет условию

$$u(P)|_{\Gamma} = f(P)$$

— *задача Дирихле*, или условию

$$\left.\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \psi(P)$$

— *задача Неймана*, или краевому условию вида

$$\alpha_i u(P)|_{\Gamma_i} + \beta_i \left.\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} = f_i(P)$$

— *смешанная краевая задача.*

Функция $\psi(P)$ в условии Неймана не может быть произвольной, она должна удовлетворять требованию

$$\int_{\Gamma} \psi(P)\, dP = 0,$$

поскольку это условие выполнено для любой гармонической в области функции.

В силу линейности уравнения и краевых условий можно утверждать, что если функцию $f(P)$ в условии Дирихле представить в виде

$$f(P) = f_1(P) + f_2(P),$$

то и решение задачи запишется в виде суммы решений, соответствующих функциям $f_1(P)$ и $f_2(P)$. Аналогичные утверждения справедливы для задачи Неймана и смешанной краевой задачи.

В областях, допускающих разделение переменных в уравнении Лапласа, поставленные краевые задачи могут быть решены методом Фурье.

8.54. Решить задачу Дирихле в квадрате $D\{0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant y \leqslant l\}$ при краевых условиях

$$u(x, 0) = u(x, l) = x(l - x).$$
$$u(0, y) = u(l, y) = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение Лапласа в декартовых координатах на плоскости xOy имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ищем частные его решения в виде $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$. Из уравнения получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \ (\text{const}).$$

Следовательно, функция $X(x)$ удовлетворяет уравнению $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ и краевым условиям $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Собственные числа и функции этой задачи известны (см. 8.8):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

При $\lambda = \lambda_n$ для $Y(y)$ получается уравнение

$$Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0,$$

общее решение которого запишем через гиперболические косинус и синус:

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n}\, y + B_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\, y = A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{l} + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{l},$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_n(x, y) = X_n(x)\, Y_n(y) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению Лапласа и нулевым краевым условиям на сторонах $x = 0$ и $x = l$ квадрата. Чтобы удовлетворить и двум другим условиям на сторонах $y = 0$ и $y = l$, рассмотрим ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{l} + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Используя условие $u(x, 0) = x(l - x)$, получим отсюда

$$x(l - x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Следовательно, A_n — коэффициенты разложения функции $x(l - x)$ в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l x(l - x) \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{4l^2}{\pi^3 n^3} (1 - \cos \pi n),$$

так что $A_{2m} = 0$, $A_{2m-1} = \frac{8l^2}{\pi^3 (2m - 1)^3}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Используя условие $u(x, l) = x(l - x)$, получим

$$x(l - x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \pi n + B_n \operatorname{sh} \pi n) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Значит, $A_n \operatorname{ch} \pi n + B_n \operatorname{sh} \pi n$ также являются коэффициентами разложения функции $x(l - x)$ по синусам. Поэтому

$$A_n \operatorname{ch} \pi n + B_n \operatorname{sh} \pi n = A_n,$$

откуда

$$B_n = \frac{1 - \operatorname{ch} \pi n}{\operatorname{sh} \pi n} A_n.$$

Подставляя вычисленные значения A_n, B_n в ряд для $u(x, y)$, получаем искомое решение

$$u(x, y)=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(2m-1)y}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\operatorname{ch}\pi(2m-1)}{\operatorname{sh}\pi(2m-1)}\operatorname{sh}\frac{\pi(2m-1)y}{l}\right]\sin\frac{\pi(2m-1)x}{l}.$$

8.55. Решить смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце с радиусами R_1 и R_2

$$\left.\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi), \quad u(\rho, \varphi)|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi).$$

Решение. Запишем уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

После подстановки в уравнение решения вида $u(\rho, \varphi)=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$ и обычных преобразований получаем следующие уравнения:

$$\Phi''=-\lambda\Phi, \quad \rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0.$$

Первое уравнение решаем при краевых условиях типа периодичности. Собственные функции и числа краевой задачи:

$$\Phi''=-\lambda\Phi; \quad \Phi(0)=\Phi(2\pi), \quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

уже известны (см. 8.9).

$$\lambda_n=n^2, \quad \Phi_n(\varphi)=C_n'\cos n\varphi+C_n''\sin n\varphi,$$

$n=0, 1, 2, \ldots$; C_n', C_n'' — произвольные постоянные.

Уравнение $\rho^2R''+\rho R-\lambda R=0$ решаем при $\lambda=n^2$ $(n\neq 0)$. Это уравнение типа Эйлера. Легко проверить, что двумя линейно независимыми частными решениями этого уравнения будут функции ρ^n и ρ^{-n}, $n=1, 2, \ldots$ и общее решение имеет вид

$$R_n(\rho)=A_n'\rho^n+A_n''\rho^{-n}, \quad n=1, 2, \ldots$$

Общее решение этого уравнения при $\lambda=0$:

$$R_0(\rho)=A_0'+A_0''\ln\rho.$$

Линейная комбинация частных решений, функция вида

$$u(\rho, \varphi)=A_0'+A_0''\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\varphi\,(A_n'\rho^n+A_n''\rho^{-n})+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\varphi\,(B_n'\rho^n+B_n''\rho^{-n})$$

будет представлять решение уравнения Лапласа в кольце. Нам остается распорядиться константами так, чтобы удовлетворить смешанным краевым условиям.

Подставим решение $u(\rho, \varphi)$ в первое краевое условие. Дифференцируя один раз по ρ и полагая затем $\rho = R_1$, имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R_1} = \frac{A_0''}{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \,(nA_n' R_1^{n-1} - nA_n'' R_1^{-n-1}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \,(nB_n' R_1^{n-1} - nB_n'' R_1^{-n-1}) = f_1(\varphi).$$

Обозначим коэффициенты разложения функции $f_1(\varphi)$ в ряд по $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ на интервале $(0, 2\pi)$ через a_n' и b_n'. Запишем

$$a_0' = \frac{A_0''}{R_1},$$
$$a_n' = nA_n' R_1^{n-1} - nA_n'' R_1^{-n-1},$$
$$b_n' = nB_n' R_1^{n-1} - nB_n'' R_1^{-n-1}.$$

Далее подставим решение $u(\rho, \varphi)$ во второе краевое условие:

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=R_2} = A_0' + A_0'' \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \,(R_2^n A_n' + R_2^{-n} A_n'') +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \,(R_2^n B_n' + R_2^{-n} B_n'') = f_2(\varphi).$$

Обозначая коэффициенты Фурье функции $f_2(\varphi)$ через a_n'', b_n'', запишем

$$a_0'' = A_0' + A_0'' \ln R_2,$$
$$a_n'' = R_2^n A_n' + R_2^{-n} A_n'',$$
$$b_n'' = R_2^n B_n' + R_2^{-n} B_n''.$$

Из первых уравнений полученных систем находим, что

$$A_0'' = a_0' R_1, \quad A_0' = a_0'' - a_0' R_1 \cdot \ln R_2.$$

Постоянные A_n', A_n'' находятся из уравнений:

$$a_n' = nR_1^{n-1} A_n' - nR_1^{-n-1} A_n'',$$
$$a_n'' = R_2^n A_n' - R_2^{-n} A_n''.$$

При любых значениях a_n', a_n'' эта система имеет единственное решение, так как определитель системы

$$\Delta_n = \frac{n}{R_1}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n\right] \neq 0 \text{ при } R_1 \neq R_2.$$

Таким образом,

$$A'_n = \frac{a'_n R_2^{-n} + nR_1^{-n-1} a''_n}{\Delta_n}; \quad A''_n = \frac{nR_1^{n-1} a''_n + R_2^n a'_n}{\Delta_n}.$$

Точно так же находятся постоянные B'_n и B''_n:

$$B'_n = \frac{b'_n R_2^{-n} + nR_1^{-n-1} b''_n}{\Delta_n}; \quad B''_n = \frac{nR_1^{n-1} b''_n + R_2^n b'_n}{-\Delta_n}.$$

Подставляя найденные выражения констант в ряд для $u(\rho, \varphi)$, получаем решение поставленной задачи.

Отметим здесь один частный случай. Пусть $R_2 = 0$ и краевое условие при $\rho = 0$ заменяется требованием ограниченности решения. Смешанная краевая задача переходит в задачу Неймана в круге радиуса R_1. В этом случае коэффициенты A''_0, A''_n, B''_n должны быть равны нулю, так как иначе решение было бы неограниченным при $\rho = 0$. При этом $a'_0 = 0$ или $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\, d\varphi = 0$. Это условие является частным случаем общего требования к постановке задачи Неймана, которое отмечалось выше:

$$\int_\Gamma \psi(P)\, dP = 0.$$

8.56. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри сферы радиуса a,

$$u(r, \Theta, \varphi)|_{r=a} = F(\Theta, \varphi).$$

Решение. Уравнение Лапласа запишем в сферических координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \Theta} = 0.$$

После подстановки в уравнение решения вида $u(r, \Theta, \varphi) = R(r)\, T(\Theta)\, \Phi(\varphi)$ и преобразований (см. **8.21**) получаем следующие уравнения:

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = \mu, \tag{I}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\nu, \tag{II}$$

$$\frac{T'' + \operatorname{ctg} \Theta\, T'}{T} + \mu - \frac{\nu}{\sin^2 \Theta} = 0. \tag{III}$$

Уравнение (II) надо решать при краевых условиях типа периодичности (однородные условия)

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

а уравнение (III) при краевых условиях $T(0)$ — ограничено, $T(\pi)$ — ограничено *. Оба краевых условия следуют из гладкости, а значит и ограниченности решения всюду внутри сферы вплоть до границы.

Используя результаты ранее решенных задач, запишем

$$\nu_m = m^2, \quad \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi,$$
$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Решениями краевой задачи для уравнения (III) являются функции Лежандра

$$P_n^m(\cos\Theta)$$

(при $m = 0$ обычные многочлены Лежандра), они соответствуют собственным значениям (см. **8.21**)

$$\mu_{n,m} = n(n+1), \quad \text{где } n = m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots.$$

Далее следует получить общее решение уравнения (I) при $\mu = n(n+1)$. Оно является уравнением типа Эйлера, его частные решения ищутся в виде $R(r) = r^\alpha$. Подставляя такую функцию в уравнение (I), получаем определяющее уравнение для чисел α:

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha = n(n+1).$$

Отсюда

$$\alpha_1 = n, \quad \alpha_2 = -n - 1,$$

и

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n-1}.$$

В результате найдены следующие частные решения уравнения Лапласа, так называемые *шаровые функции*:

$$r^n \cos m\varphi P_n^m(\cos\Theta), \quad r^n \sin m\varphi P_n^m(\cos\Theta),$$
$$r^{-n-1} \cos m\varphi P_n^m(\cos\Theta), \quad r^{-n-1} \sin m\varphi P_n^m(\cos\Theta);$$
$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad n = m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots.$$

Составим линейную комбинацию шаровых функций и покажем, что коэффициенты при них можно выбрать так, чтобы удовлетворить краевым условиям, например условиям Дирихле. Поскольку искомое решение ограничено при $r = 0$, то в разложении участвуют только те шаровые функции, которые ограничены при $r = 0$, именно

$$u(r, \Theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \sum_{n=m}^{\infty} A_{n,m} r^n P_n^m(\cos\Theta) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\varphi \sum_{n=m}^{\infty} B_{n,m} r^n P_n^m(\cos\Theta).$$

---

* Краевые условия такого типа относятся к однородным краевым условиям, так как произведение постоянной C на решение $T(\Theta)$ и сумма решений снова дают решение краевой задачи.

Подставим это решение в условие Дирихле

$$u(r, \Theta, \varphi)|_{r=a} = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \sum_{n=m}^{\infty} A_{n,m} a^n P_n^m (\cos\Theta) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sin m\varphi \sum_{n=m}^{\infty} B_{n,m} a^n P_n^m (\cos\Theta).$$

Отсюда видно, что можно удовлетворить условию Дирихле, определяя коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ следующим образом:

$$A_{n,m} = \frac{1}{a^n \| Y_n^m \|^2} \iint_S F(\Theta, \varphi) \cos m\varphi \cdot P_n^m (\cos\Theta) \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi$$

и

$$B_{n,m} = \frac{1}{a^n \| Y_n^m \|^2} \iint_S F(\Theta, \varphi) \sin m\varphi P_n^m (\cos\Theta) \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi,$$

где S — поверхность единичной сферы.

8.57. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри сферы радиуса a при краевом условии

$$u(r, \Theta, \varphi)|_{r=a} = \begin{cases} 1 + \cos\Theta, & 0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leqslant \Theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Указание. Использовать решение задачи **8.56** и **8.30**. Учесть, что $F(\Theta, \varphi)$ не зависит от φ, т. е. отличными от нуля могут быть только коэффициенты $A_{n,0}$.

8.58. Решить задачу Дирихле в круге радиуса $\rho = b$ при условии, что

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = A \sin^3 \varphi.$$

8.59. Решить задачу Неймана в кольце $b_1 \leqslant \rho \leqslant b_2$ при условиях

$$\left.\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial n}\right|_{\rho=b_1} = A \sin\varphi,$$
$$\left.\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial n}\right|_{\rho=b_2} = B \sin 2\varphi.$$

8.60. Решить смешанную краевую задачу для кольца $b_1 \leqslant \rho \leqslant b_2$ при условиях

$$\left.\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial n}\right|_{\rho=b_1} = A \sin^2 \varphi,$$
$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=b_2} = B \cos\varphi.$$

8.61. Решить задачу Дирихле в прямом цилиндре радиуса b и высоты h при условиях

$$u(\rho, \varphi, z)|_{\rho=b} = A,$$
$$u(\rho, \varphi, z)|_{z=0} = (b^2 - \rho^2) + A,$$
$$u(\rho, \varphi, z)|_{z=h} = 0.$$

8.62. Решить задачу Неймана в шаре радиуса b при условии

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b} = A\cos\Theta.$$

8.63. Решить смешанную краевую задачу в полушаре радиуса b при условиях

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi)\Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$u(r, \Theta, \varphi)\big|_{r=b} = A\cos\Theta\sin\varphi.$$

3. **Решение неоднородных задач.** Будем заниматься решением уравнений вида

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(P, t) \qquad \text{(гиперболический тип)} \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(P; t) \qquad \text{(параболический тип)} \tag{3.13}$$

при неоднородных краевых условиях на границе Γ области D:

$$\alpha_i u(P, t)\big|_{\Gamma_i} + \beta_i \frac{\partial u(P, t)}{\partial n}\Big|_{\Gamma_i} = \psi_i(P, t) \tag{3.14}$$

Решение уравнения (3.12) должно, кроме краевых условий, удовлетворять двум начальным условиям:

$$u(P, t)\big|_{t=0} = \varphi(P), \quad \frac{\partial u(P, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(P), \tag{3.15}$$

а решение уравнения (3.13) — одному начальному условию

$$u(P, t)\big|_{t=0} = \varphi(P).$$

Наряду с уравнениями (3.12) и (3.13) будем заниматься решением уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(P) \qquad \text{(эллиптический тип)} \tag{3.16}$$

при краевых условиях вида (3.14) (конечно, при этом функции не зависят от t).

Решение задачи для уравнения (3.12) производится по следующей схеме.

а) Задача с неоднородными краевыми условиями сводится к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого строится функция $u_1(P, t)$, удовлетворяющая краевым условиям (3.14) и имеющая непрерывные вторые производные.

б) Вводится новая неизвестная функция

$$w(P, t) = u(P, t) - u_1(P, t).$$

Функция $w(P, t)$ удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right) = \Delta u + \Delta u_1 + f(P, t)$$

или

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta w + F(P, t), \tag{3.27}$$

где $F(P, t) = f(P, t) + \Delta u_1 - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$,

однородным краевым условиям и начальным данным вида:

$$w(P, t)|_{t=0} = \varphi(P) - u_1(P, 0) = \varphi^*(P),$$

$$\left.\frac{\partial w(P, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(P) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(P, 0) = \varphi_1^*(P).$$

в) Для уравнения $\Delta v(P) = -\lambda v(P)$ находится система собственных функций $\{v_n(P)\}$ оператора Лапласа при однородных краевых условиях, соответствующих условиям (3.14), т. е. при $\psi_i(P, t) = 0$.

г) Функция $F(P, t)$ разлагается в ряд Фурье по системе $\{v_n(P)\}$

$$F(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot v_n(P), \tag{3.18}$$

где

$$a_n(t) = \frac{1}{\|v_n(P)\|^2} \int_D F(P, t)\, v_n(P)\, dP.$$

д) Решение уравнения (3.17) ищется в виде ряда

$$w(P, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, v_n(P), \tag{3.19}$$

подстановка рядов (3.18), (3.19) в уравнение (3.17) приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{a^2} T_n'' + \lambda_n T_n - a_n(t)\right] v_n(P) \equiv 0$$

(так как $\Delta v_n = -\lambda_n v_n$).

Отсюда в силу ортогональности функций $v_n(P)$ следует, что $T_n(t)$ в (3.19) должны быть решениями уравнения

$$\frac{1}{a^2} T_n'' + \lambda_n T_n = a_n(t). \tag{3.20}$$

Общее решение последнего записывается так:

$$T_n(t) = (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n} t) + \tilde{T}_n \cdot (t), \tag{3.21}$$

где $\tilde{T}_n(t)$ — некоторое частное решение.

е) Коэффициенты A_n и B_n в (3.21) находятся по начальным данным так же, как это делалось в пункте 1 § 3.

Решение задачи для уравнения (3.13) проводится по этой же схеме с той лишь разницей, что функции $T_n(t)$ в формуле (3.19) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{a^2} T_n' + \lambda_n T_n = a_n(t), \tag{3.21'}$$

общее решение которого

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2\lambda_n t} + \tilde{T}_n(t),$$

где $\tilde{T}_n(t)$ — частное решение (3.21').

При решении задачи для уравнения Пуассона из данной схемы выпадает естественным образом пункт е. Числа T_n (от t они не зависят) находятся из уравнения

$$\lambda_n T_n - a_n = 0 \text{ или } T_n = \frac{a_n}{\lambda_n}$$

— это частный случай уравнения (3.20), когда $a_n(t) = a_n$ и $T_n(t) = T_n$.

В этом параграфе мы будем придерживаться описанной схемы решения уравнений и отступать от нее только в том случае, когда структура неоднородного члена уравнения (3.12), (3.13) или (3.16) позволяет усмотреть вид частного решения этого уравнения, и в этом случае следует свести задачу к решению однородного уравнения. Например, уравнение

$$\frac{\partial^2 u(P, t)}{\partial t^2} = \Delta u(P, t) + A \sin \omega t,$$

очевидно, имеет частное решение вида $u_1(t) = -\frac{A}{\omega^2} \sin \omega t$ и разность $(u - u_1)$ удовлетворяет уже однородному уравнению.

8.64. Решить уравнение

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при краевых условиях

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = A$$

и при начальных условиях

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right|_{t=0} = 0.$$

Решение. В качестве функции $u_1(x, t)$ можно взять линейную по x функцию, т. е.

$$u_1(x, t) = Ax;$$

очевидно, что $u_1(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям. Функция $w(x, t) = u(x, t) - u_1(x_1 t)$ должна быть решением исходного уравнения, поскольку $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0$, и удовлетворять однородным краевым условиям

$$w(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

и начальным условиям вида

$$w(x, t)|_{t=0} = -Ax \text{ и } \left.\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Методом п. 1 (см. 8.38) получаем, что

$$w(x, t) = -\frac{8Al}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{2l}.$$

Далее, учитывая, что $u(x, t) = w(x, t) + u_1(x, t)$, запишем окончательный результат

$$u(x, t) = Ax - \frac{8Al}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cdot \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{2l}.$$

8.65. Решить уравнение

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + A(1 - \rho^2) \sin \omega t$$

в круге радиуса 1 при краевом условии

$$u(\rho, \varphi, t)|_{\rho=1} = 0$$

и при нулевых начальных условиях

$$u(\rho, \varphi, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

(описать процесс колебаний плоской круглой мембраны, закрепленной по краю под действием вынуждающей силы пропорциональной функции $(1-\rho^2)\sin\omega t$ и при условии, что в момент времени $t=0$ мембрана находилась в покое).

Решение. В схеме решения данной задачи следует, очевидно, опустить пункты а, б, поскольку краевые условия однородны.

Запишем систему собственных функций оператора Лапласа

$$\Delta v = -\lambda v$$

в круге радиуса $\rho=1$ при условии $v|_{\rho=1}=0$; используя решение задачи 8.20, имеем

$$\lambda_{n,m} = (\alpha_{n,m})^2, \quad v_{n,m}(\rho, \varphi) = J_n(\alpha_{n,m}\rho)(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$

где $\alpha_{n,m}$ — m-й по величине нуль функции $J_n(x)$ и $n=1, 2, \ldots$

Разложим функцию $F(\rho, t) = A(1-\rho^2)\sin\omega t$ в ряд Фурье по системе функций $\{v_{n,m}\}$. В разложении будут участвовать только функции $v_{0,m}$, которые не зависят от φ:

$$F(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) J_0(\alpha_m \cdot \rho),$$

где $\alpha_m = \alpha_{0m}$ и

$$a_m(t) = \frac{\sin\omega t}{\|v_{0,m}\|^2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 A(1-\rho^2) J_0(\alpha_m\rho)\cdot\rho d\rho.$$

Используя результат задачи 8.28, получаем

$$a_m(t) = A\sin\omega t \cdot \frac{8}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)}.$$

Далее надо решить уравнение (3.20)

$$T_m'' + \lambda_m T_m = a_m(t) \text{ при } \lambda_m = \alpha_m^2.$$

Обозначая $Q_m = \frac{8A}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)}$, перепишем уравнение для функции $T_m(t)$.

$$T_m'' + \alpha_m^2 T_m = Q_m \sin\omega t.$$

Общее решение этого уравнения дается формулой (3.21). Структура частного решения $T_m(t)$ зависит от значения ω, если $\omega \neq \alpha_m$

(т. е. число $i\omega$ не является корнем характеристического уравнения $k^2 + \alpha_m^2 = 0$*), то функция $\tilde{T}_m(t)$ имеет вид

$$\tilde{T}_m(t) = L_m \sin \omega t + M_m \cos \omega t.$$

Коэффициенты L_m, M_m находятся обычным способом. В данном случае легко проверить, что $M_m = 0$,

$$L_m = \frac{Q_m}{\alpha_m^2 - \omega^2} \quad \text{и} \quad \tilde{T}_m(t) = \frac{Q_m}{\alpha_m^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Запишем решение задачи в виде ряда (3.19)

$$u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos a\alpha_m t + B_m \sin a\alpha_m t + L_m \sin \omega t) J_0(\alpha_m \rho),$$

$$L_m = \frac{Q_m}{\alpha_m^2 - \omega^2}.$$

Постоянные A_m, B_m определяем по начальным данным

$$u(\rho, t)|_{t=0} = 0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\alpha_m \rho).$$

Отсюда следует, что $A_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$

$$\left.\frac{\partial u(P, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \alpha_m a + \frac{\omega Q_m}{\alpha_m^2 - \omega^2}\right) J_0(\alpha_m \rho).$$

Очевидно, что коэффициенты при $J_0(\alpha_m \rho)$ должны быть равны нулю, т. е.

$$B_m \alpha_m a + \frac{\omega Q_m}{\alpha_m^2 - \omega^2} = 0, \text{ или } B_m = -\frac{\omega Q_m}{a\alpha_m (\alpha_m^2 - \omega^2)}.$$

Подставляя в последнюю формулу $Q_m = \frac{8A}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)}$, получаем

$$B_m = -\frac{8\omega A}{a\alpha_m^4 J_1(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \omega^2)}.$$

Таким образом, в случае, когда частота вынуждающей силы отлична от собственных частот мембраны $\omega \neq \alpha_m$, решение задачи представляется в виде

$$u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8A}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega \cdot \sin a\alpha_m t}{a\alpha_m}\right) J_0(\alpha_m \rho).$$

Рассмотрение случая резонанса ($\omega = \alpha_m$) предоставляем читателю.

---

* Мембрана не резонирует на частоту ω.

В задачах с 8.66 по 8.74 требуется решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(P, t)$$

при заданных краевых условиях на границе Γ области D и при двух начальных условиях

$$u(P, t)|_{t=0} = \varphi(P), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(P, t)|_{t=0} = \varphi_1(P).$$

8.66. D — интервал $(0, l)$, $f(x, t) \equiv 0$, $\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0$.

а) $u(x, t)|_{x=0} = A$, $u(x, t)|_{x=l} = B$,

б) $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = B$.

8.67. D — интервал $(0, l)$, $f(x, t) = A$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0,$$
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0.$$

8.68. D — интервал $(0, l)$, $f(x, t) = A \sin \omega t$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0; \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) = 0.$$

8.69. D — интервал $(0, l)$, $f(x, t) = 0$.

$$u(x, t)|_{x=0} = A \cos \omega t, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0,$$
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0.$$

8.70. D — полукруг радиуса b, $0 \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $f(P, t) = 0$, $u(\rho, \varphi)_{\rho=b} = b \sin \varphi$; $u(\rho, 0) = u(\rho, \pi) = 0$, $\varphi(P) = \varphi_1(P) = 0$.

8.71. D — круг радиуса b. $f(P, t) = A \sin \omega t$, $u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = 0$; $\varphi(P) = \varphi_1(P) = 0$.

8.72. D — полукруг радиуса b, $0 \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $f(p, t) = \rho \sin \varphi \cdot \sin \omega t$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$, $\varphi(P) = \varphi_1(P) = 0$.

8.73. D — цилиндр радиуса b, высоты h.

$$f(P, t) = 0; \quad u(\rho, \varphi, z, t)|_{z=0} = A, \quad u(\rho, \varphi, z, t)|_{\rho=b} = 0$$
$$u(\rho, \varphi, z, t)|_{z=h} = B, \quad \varphi(P) = \varphi_1(P) = 0.$$

8.74. D — сфера радиуса b, $f(P, t) = 0$, $\varphi(P) = \varphi_1(P) = 0$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = A \cos \theta \sin \omega t.$$

В задачах 8.75 и 8.76 требуется решить уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(P, t)$$

при заданных краевых условиях на границе Γ области D и одном начальном условии $u(P, t) = \varphi(P)$.

8.75. D — шар радиуса b и $f(P, t) = 0$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = A, \quad \varphi(P) = B.$$

8.76. D — цилиндр радиуса b и высоты h: $f(P, t) = 0$.

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 0$$

$$u|_{\rho=b} = kt \sin \frac{\pi z}{h}.$$

В задачах **8.77** и **8.78** требуется решить уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(P).$$

в области D при заданных краевых условиях на границе Γ.

8.77. D — параллелепипед $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, $f(P) = A$; $u|_{x=0} = 0$ и $u|_{x=a} = C$, $u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=b} = 0$, $u|_{z=0} = 0$, $u|_{z=c} = 0$.

8.78. D — цилиндр $0 \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$, $f(P) = A$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0$, $u|_{z=h} = \rho \cos \varphi$, $u|_{z=0} = 0$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В этом параграфе рассматриваются решения того же круга задач, что и в § 3, но уже для случая *неограниченной области* D.

Постановка задач для уравнений (3.12), (3.13), (3.16) остается в принципе той же, но исчезают частично или полностью краевые условия. Так, например, если D полоса: $-\infty < x < \infty$ $0 \leqslant y \leqslant b$ (рис. 155), то по переменному y, которое изменяется в конечных пределах, краевые условия будут обычными

$$\left(\alpha_0 u(x, y) + \beta_0 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = \psi_1(x),$$

$$\left(\alpha_1 u(x, y) + \beta_1 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = \psi_2(x),$$

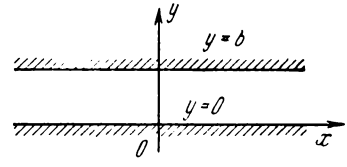


Рис. 155

а по переменному x, область изменения которого не ограничена, краевые условия, естественно, исчезают и заменяются требованием определенного поведения решения при $|x| \to \infty$. В этом параграфе рассматриваются задачи, которые допускают решения в классе функций абсолютно интегрируемых в области D, т. е. таких, что

$$\int_D |f(P)|\, dP < \infty.$$

В основе метода решения таких задач лежит использование преобразования Фурье (см. гл. V).

Схема решения.

а) Делаем преобразование Фурье искомого решения по тем пространственным переменным, которые не ограничены в области D.

б) Записываем уравнение для образа решения. Это уравнение либо обыкновенное по переменному t, либо с частными производными, но область изменения пространственных переменных для него уже является ограниченной.

в) Решаем это вспомогательное уравнение одним из приемов, рассмотренных в § 3, в результате находим выражение для образа искомого решения.

г) Используя формулы обратного преобразования Фурье, находим решение исходного уравнения.

8.79. Найти решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области D: $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$ при начальных данных

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x).$$

Решение. Обозначим образ Фурье искомого решения $u(x, t)$ по переменному x через $U(\alpha, t)$. По определению преобразования Фурье

$$U(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} u(x, t)\, dx.$$

При этом $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ преобразуется в $\frac{d^2 U}{dt^2}$, а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в $(i\alpha)^2 U = -\alpha^2 U$ (см. задачу **5.69**). Преобразуя обе части данного уравнения, получим для функции U обыкновенное дифференциальное уравнение по t (что касается α, то оно входит в него в качестве параметра):

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -a^2\alpha^2 U. \tag{I}$$

Применяя преобразование Фурье и к начальным данным, получим

$$U(\alpha, 0) = \Phi_1(\alpha), \quad \frac{dU(\alpha, 0)}{dt} = \Phi_2(\alpha), \tag{II}$$

где $\Phi_1(\alpha)$ и $\Phi_2(\alpha)$ — образы Фурье функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Итак, для определения U надо решить задачу Коши для уравнения (I) при начальных условиях (II). Общее решение уравнения (I)

$$U(\alpha, t) = C_1(\alpha)\cos(a\alpha t) + C_2(\alpha)\sin(a\alpha t).$$

Из начальных условий (II) находим

$$C_1(\alpha) = \Phi_1(\alpha), \quad C_2(\alpha) = \frac{1}{\alpha a}\Phi_2(\alpha).$$

Таким образом,

$$U(\alpha, t) = \Phi_1(\alpha)\cos(a\alpha t) + \Phi_2(\alpha)\frac{\sin(a\alpha t)}{a\alpha}.$$

Это и есть искомое решение поставленной задачи, только преобразованное по Фурье. Чтобы получить $u(x, t)$, надо сделать обратное преобразование Фурье:

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}U(\alpha, t)\,d\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\Phi_1(\alpha)\cos(a\alpha t)\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\Phi_2(\alpha)\frac{\sin(a\alpha t)}{a\alpha}\,d\alpha.$$

Применяя к первому интегралу формулу а) задачи **5.73**, а ко второму — формулу б), получим окончательно

$$u(x, t)=\frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

8.80. Найти решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t)$$

в области D, где $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant t<\infty$, при нулевых начальных данных

$$u(x, 0)=0,\quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=0.$$

Решение. Обозначим $U(\alpha, t)$ образ Фурье искомого решения $u(x, t)$. Функция $U(\alpha, t)$ удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2U}{dt^2}=-\alpha^2U+F(\alpha, t).$$

($F(\alpha, t)$ — образ Фурье функции $f(x, t)$ по переменной x) и нулевым начальным данным. Требуемое частное решение этого уравнения можно записать в виде*

$$U(\alpha, t)=\frac{1}{a\alpha}\int_0^t F(\alpha, \tau)\sin a\alpha(t-\tau)\,d\tau.$$

Выполним обратное преобразование Фурье

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a\alpha}\int_0^t F(\alpha, \tau)\sin a\alpha(t-\tau)\,d\tau\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha.$$

Изменяя порядок интегрирования, имеем

$$u(x, t)=\frac{1}{a}\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha, \tau)\frac{\sin a\alpha(t-\tau)}{\alpha}e^{i\alpha x}\,d\alpha\right)d\tau.$$

Очевидно, что к внутреннему интегралу применима формула

* Для решения линейного неоднородного уравнения следует применить метод вариации произвольных постоянных.

задачи **5.73 а** (значение параметра $a(t-\tau)$, поэтому можно упростить полученное выражение и записать

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\right)d\tau.$$

В таком интегральном виде представлено искомое решение.

8.81. Найти решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области D, где $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant t<\infty$, при начальном условии

$$u(x,\ t)\,|_{t=0}=\varphi(x).$$

Решение. Образ Фурье $U(\alpha,\ t)$ решения $u(x,\ t)$ в данном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-a^2\alpha^2U$$

и начальному условию

$$U(\alpha,\ 0)=\Phi(\alpha),$$

где $\Phi(\alpha)$ — образ Фурье функции $\varphi(x)$. Решая задачу Коши, получим

$$U(\alpha,\ t)=\Phi(\alpha)\,e^{-a^2\alpha^2t}$$

или, после обращения преобразования Фурье,

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha)\,e^{-a^2\alpha^2t}e^{i\alpha x}\,d\alpha.$$

Заметим, что $e^{-a^2\alpha^2t}$ есть результат преобразования Фурье функции $g(x)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ (см. задачу 5.59), и поэтому $\Phi(\alpha)\,e^{-a^2\alpha^2t}$ — произведение двух образов Фурье. Применяя к нему формулу задачи 5.76, выразим искомое решение в виде свертки начальной функции $\varphi(x)$ и функции $g(x)$, т. е.

$$u(x,\ t)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\varphi(s)\,ds.$$

8.82. Написать решение задачи **8.81**, если

$$\varphi(x)=\begin{cases}T_0 & \text{при } |x|<x_0,\\ 0 & \text{при } |x|>x_0.\end{cases}$$

Решение. Воспользуемся решением задачи **8.81**, подставляя в него данную функцию $\varphi(x)$:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(s)\,ds=\frac{T_0}{a\sqrt{2t}}\int\limits_{-x_0}^{x_0}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\,dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменного, $\tau=\dfrac{x-s}{a\sqrt{2t}}$,

$$u(x,\ t)=T_0\sqrt{2}\int\limits_{\frac{x-x_0}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x+x_0}{a\sqrt{2t}}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\frac{T_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left[\Phi\left(\frac{x+x_0}{a\sqrt{2t}}\right)+\Phi\left(\frac{x-x_0}{a\sqrt{2t}}\right)\right]$$

где $\Phi(\alpha)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\alpha}e^{-\tau^2/2}\,d\tau$ — функция Лапласа (гл. IV, § 2).

8.83. Решить уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

в полубесконечной полосе D, где $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant y\leqslant b$ (рис. 156), при краевых условиях:

$$u(x,\ y)|_{x=0}=0,\qquad u(x,\ y)|_{y=0}=0,\qquad u(x,\ y)|_{y=b}=T_0.$$

Решение. Пусть $U_s(\alpha,\ y)$ — образ искомого решения при синус-преобразовании Фурье по аргументу x. При этом преобра-

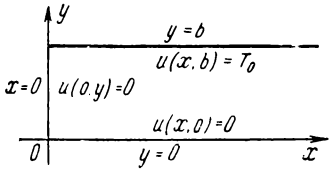


Рис. 156

зовании $\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\to\dfrac{d^2U_s}{dy^2}$, $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\to\alpha^2U_s$. Преобразуя уравнение Лапласа, получим

$$\frac{d^2U_s}{dy^2}=\alpha^2U_s.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$U_s(\alpha,\ y)=C_1(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+C_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y.$$

Исходя из данных краевых условий, надо определить краевые условия для $U_s(\alpha,\ y)$. Ясно, что

$$U_s(\alpha,\ 0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}u(x,\ 0)\sin\alpha x\,dx=0,\ \text{так как}\ u(x,\ 0)=0.$$

Первое краевое условие найдено, но второе краевое условие не удается найти тем же способом, так как постоянная функция $f(x)=T_0$ не интегрируема на оси, не существует интеграл

$$\int_0^\infty T_0 \sin \alpha x \, dx.$$

Однако известно следующее соотношение:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0.$$

Откуда легко получить

$$T_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_0}{\alpha} \sin \alpha x \, d\alpha \quad (x > 0).$$

Последняя формула является формулой обращения синус-представления функции $f(x)=T_0$ при $0<x<\infty$ и из нее находим, что образом этой функции при синус-преобразовании следует считать функцию $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_0}{\alpha}$, т. е.

$$F_S(T_0) = \frac{T_0}{\alpha}.$$

Второе краевое условие для функции $U_S(\alpha, y)$, следовательно, имеет вид

$$U_S(\alpha, b) = \frac{T_0}{\alpha}.$$

Подставим функцию $U_S(\alpha, y)$ в краевые условия

$$U_S(\alpha, 0) = 0 = C_2(\alpha),$$

$$U_S(\alpha, b) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_0}{\alpha} = C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha b + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha b.$$

Отсюда следует, что $C_2(\alpha)=0$, $C_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_0}{\alpha \operatorname{sh} \alpha b}$ и

$$U(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_0 \operatorname{sh} \alpha y}{\alpha \operatorname{sh} \alpha b}.$$

Производя обратное синус-преобразование, получаем

$$u(x, y) = \frac{T_0 \cdot 2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\lambda \operatorname{sh} \alpha b} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

Однако данный интеграл можно выразить через элементарные функции. Сделаем необходимые преобразования. Известно, что

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\operatorname{sh} \alpha b} \cos \alpha x d\alpha = \frac{\pi}{2b} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\cos \frac{\pi y}{b} + \operatorname{ch} \frac{\pi x}{b}}, \quad 0 \leqslant y < b.$$

Принимая во внимание этот результат, обозначим

$$Q(x)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha b}\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha.$$

Дифференцируя $Q(x)$, приходим к уравнению

$$\frac{dQ}{dx}=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha b}\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{\pi}{2b}\,\frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{\cos\frac{\pi y}{b}+\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}}.$$

Интегрируя полученное уравнение по x в пределах от 0 до x, получаем

$$Q(x)-Q(0)=\frac{\pi}{2b}\int_0^x \frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{\cos\frac{\pi y}{b}+\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}}\,dx.$$

Заменим $\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}=\operatorname{ch}^2\frac{\pi x}{2b}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi x}{2b}$, $\sin\frac{\pi y}{b}=a$, $\cos\frac{\pi y}{b}=c$. И учитывая, что $Q(0)=0$, перепишем

$$Q(x)=\frac{\pi}{2b}\int_0^x \frac{a\,dx}{c+\operatorname{ch}^2\frac{\pi x}{2b}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi x}{2b}}.$$

Вынося $\operatorname{ch}^2\frac{\pi x}{2b}$ из знаменателя и заменяя $\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}=1-\operatorname{th}^2\alpha$, получаем

$$Q(x)=a\int_0^x \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{\pi x}{2b}\right)}{(1+c)+(1-c)\operatorname{th}^2\frac{\pi x}{2b}}=\frac{a}{1-c}\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{\pi x}{2b}}{\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}}.$$

Поскольку $1-c^2=a^2$ и $\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi y}{b}}{1-\cos\frac{\pi y}{b}}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2b}$, то окончательно имеем

$$u(x,\ y)=\frac{2T_0}{\pi}Q(x)=\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{\pi x}{2b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2b}\right).$$

8.84. Найти решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области $0<x<\infty$, $0\leqslant t<\infty$, удовлетворяющее краевому условию $u(0,\ t)=0$ и начальным условиям $u(x,\ 0)=0$,

$$\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=\begin{cases} x & \text{при } x<1,\\ 0 & \text{при } x>1,\end{cases}$$

8.85. Решить предыдущую задачу при краевом условии $u(0, t) = \sin \omega t$ и при нулевых начальных условиях.

8.86. Найти решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$ при начальном условии

$$u(x, 0) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

8.87. Найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в полосе $0 \leqslant y \leqslant b$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = \begin{cases} T_0 & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

8.88. Найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в полуполосе $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant x < \infty$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = T_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0.$$

ОТВЕТЫ

1.8. $(-4, -11, 15)$, $(1, 2, -3)$. **1.10.** а) да, б) нет. **1.12.** Многочлены нулевой, первой, второй и т. д. степеней. **1.20.** а) да, б) нет, в) да, г) нет. **1.26.** Диагонали прямоугольника равны. **1.32.** $\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$, $\frac{1}{3}(2i-2j+k)$, $\frac{1}{\sqrt{18}}(i-j-4k)$. **1.33.** 1, $x-\frac{1}{2}$, $x^2-x+\frac{1}{6}$; 1, $\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $\sqrt{180}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)$. **1.34.** $x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{20}$. **1.35.** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. **1.38.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$.

1.39. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **1.40.** $A = E_{11} + 3E_{12} + E_{21} + 3E_{22} - E_{23} + 2E_{31} + E_{32}$.

1.52. а) $[AB]=0$, б) $[AB]=\begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **1.53.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & 34 & -17 \end{pmatrix}$. **1.54.** $AB=\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$.

1.55. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. **1.58.** $B=\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$. **1.59.** $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.71. $|V_{ik}| = -1$. **1.72.** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$. **1.73.** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha^2+\beta\gamma=0$.

1.74. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 1-\alpha \end{pmatrix}$, где $\beta\gamma=\alpha-\alpha^2$. **1.76.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 15 & 23 & 7 \\ 0 & 18 & 0 \\ -5 & -3 & -21 \end{pmatrix}$.

1.86. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. **1.87.** $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \delta & \varepsilon\\ \gamma & \varepsilon & \theta\end{pmatrix}$. **1.88.** $\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ -\alpha & 0 & \gamma\\ -\beta & -\gamma & 0\end{pmatrix}$. **1.98.** $\Pi=\alpha I$. **1.101.** $\Pi=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. **1.102.** $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$. **1.104.** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$. **1.105.** $W=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.112. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+2 & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$, **1.113.** $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $-4i-6j$. **1.114.** $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **1.124.** $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi\\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$. **1.125.** $\alpha\neq 0$, $A^{-1}=$

$$=\frac{1}{\alpha^3}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha^2 & -2\alpha\beta\\ -\alpha^2 & -\alpha^2 & 2\alpha\beta+\alpha^2\\ 2\alpha\beta & 2\alpha\beta-\alpha^2 & -4\beta^2\end{pmatrix}.$$

1.126. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 8 & -1 & -5\\ -6 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$. **1.129.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -7\end{pmatrix}$, $\frac{1}{16}\begin{pmatrix}7 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -5\end{pmatrix}$. **1.130.** $X=$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 11 & -1 & 29\\ -5 & 0 & -15\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}-10 & 2 & -9\\ 20 & -3 & 16\\ -5 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

1.132. $X=A^{-1}CB^{-1}$, а) $\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix}$, б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -10 & 3\end{pmatrix}$. **1.136.** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$.

1.140. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1.141. $X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 5\\ -82 & 13 & 44\\ 10 & -2 & -3\end{pmatrix}$. **1.146.** а) $x_1=-1$, $x_2=3$, б) $x_1=x_2=-2$. **1.147.** $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=1$. **1.148.** $x_1=2$, $x_2=1$,

$x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$. **1.152.** $T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, зеркальное отражение относительно оси Ox и поворот на угол φ. **1.154.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **1.158.** $r_A = 3$, $r_B = r_C = 2$. **1.159.** а) система линейно зависима, a_1, a_2 — линейно независимы, б) система линейно независима, в) система линейно зависима, a_1, a_2, a_4 — линейно независимы. **1.162.** а) несовместна, б) $x_2 = \frac{11}{8} x_3 - \frac{4}{8} x_4 + \frac{1}{8}$, $x_1 = \frac{1}{8} x_3 - \frac{1}{2} x_4 + \frac{11}{8}$, в) $x_1 = -\frac{9}{8} x_3 - \frac{27}{8}$, $x_2 = \frac{1}{4} x_3 - \frac{5}{4}$, $x_4 = 5$, г) $\lambda = 0$: несовместна, $\lambda = 1$: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, $\lambda \neq 0$ и 1: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{\lambda}$. **1.163.** $\alpha(i + j)$, $\alpha(i + 2j + 2k)$. **1.172.** а) $\lambda_1 = 2$, $x_1 = i - j$, $\lambda_2 = 3$, $x_2 = i - 2j$, б) $\lambda = -5$ $x = i - j$, в) $\lambda = 1 \pm i$, собственные векторы комплексные. **1.173.** Пусть x_1 - собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = 0$, x_2 - отвечающий $\lambda_2 = 1$, тогда A — оператор параллельного проектирования вдоль x_1 на ось, определяемую x_2. **1.175.** $\lambda_1 = 1$, $x_1 = i + j + 2k$, $\lambda_2 = 2$, $x_2 = i + k$, $\lambda_3 = 3$, $x_3 = i + 2j + 2k$, вектор x_1 под действием A сохраняет свою проекцию на x_1, удлиняется в 2 раза вдоль x_2 и в 3 раза вдоль x_3. **1.176.** а) $\lambda_1 = 3$, $x_1 = i + 2j + 2k$, $\lambda_2 = -1$, $x_2 = i + 2j + k$, б) $\lambda_1 = 0$, $x_1 = i + 2j + 2k$, $\lambda_2 = 1$, $x_2 = i + j + k$. **1.177.** Сумма элементов строк матрицы A одна и та же, **1.184.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.185.** $\lambda^3 - 6\lambda + 5 = 0$, $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda = 0$, $\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$. **1.191.** $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 8 & 3 & 14 \\ 2{,}5 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. **1.196.** а) $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \alpha - \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, б) $T = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha\beta \neq 0$. **1.201.** $\tilde{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & -2 + \sqrt{2} & -2 \\ -2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Новый базис повернут относительно старого на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси Oz. **1.202.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$. **1.203.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **1.204.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1.207. а) $2y_1^2 - 2{,}5y_2^2$, б) $y_1^2 - 4y_2^2$, в) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, г) $y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$. **1.211.** а) $3y_1^2 - y_2^2$, б) $3y_1^2 - 2y_2^2$, в) $9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$, г) $6y_1^2 + 3y_2^2 - 2y_3^2$.

1.212. а) эллиптический цилиндр $\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{1}=1$, б) эллипсоид $\frac{y_1^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}+\frac{y_3^2}{2}=1$, в) двуполостный гиперболоид $\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_3^2}{1}=-1$. **1.218.** $\varphi>0$ при $\alpha>0$, $\alpha\gamma-\beta^2>0$; $\varphi<0$ при $\alpha<0$, $\alpha\gamma-\beta^2>0$. **1.219.** а) $\varphi>0$ при $0<\alpha<1$, б) $\varphi<0$ при $\alpha^2<\frac{1}{2}$, в) $\varphi>0$ при $\alpha>\frac{11}{6}$. **1.220.** а) $x=y=1$ — точка максимума, б) $x=y=z=2$ — точка минимума, $x=y=z=0$ — экстремума нет, в) $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{6}$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ — точка максимума, г) $x=y=z=2$ — точка минимума. **1.229.** а) $\begin{pmatrix}1 & z_1+z_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}-1 & -(z_1+z_2)\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}1+\frac{z_2}{z_1} & -z_2\\ -\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}-\frac{z_2}{z_1z_3} & 1+\frac{z_2}{z_3}\end{pmatrix}$. **1.230.** а) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \frac{1}{z} & -1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}-1-\frac{z_1}{z_2} & z_1\\ \frac{1}{z_2} & -1\end{pmatrix}$.

1.231. $\bar{z}_1=z_1-\frac{\mu_1^2}{z_2+z_3}$, $\bar{z}_2=z_4-\frac{\mu_2^2}{z_2+z_3}$, $\bar{\mu}=\frac{\mu_1\mu_2}{z_2+z_3}$. **1.234.** Рис. 32, *а*:

$$\Gamma=\frac{1}{z_2+z_4}\begin{pmatrix}z_2+z_3+z_4 & -z_1z_3-(z_1+z_3)(z_2+z_4)\\ -1 & z_1+z_2+z_4\end{pmatrix},$$

Рис. 35:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-z_1-z_3}{z_1z_3+(z_1+z_3)(z_2+z_4)} & 1\end{pmatrix}.$$

1.235.

$$\Gamma=\frac{1}{2z(z+z_1)}\begin{pmatrix}2z^2+2zz_1+z_1^2 & -z_1z(z_1+2z)\\ -\frac{z_1}{z}(z_1+2z) & 2z^2+2zz_1+z_1^2\end{pmatrix}.$$

1.236.

$$H=\frac{1}{z_1+z_4}\begin{pmatrix}z_1z_4 & z_1\\ z_1 & -1\end{pmatrix}+\frac{1}{z_2+z_3}\begin{pmatrix}-z_2z_3 & -z_2\\ -z_2 & -1\end{pmatrix}.$$

1.246. Использовать формулы (10.3), учитывая, что в а) $A^2=0$, в б) $A^4=0$.

1.247. $e^A=\begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & e^2\end{pmatrix}$, $e^B=\begin{pmatrix}e^{-1} & e^{-1}\\ 0 & e^{-1}\end{pmatrix}$, $e^{A+B}=\begin{pmatrix}1 & e^{-1}\\ 0 & e\end{pmatrix}$, $e^Ae^B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & e\end{pmatrix}$.

1.249. $e^A=\frac{1}{2}e^{a^2+a}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}e^{a^2-a}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. **1.250.** а) $f(A)=f(2)\times(3I-A)+f(3)(-2I+A)$, б) $f(A)=f(1)\left(\frac{3}{2}I-\frac{1}{2}A\right)+f(3)\left(-\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}A\right)$, в) $f(A)=f(-2)\frac{1}{15}(3I-4A+A^2)+f(1)\frac{1}{6}(6I+A-A^2)+f(3)\frac{1}{10}(-2I+A+A^2)$, г) $f(A)=f(-2)\frac{1}{12}(-2I+A+2A^2-A^3)+f(-1)\frac{1}{6}(4I-4A-A^2+A^3)+f(1)\frac{1}{6}(4I-4A-A^2+A^3)+f(1)\frac{1}{6}(4I-$

$-4A-A^2-A^3)+f(2)\frac{1}{12}(-2I-A+2A^2+A^3)$. **1.251.** $e^A=\operatorname{ch}1\cdot I+$ $+\operatorname{sh}1\cdot A$, $e^B=\cos 1\cdot I+\sin 1\cdot B$, $e^{A+B}=I+A+B$. **1.252.** а) $f(A)=$ $=f(2)\frac{1}{4}(4A-A^2)+f'(2)\frac{1}{2}(-8I+6A-A^2)+f(4)\frac{1}{4}(4I-4A+A^2)$, $f(A)=f(1)I+f'(1)(A-I)+f''(1)\frac{1}{2}(A-I)^2$, в) $f(A)=f(1)\frac{1}{4}(3I+2A-$ $-A^2)+f'(1)\frac{1}{2}(-I+A^2)+f(-1)\frac{1}{4}(I-A)^2$. **1.253.** Ряды сходятся, если все характеристические числа матрицы B по модулю меньше единицы. **1.258.**

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2e^{2t}+4t & 2(t+1)e^t+2t & 2(t+1)e^t+2t \\ 2(t+1)e^t+2t & 2e^{2t}+4t & 2(t+1)e^t+2t \\ 2(t+1)e^t+2t & 2(t+1)e^t+2t & 2e^{2t}+4t \end{pmatrix}.$$

1.259. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. **1.260.** $\frac{d\sin At}{dt}=A\cos At$, $\frac{d\cos At}{dt}=A\sin At$.

1.261. $\frac{d\sin A(t)}{dt}=\cos A(t)\frac{dA}{dt}$, $\frac{d\cos A(t)}{dt}=-\sin A(t)\frac{dA}{dt}$, $\frac{d\operatorname{sh}A(t)}{dt}=$ $=\operatorname{ch}A(t)\frac{dA}{dt}$, $\frac{d\operatorname{sh}A(t)}{dt}=\operatorname{sh}A(t)\frac{dA}{dt}$. **1.270.** а) $\Omega=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$, $x=$ $=\Omega\xi$, где ξ — вектор с произвольными постоянными компонентами. б) $\Omega=$ $=\frac{1}{3}e^{-t}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -2 & 5\end{pmatrix}+\frac{1}{3}e^{2t}\begin{pmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. в) $\Omega=\frac{1}{3}e^t(A^2+A+I)-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\times$

$\times\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\,(A^2+A-2I)-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,(A^2-A)$, где $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

г) $\Omega=-\frac{1}{3}e^{-t}(A-2I)+\frac{1}{3}e^{2t}(A+I)$, где $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **1.271.** а) $x_1=-$ $-5e^{2t}\sin t$, $x_2=e^{2t}(\cos t-2\sin t)$; б) $x_1=1+3e^{2t}$, $x_2=-2e^{2t}+e^{-t}$, $x_3=$ $=1+e^{2t}-2e^{-t}$; в) $x_1=2\sin t$, $x_2=2e^t+2\sin t$, $x_3=e^t+\cos t-\sin t$; г) $x_1=\frac{1}{2}e^a+\frac{1}{2}e^b$, $x_2=-\frac{1}{2}e^a+\frac{1}{2}e^b$, где $a=\frac{1}{2}(t^2-4t+3)$, $b=-$ $-\frac{1}{2}(t^2+1)$. **1.272.** а) $\Omega\approx\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3}t^3-t\\ \frac{1}{3}t^3+t & 1\end{pmatrix}$; б) $\Omega\approx$

$$\approx\begin{pmatrix}-\frac{t^3}{6}+1 & \frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}+t & \frac{t^2}{2}\\ \frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{2}+\frac{t^2}{2}+t+1 & 0\\ -t & -\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6}+1\end{pmatrix}.$$

2.5. $H_u=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v-u}{(a^2-u)(b^2-u)}}$, $H_v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v-u}{(a^2-v)(v-b^2)}}$. **2.6.** $H_\rho=H_\varphi=\frac{\sqrt{(\cos\varphi+\operatorname{ch}\rho)^2+2\sin^2\varphi}}{(\cos\varphi+\operatorname{ch}\rho)^2}$.

2.22. а) гиперболы $xy = c$; б) эллипсы $x^2 + 3y^2 = 9 - C^2$; в) параболы $y^2 = 4x + \arcsin C$. **2.23.** а) косинусы $x^2 + y^2 = C^2z^2$; б) $x^2 + y^2 - 4z^2 = C$ — однополостные гиперболоиды при $C > 0$, двуполостные — при $C < 0$, конус при $C = 0$. **2.24.** а) Плоскости, перпендикулярные вектору $\boldsymbol{a}$. б) Плоскости, перпендикулярные вектору $[\boldsymbol{ab}]$. **2.25.** Поверхности вращения вокруг оси Oz. **2.31.** $-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$; **2.32.** а) $\dfrac{y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$, б) $-\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$, в) $\dfrac{3}{2p}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$. **2.33.** $\operatorname{grad}(\boldsymbol{Sr}) = \boldsymbol{S}$. Поверхности уровня — плоскости, перпендикулярные вектору $\boldsymbol{S}$. **2.34.** а) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{R} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{R}$; б) $\dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{Q}$; в) $\dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{z\sqrt{2}} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$. **2.40.** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha$. **2.41.** $\dfrac{13}{2}\sqrt{3} + 5$. **2.42.** $-\dfrac{4}{5}$. **2.43.** $\sqrt{209}$. **2.44.** $-\dfrac{7}{\sqrt{11}}$. **2.45.** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{2}{r}\varphi$. **2.46.** $\dfrac{\partial\Phi}{\partial l} = \Phi'(r)\cos\theta$, $\theta = \angle(r^0, \tau)$. **2.47.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. **2.48.** -4; **2.49.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **2.55.** Пересечения поверхностей: а) $xz = C_1$, $y = C_2z$; б) $y^2 = 2z + C_1$, $x = C_2$; в) $x = C_1z$, $y = z^2 + C_2$. **2.56.** Прямые, выходящие из 0. **2.57.** а) $\beta = \dfrac{C}{\varphi} + C_1$, $z = C_2$ (спирали в плоскостях, параллельных xOy); б) $z = C_1\cos\theta$, $\varphi = C_2$ (окружности в плоскостях, проходящих через Oz, касающиеся плоскости xOy). **2.62.** а) $x + y + z$; б) $3 + \dfrac{1}{\rho}$; в) $\dfrac{1}{r\sin\theta}$. **2.63.** $f'(\rho) + \dfrac{f(\rho)}{\rho}$. **2.64.** а) $2cb$; б) 0. **2.66.** $-\dfrac{\varphi'(r)}{r}\boldsymbol{ar}$. **2.67.** $\operatorname{div} l_\rho = \dfrac{1}{\rho}$, $\operatorname{div} l_\varphi = \operatorname{div} l_z = 0$; $\operatorname{div} l_r = \dfrac{2}{r}$; $\operatorname{div} l_\theta = \dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{r}$; $\operatorname{div} l_\varphi = 0$. **2.68.** $\operatorname{div} H = 0$. **2.75.** а) $(x + z)(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$; б) $\dfrac{5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}{1 + (x - y + z)^2}$; в) $-2(x + y)\boldsymbol{k}$. **2.76.** а) $z\left(1 - \dfrac{2}{\rho}\right)l_\rho + (3z^2 - \varphi z)\,l_\varphi + \left(\dfrac{1}{\rho} - 1\right)l_z$; б) $r\sin\varphi(\theta\operatorname{ctg}\theta + 1)\,l_r - 3r\theta\sin\varphi l_\rho + 3r\cos 2\theta l_\varphi$. **2.78.** $\dfrac{1}{r}[\boldsymbol{rc}]$. **2.80.** $-2y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + (6x + 4y)\boldsymbol{k}$. **2.92.** $\Delta f(\rho) = f''(\rho) + \dfrac{f'(\rho)}{\rho}$; $\Delta f(r) = f''(r) + \dfrac{2f(r)}{r}$. **2.93.** $12z\boldsymbol{i} - 8y\boldsymbol{j} + 16x\boldsymbol{k}$. **2.99.** $\Pi_1 = \dfrac{1}{6}$; $\Pi_2 = 0$. **2.100.** $\Pi = 0$. **2.101.** $\Pi = 81\pi$. **2.102.** $\Pi = -\dfrac{16}{3}\pi$. **2.103.** $\Pi = a\pi$. **2.104.** $\Pi = -a^4\left(\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{4}{15}\right)$. **2.110.** $\Pi = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}R^5$. **2.111.** а) $\Pi = 6$; б) $\Pi = 3\pi R^3$; в) $\Pi = \dfrac{16}{105}$; г) $\Pi = 18\pi$. **3.13.** $\operatorname{Re} e^{\frac{\pi i}{2}} = 0$, $\operatorname{Im} e^{\frac{\pi i}{2}} = 1$; $\dfrac{\cos 2}{e^3} + i\dfrac{\sin 2}{e^3}$, $\operatorname{Re} e^{-3+2i} = \dfrac{\cos 2}{e^3}$, $\operatorname{Im} e^{2+3i} = \dfrac{\sin 2}{e^3}$; $e^2\cos 3 + ie^2\sin 3$, $\operatorname{Re} e^{2+3i} = e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} e^{2+3i} = e^2\sin 3$; $\dfrac{\cos 7}{e^8} - i\dfrac{\sin 7}{e^8}$, $\operatorname{Re} e^{8-7i} = \dfrac{\cos 7}{e^8}$; $\operatorname{Im} e^{-8-7i} = -\dfrac{\sin 7}{e^8}$; **3.14.** $\sin 1\operatorname{ch} 3 + i\cos 1\operatorname{sh} 3$, $\operatorname{Re}\sin(1 - 3i) = \sin 1\operatorname{ch} 3$, $\operatorname{Im}\sin(1 - 3i) = \cos 1\operatorname{sh} 3$; $\operatorname{ch} 3$, $\operatorname{Re}\cos 3i = \operatorname{ch} 3$, $\operatorname{Im}\cos 3i = 0$. **3.15.** $\dfrac{80}{91} + \dfrac{9\sqrt{3}}{91}i$; $\cos 3\operatorname{sh} 2 + i\sin 3\operatorname{ch} 2$; $\dfrac{312}{313} + i\dfrac{25}{313}$. **3.16.** $\dfrac{1}{2}\ln 50 + i(\operatorname{arctg} 7 + 2\pi k)$; $\dfrac{e}{\sqrt{2}}[1 - i]$;

$\frac{1}{25}e^{-\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2\pi k\right)}$, $\cos\left(\ln 5-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2\pi k\right)+i\sin\left(\ln 5-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2\pi k\right)$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ **3.17.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$; $+\frac{\pi}{2}+\pi k-i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$; $\frac{1}{4}\ln 5+i\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\right.$ $\left.+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. **3.18.** $1,\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]$, $3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]$, $-3i$; $\sqrt[10]{8}\left[\cos\frac{3\pi+8\pi k}{20}+i\sin\frac{3\pi+8\pi k}{20}\right]$, $k=0,\ldots,4$. **3.19.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2,\ 2i,\ -2,\ -2i$; в) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{(8k+1)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k+1)\pi}{12}\right]$; $\sqrt{2}\left[\cos\frac{(8k-1)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k-1)\pi}{12}\right]$; $k=0,\ 1,\ 2$. **3.20.** а) $z_k^{(1)}=2\pi k-i\ln(\sqrt{2}-1)$, $z_k^{(2)}=(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$, б) $z_k=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k$; в) $z_k^{(1)}=\ln(\sqrt{2}-1)+2\pi ki$, $z_k^{(2)}=\ln(\sqrt{2}+1)+$ $+(2k+1)\pi i$; г) $z_k^{(1)}=\ln\frac{\sqrt{\pi^2+4}-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}i+2\pi ki$, $z_k^{(2)}=\ln\frac{\sqrt{\pi^2+4}+\pi}{2}-$ $-\frac{\pi i}{2}+2\pi ki$; д) $z_k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$. **3.23.** $\operatorname{Re}e^{5iz-1}=e^{-5y-1}\cos 5x$, $\operatorname{Im}e^{5iz-1}=e^{-5y-1}\sin 5x$; $\operatorname{Re}\sin(3z+2)=\sin(3x+2)\operatorname{ch}3y$; $\operatorname{Im}\sin(3z+2)=$ $=\cos(3x+2)\operatorname{sh}3y$; $\operatorname{Re}\cos(z-1)=\cos x\operatorname{ch}(y-1)$, $\operatorname{Im}\cos(z-1)=-\sin x\times$ $\times\operatorname{sh}(y-1)$; $\operatorname{Re}(z^3+5z-1)=x^3-3xy^2+5x-1$, $\operatorname{Im}(z^3+5z-1)=3z^2y-$ $-y^3+5y$. **3.25.** а) $W_0=i$, б) $W_0=\frac{1}{2}(1-i)$, в) $W_0=e^{-1+i}$. **3.26.** а) окружность $u^2+v^2-u-1=0$; б) прямая $u=v+1$; в) прямая $u=\frac{1}{2}$; г) окружность $3(u^2+v^2)-8u+4=0$. **3.27.** а) полярная сетка, б) и в) сетка эллипсоидов и гипербол с общими фокусами ± 1. **3.28.** W пробегает мнимую полуось в положительную сторону, $|W|\to\infty$. **3.43.** а) z^3+2+i; б) $2ie^z+2$; в) $z^2+(5-i)z-\frac{i}{z}$; г) $\frac{1}{2}(2-i)z^2$; д) $(2+i)z^3$. **3.44.** а) линии тока — гиперболы с асимптотами $x=0$ и $y=0$, эквипотенциальные линии — гиперболы с осями $x=0$ и $y=0$; б) линии тока $\left(r-\frac{1}{r^2}\right)\sin\varphi=\text{const}$, эквипотенциальные линии $\left(r+\frac{1}{r^2}\right)\cos\varphi=\text{const}$. **3.48.** $k_1=75$, $\theta_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; $k_2=75$, $\theta_2=0$; $k_3=6$, $\theta_3=-\frac{3}{4}\pi$; $k_4=39$, $\theta_4=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. **3.49.** $|z|<\frac{1}{2}$; $\left|z-\frac{3}{2}\right|<$ $<\frac{1}{2}$; $|z|>2$. **3.50.** $e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3}{4}\pi i}$, $e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $e^{-\frac{3}{4}\pi i}$, $z_k=\frac{\pi}{3}k$; $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$. **3.65.** $-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$; $\frac{1}{3}$; i. **3.66.** $W=(-1+2i)z-4i$; $W=\frac{-2+6i}{5}z+\frac{13}{5}-\frac{i}{5}$; $W=\frac{14+10i}{37}z-\frac{13-33i}{37}$. **3.67.** $W=2z+1-4i$; $W=z+1-i$; $W=\frac{1}{9}z+$ $+\frac{10}{9}i$. **3.68.** $W=-\frac{(1+3i)z+1-3i}{z+1}$. **3.69.** $W=2(1+i)\frac{z-1}{z(1+i)-2}$.

3.70. $W=2i\dfrac{z+1}{z+1+2i}$. **3.71.** $W=\dfrac{(6+2i)z+2-14i}{(1+i)z+1-5i}$.

3.72. $W=-2\dfrac{z+i}{z+3i}$. **3.73.** $W=\dfrac{(15-11i)z-33-37i}{11z-8-33z}$.

3.74. $W=1+\dfrac{3}{z-1+i}$. **3.75.** а) $W=5+2e^{i\alpha}\dfrac{z-1+i}{z-1-2i}$; б) $W=5+$

$+2e^{i\alpha}\dfrac{z+2i}{z+3+2i}$; в) $W=5+4e^{i\alpha}\dfrac{z-\frac{1}{2}+2i}{z+7+2i}$. **3.76.** а) $W=2e^{i\alpha}\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$;

б) $\dfrac{W+\frac{1}{2}}{W+2}=e^{i\alpha}\dfrac{z-\frac{i}{2}}{z-2i}$; в) $\dfrac{W-\frac{i}{3}}{W-3i}=e^{i\alpha}\dfrac{z+\frac{i}{2}}{z+2i}$. **3.77.** $\dfrac{W-1+i}{W-4+i}=\dfrac{e^{i\alpha}}{2}\dfrac{z}{z-2i}$.

3.78. $\dfrac{W+2+3i}{W-2+3i}=2e^{i\alpha}\dfrac{z+\frac{3}{2}}{z}$. **3.79.** $W=-\dfrac{5}{2}\dfrac{z+6i}{z}$. **3.84.** а) $z^2e^{-\frac{\pi i}{4}}$, б) z^2;

в) $(z+2i)^4$, г) $(z+2)^4e^{-\frac{\pi}{4}i}$. **3.85.** $W=-\left(\dfrac{z+2}{z-2}\right)^2$. **3.86.** $W=\left(\dfrac{z+3-3i}{z}\right)^2$.

3.87. $W=-i\left(\dfrac{z+2+2i}{z}\right)^2$. **3.88.** $W=-\dfrac{i}{2}\left(3z+\dfrac{1}{3z}\right)$. **3.89.** $W=\dfrac{z^2-2iz+1}{z^2+2iz+1}$.

3.91. а) $W=\dfrac{1}{2}\left(z-1+\dfrac{1}{z-1}\right)$; б) $W=-\dfrac{1}{2}\left(z+2+\dfrac{1}{z+2}\right)$. **3.96.** а) внешность полукруга $|W|\geqslant 1$, $\operatorname{Re}W>0$; б) часть кольца $e<|W|<e^2$, $-\dfrac{\pi}{3}<\arg W<\pi$. **3.97.** $W=-2e^{-i\pi z}$. **3.98.** $W=-e^{\frac{3\pi i}{2}\left(\frac{z-2}{z}\right)}$. **3.99.** $W=$

$=-\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}$. **3.100.** $W=-\cos\dfrac{\pi}{h}(z-1)$. **3.101.** $W=1+i\cos\pi z$.

3.103. $W=2i+\operatorname{ch}\pi(z-2i)$. **3.104.** $W=\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. **3.109.** $2\pi i$. **3.110.**

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}i$. **3.111.** $-4-\pi$. **3.112.** $\dfrac{7}{3}-\dfrac{i}{3}$. **3.113.** а) $2\pi i$; б) 0. **3.114.** а) $\pm\pi i+$

$+2k\pi i$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$; б) $\dfrac{\pi}{4}+2\pi(n_1+n_2)$, где n_1 — число обходов контура L вокруг точки i, n_2 — вокруг $-i$. **3.117.** Сходится. **3.118.** Расходится. **3.119.** Сходится. **3.122.** $|z|<1$. **3.123.** $|z|<e$. **3.124.** $|z|<2$. **3.125.** $|z-2|<$

$<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **3.126.** $|z-1|<1$. **3.127.** $|z|<1$. **3.128.** $|z-1|<\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **3.129.** $1<$

$<|z|<5$. **3.130.** $2<|z+1+i|<3$. **3.131.** $|z-1|>1$. **3.138.** а) $\cos 2z=$

$=1-\dfrac{4z^2}{2!}+\dfrac{16z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{2^{2n}z^n}{(2n)!}+\ldots$; б) $\sin(2z-1)=\cos 1\sum\limits_0^\infty(-1)^n\times$

$\times\dfrac{2^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sin 1\sum\limits_0^\infty(-1)^n\dfrac{2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}=-\sin 1+2\cos 1z+2\sin 1z^2-\ldots$ **3.139.**

а) $\sum\limits_0^\infty\dfrac{e3^n(z-1^n)}{n!}$; б) $z\cos 2z=[(z+1)-1]\cos 2[(z+1)-1]=$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{2^n}{(2n+1)!} [(2n+1)\cos 2 - 2\sin 2] (z+1)^{2n+1} - \cos 2 -$$

$$- \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} [2\cos 2 + 2n \sin 2] (z+1)^{2n};$$ в) $\operatorname{ch} 2 \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} +$

$$+ i \operatorname{sh} 2 \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(z-i)^{2n}}{(2n)!};$$ г) $25 + 70(z-2) + 74(z-2)^2 + 39(z-2)^3 +$

$+ 10(z-2)^4 + (z-2)^5$. **3.140.** а) $e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$; б) $\cos \frac{1}{z+1} = \sum_0^\infty (-1)^n \times$

$$\times \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z+1)^{2n}};$$ в) $\sin \frac{1}{(z-i)^3} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-i)^{3(2n+1)}};$

г) $(z+1) \sin \frac{1}{z+1} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2n}}$; д) $(z-1)^3 e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \times$

$$\times \frac{1}{(z-1)^{n-3}};$$ е) $(z+i)^2 \cos \frac{1}{z+i} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-2}}$. **3.141.**

1. а) $-\sum_0^\infty \frac{z^n}{3^{n+1}}$; б) $\frac{1}{z-3}$. 2. а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^n}{2^{n+2}}$; б) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2} +$

$$+ \sum_0^\infty \frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}$$. 3. а) $\frac{1}{(z+1)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}\right]'' = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{2} n(n-1) z^{n-2}$; б) $\frac{1}{(z+1)^3}$.

4. а) $\frac{1}{(z-1)^n} = (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{1}{z-1}\right]^{(n-1)} = \sum_{k=n-1}^\infty \frac{(-1)^{k+n-1}}{(n-1)!} k(k-1) \ldots$

$\ldots (k-n+2) z^{k-n+1}$; б) $\frac{1}{(z-1)^n}$. 5. а) $\frac{z}{(z+1)(z-2)^2} = -\frac{1}{9} \frac{1}{z+1} - \sum_0^\infty \frac{(z+1)^n}{3^{n+3}} +$

$$+ 6 \sum_1^\infty \frac{n(z+i)^{n-1}}{3^{n+3}} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n+1)}{3^{n+3}} (z+1)^n$$; б) $\frac{z}{(z+1)(z-2)^2} =$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^n}{3^{n+3}}$$. 6. а) $\frac{z+1}{z^2-3z+2} = -\frac{2}{z-1} -$

$$- 3 \sum_0^\infty (z-1)^n$$; б) $\frac{z+1}{z^2-2z+2} = \frac{3}{z-2} + 2 \sum_0^\infty (-1)^{n+1} (z-2)^n$. **3.144.** а) $z = -1 -$

нуль 6 порядка, б) $z = \frac{\pi}{3} k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ — нули третьего порядка, в) $z_k =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ — простые нули, г) $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $k = 0, \pm 1, \ldots$ — нули четвертого порядка, д) $z_1 = 1$ — нуль первого порядка, $z_2 = -1$ и $z_3 = -4$ — нули третьего порядка. **3.145.** а) $z_1 = 1$, $z_2 = 3$ — простые полюсы; б) $z_1 = -\pi$ — устранимая особая точка, z_2, $z_3 = -1$ — простые полюсы; в) $z = 0$ — полюс порядка 5, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$ — полюсы третьего порядка, г) $z_k = \pi k$, $z'_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — полюсы второго порядка; д) $z = 0$ — существенно особая точка, е) $z_k = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1 \ldots$ — полюсы второго порядка. **3.147.** а) $\frac{1}{\cos\left[\frac{\pi}{6}(-1)^k + \pi k\right]}$; б) $\frac{1}{2}$, -1; в) $\frac{5}{1248}$, $-13 + i : 4096, -7 - 4i : 4096$; г) 0, д) $(-1)^k$, е) 0. **3.151.** $\frac{\pi i}{25}$. **3.152.** 0. **3.153.** $\frac{\pi i}{2}$. **3.154.** $\frac{\pi \operatorname{sh} 2}{4000}$. **3.155.** $-\frac{\pi}{8}$. **3.156.** $-16i$. **3.157.** $\frac{\pi i}{5}\operatorname{ch} 2$. **3.158.** $-\frac{2\pi i}{e}$. **3.159.** $2\pi i$. **3.167.** $\pi\sqrt{2}$. **3.168.** $\frac{4}{3}\pi$. **3.169.** $\frac{\pi}{2a}$. **3.170.** $\frac{\pi(2a+b)}{2a^3(a+b)^2 b}$. **3.171.** $\frac{\pi}{2e}$. **3.172.** $\pi\sqrt{2}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **3.173.** $-\frac{\pi i}{2}e^{-i}$. **3.174.** Оба интеграла равны $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **4.6.** $(-1)^n \frac{1}{n!}$. **4.15.** $\lim\limits_{x \to -2n \pm 0} \Gamma(x) = \pm\infty$. **4.18.** 1,26; 3,32; 1,30; $-0,45$; 2,52; 0,28. **4.38.** а), б) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$; в) $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)$. **4.39.** $\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\cdot\frac{\pi}{2}$, если $m = 2k$, $\frac{2^{k-1}k!}{(2k-1)!!}$, если $m = 2k-1$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}$. **4.40.** а) $\frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}}$; б) $\frac{\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2a^{\frac{b+1}{2}}}$; в) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **4.41.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **4.42.** $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a\Gamma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right)}$. **4.43.** $\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+1\right)}$. **4.55.** а) $\operatorname{Li}(x) + C$; б) $\operatorname{Ci}(x) + C$; в) $\operatorname{Si}(x) + C$, г) $\frac{1}{a}\operatorname{Li}(ax) + C$; д) $\operatorname{Si}\left(\frac{x}{2}\right) + C$; е) $\operatorname{Ei}(mx) + C$; ж) $e^a \operatorname{Ei}(x-a) + C$; з) $\cos a \operatorname{Si}(x-a) + \sin a \operatorname{Ci}(x-a) + C$; и) $\cos a \operatorname{Ci}(x-a) - \sin a \operatorname{Si}(x-a) + C$. **4.57.** $-\frac{e^{5x}}{x+2} + 5\operatorname{Ei}(5x+10)$; б) $-\frac{\sin 2x}{2(x+1)^2} - \frac{\cos 2x}{x+1} - 2\cos 2\operatorname{Si}(2x+2) + 2\sin 2\operatorname{Ci}(2x+2) + C$; в) $\frac{1}{4e}\operatorname{Ei}(4x+4) + \frac{1}{2e}\operatorname{Ei}(2x+2) + \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{e}{4}\operatorname{Ei}(4x-4) - \frac{e}{2}\operatorname{Ei}(2x-2) - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{e^{4x}+2e^{2x}+3}{x-1} +$

$+ 2e\,\mathrm{Ei}(4x-4) + 2e\,\mathrm{Ei}(2x-2) + C$; г) $2\,\mathrm{Li}(x^2) - \mathrm{Li}(x) + C$; е) $\mathrm{Li}(x^3) - \mathrm{Li}(x^2) + 2\,\mathrm{Li}(x) + C$. **4.58.** а) $-\frac{\cos\alpha x\,\mathrm{Ci}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\mathrm{Ci}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{Ci}(\alpha x-\beta x)}{2\alpha} + C$; б) $\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,\mathrm{Si}(\beta x) + \frac{1}{2\alpha}[\mathrm{Ci}(\alpha x+\beta x) - \mathrm{Ci}(\alpha x-\beta x)] + C$; в) $-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\,\mathrm{Si}(\beta x) + \frac{1}{2\alpha}[\mathrm{Si}(\alpha x+\beta x) - \mathrm{Si}(\alpha x-\beta x)] + C$; г) $\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,\mathrm{Ci}(\beta x) - \frac{1}{2\alpha}[\mathrm{Si}(\alpha+\beta)x + \mathrm{Si}(\alpha-\beta)x] + C$; д) $x\,\mathrm{Ci}(\alpha x)\,\mathrm{Ci}(\beta x) + \frac{1}{2\alpha}[\mathrm{Si}(\alpha x+\beta x) + \mathrm{Si}(\alpha x-\beta x)] + \frac{1}{2\beta}[\mathrm{Si}(\alpha x+\beta x) + \mathrm{Si}(\beta x-\alpha x)] - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,\mathrm{Ci}(\beta x) - \frac{1}{\beta}\sin\beta x\,\mathrm{Ci}(\alpha x) + C$; е) $x\,\mathrm{Si}(\beta x)\,\mathrm{Ci}(\alpha x) + \frac{1}{\beta}\cos\beta x\,\mathrm{Ci}(\alpha x) - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,\mathrm{Si}(\beta x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\mathrm{Ci}(\alpha x+\beta x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{Ci}(\beta x-\alpha x) + C$; ж) $x\,\mathrm{Si}(\alpha x)\,\mathrm{Si}(\beta x) - \frac{1}{2\beta}\times[\mathrm{Si}(\alpha x+\beta x) + \mathrm{Si}(\alpha x-\beta x)] - \frac{1}{2\alpha}[\mathrm{Si}(\alpha x+\beta x) + \mathrm{Si}(\beta x-\alpha x)] + \frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\times\mathrm{Si}(\beta x) + \frac{1}{\beta}\cos\beta x\,\mathrm{Si}(\alpha x)$. **4.60.** а) $\frac{1}{3}t\sqrt{t^4-5t^2+4} + \frac{10}{3}\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-5t^2+4}} - \frac{4}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t^4-5t^2+4}}$; б) $-\frac{1}{5}t^3\sqrt{1-t^4} + \frac{3}{5}\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^4}}$; в) $\frac{1}{3}t\sqrt{t^4-1} - 2\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^4-1}} + \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$. **4.63.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}F\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; в) $\frac{1}{2}F\left(\varphi, \frac{1}{2}\right)$, где $\varphi = \arcsin\sqrt{0{,}4}$. **4.66.** а) $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, б) $\frac{1}{3}\sqrt{55} - 2\sqrt{2}\,E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\,F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, где $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$, в) $2E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **4.67.** а) $\frac{1}{k^2}[F(\varphi, k) - E(\varphi, k)]$, б) $\frac{1}{k^2}[E(\varphi, k) - (1-k^2)F(\varphi, k)]$, в) $\frac{1}{1-k^2}[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - E(\varphi, k)]$. **4.69.** $4aF\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **4.73.** $T = 2\sqrt{\frac{e}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **4.74.** $M = \mu\sqrt{ab}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{2}{k}E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right]$. **4.78.** а) $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, б) $e^{h^2}\operatorname{erf}h(\sqrt{\tau})$. **4.86.** $e^{-x^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x) + C\right)$. **4.94.** $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\frac{x^{2k}}{2^{2k}}$; $J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}}$. **4.112.** $J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x)$. **4.113.** $J_4(x) = \frac{24-x^2}{x^2}J_2(x) - \frac{6}{x}J_1(x)$. **4.120.** $J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} = \frac{x\sin x + \cos x}{x}$, $J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{3\sin x}{x^2} - \frac{3\cos x}{x} - \sin x\right]$,

$J_{-\frac{5}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{x^2\cos x - 3x\sin x - 3\cos x}{x^2}$. **4.121.** $Y_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \times$ $\times \sin x$; $Y_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{x\sin x + \cos x}{x}$; $Y_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\sin x}{x} - \right.$ $\left. - \cos x\right]$; $Y_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{x^2\cos x - 3x\sin x - 3\cos x}{x^2}$. **4.139.** $x^7 J_3(x) -$ $- 4x^6 J_4(x) + 8x^5 J_5(x)$. **4.140.** $x^4 J_1(x) - 3x^3 J_2(x) + 3x^2 J_3(x) + 3x J_4(x) +$ $+ 6\sum_{k=2}^{\infty} J_{2k+1}(x)$. **4.141.** $x J_1(x)$. **4.142.** $x^9 J_5(x) - 4x^8 J_6(x) + 8x^7 J_7(x)$. **4.143.** $x^5 J_3(x) - 2x^4 J_4(x)$. **4.144.** $x^8 J_7(x) - x^7 J_8(x) - x^6 J_9(x) - 3x^5 J_{10}(x) - 15x^4 \times$ $\times J_{11}(x) - 105x^3 J_{12}(x) - 945x^2 J_{13}(x) - 10395x J_{14}(x) - 270270\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+13}(x)$. **4.145.** $x^5 J_2(x) - 3x^2 J_3(x) + 3x^3 J_4(x) + 3x^2 J_5(x) + 9x J_6(x) + 90\sum_{k=1}^{\infty} J_{5+2k}(x)$. **4.146.** $x J_0(x)$. **4.153.** $C(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} J_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$, $S(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} J_{-\frac{1}{2}}(t)\,dt$. **4.158.** $H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(ix-1)}{x^{\frac{3}{2}}}e^{ix}$; $H^{(2)}_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(ix+1)}{x^{\frac{3}{2}}}e^{-ix}$; $H^{(1)}_{\frac{5}{2}}(x) =$ $= i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{3x^2+x}{x^{\frac{9}{2}}}e^{ix}$. **4.168.** $I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{sh} x}{x}\right]$, $I_{-\frac{3}{2}}(x) =$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{ch} x}{x}\right]$, $K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-x}$, $K_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-x} \times$ $\times\left[1 + \frac{1}{x}\right]$. **4.188.** См. приложение. **4.189.** См. приложение. **4.190.** См. приложение. **4.193.** $A_n = \frac{(2n-1)!!}{n!}$. **4.194.** $x = P_1(x)$, $x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$, $x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$, $x^4 = \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{20}{35}P_2(x) + \frac{10}{35}P_0(x)$. **4.202.** $\frac{n(n+1)}{2n+1}$. **4.204.** 0 при $m = 2n$, $\frac{(-1)^n}{4n+3}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$ при $m = 2n+1$. **4.205.** $\frac{2n^2+2n-1}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}$. **4.212.** См. приложение. **4.213.** См. приложение. **4.214.** $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$, $T_{2n}(0) = (-1)^n$, $T_{2n+1}(0) = 0$. **4.221.** См. приложение. **4.222.** См. приложение. **4.238.** См. приложение. **4.239.** См. приложение. **4.244.** $L_1^1(x) = x - 2$, $L_2^1(x) = x^2 - 6x + 6$, $L_4^3(x) = x^4 -$ $- 24x^3 + 180x^2 - 480x + 360$, $L_3^3(x) = x^3 - 15x^2 + 60x - 60$. **5.4.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. **5.5.** $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\alpha}}{i}$. **5.6.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2(\sin 2\alpha - \sin\alpha)}{\alpha} + \frac{4\cos\alpha}{\alpha^2} + \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^3}\right)\sin\alpha\right]$. **5.7.** $F(\alpha) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\alpha^2+1}$. **5.8.** $F(\alpha) = -\frac{4\sqrt{2\pi}\,\alpha}{(\alpha^2+1)^2}$. **5.9.** $F(\alpha) = \sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{1+(\alpha+1)^2} + \right.$ $\left. + \frac{1}{1+(\alpha-1)^2}\right]$. **5.10.** $F(\alpha) = \sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{1+(\alpha+1)^2} - \frac{1}{1+(\alpha-1)^2}\right]$. **5.17.**

$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\alpha^2}$, $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}$. **5.18.** $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times$
$\times\frac{\sin a\alpha}{\alpha}$, $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos a\alpha}{\alpha}$. **5.19.** $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}$. **5.20.**
$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1+\cos\pi\alpha}{1-\alpha^2}$. **5.21.** $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{4\sin\frac{\alpha}{4}}{\alpha^2}\right)$. **5.22.** $F_C(\alpha)=$
$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\ln 2}{(\ln^2 2+\alpha^2)}$. **5.23.** $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\ln a}{(\ln^2 a+\alpha^2)}$. **5.30.** $F_S(\alpha)=$
$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln(\alpha^2+1)$. **5.31.** $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\alpha}{2-\alpha^2}+\frac{\alpha}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\alpha}+\right.$
$\left.+\frac{1}{4}\ln\frac{1+(1-\alpha)^2}{1+(1+\alpha)^2}\right]$. **5.36.** $F_S(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}}\right)$. **5.38.** $F_S(\alpha)=$
$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{th}\frac{\alpha}{1}$. **5.39.** $F_S(\alpha)=\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)-1$. **5.40.** $F_C(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$. **5.42.**
$F_S(\alpha)=2^{\nu-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\alpha^{1-\nu}J_\nu(\alpha)$. **5.43.** $F_S(\alpha)=2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha^{-\nu}H_\nu(\alpha)$.
5.48. $F_S(\alpha)=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-a\alpha}}{2a}$. **5.49.** $F_S(\alpha)=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-a\alpha}}{2}$. **5.50.** $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\times$
$\times\frac{1-e^{-\alpha}}{b^2}$. **5.51.** $F_S(\alpha)=\frac{\sqrt{2\pi}}{4b^2}[2-(2+|\alpha b|)e^{-|\alpha b|}]\operatorname{sign}\alpha$. **5.55.** $F_S(\alpha)=$
$=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(\nu\arcsin\alpha)}{\alpha}, & 0<\alpha<1;\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{\pi\nu}{2}\cdot\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^\nu}{\nu}, & \alpha>1.\end{cases}$ **5.57.** $F(\alpha)=\frac{2\sqrt{2\pi}(\alpha^2-4\alpha+1)}{(\alpha^2+1)^2}$.

5.61. а) $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{|a|}\cdot\frac{\alpha\sin\frac{\pi\alpha}{a}}{a^2-\alpha^2}$, б) $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a^3}{|a|}\frac{1+\cos\frac{\pi\alpha}{a}}{a^2-\alpha^2}$.
5.62. а) $F(\alpha)=\frac{2\sqrt{2\pi}\,a^2}{|a|(\alpha^2+a^2)}$, б) $F(\alpha)=-\frac{4\sqrt{2\pi}\,a^3\alpha}{|a|(\alpha^2+a^2)^2}$. **5.64.** $F(\alpha)=$
$=\frac{4\sqrt{2\pi}\,e^{-i\alpha}}{\alpha^2+4}$. **5.67.** а) $F(\alpha)=\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{(\alpha-\omega)^2+1}+\frac{1}{(\alpha+\omega)^2+1}\right]$, б) $F(\alpha)=$
$=\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\left[\frac{1}{(\alpha-\omega)^2+1}-\frac{1}{(\alpha+\omega)^2+1}\right]$, в) $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot ie^{i\alpha}\cos 1$, г) $F(\alpha)=$
$=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\alpha-1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$, д) $F(\alpha)=$
$=\frac{i}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha}(\alpha\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1)$. **5.72.** $F(\alpha)=-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}i\alpha e^{-\alpha}$. **5.80.** а) $F_C(\alpha)=$
$=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & 0\leqslant\alpha<1;\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \alpha=1;\\ 0, & \alpha>1.\end{cases}$ б) $F_C(\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha, & 0\leqslant\alpha<\pi;\\ 0, & \alpha>\pi,\end{cases}$ в) $F_C(\alpha)=$

$= \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1; \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$ **5.81.** а) $F_S(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & 0 \leqslant \alpha < 1; \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \alpha = 1; \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$ б) $F_S(\alpha) =$

$\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}}\right)$, в) $F_S(\alpha) = \begin{cases} (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}, & 0 < \alpha < 1; \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$ **6.8.** Оригинал, $s_0 = 0$.

6.9. Не оригинал. **6.10.** Оригинал, $s_0 = -\infty$. **6.11.** Не оригинал ($s_0 = +\infty$). **6.12.** $s_0 = 0$. **6.13.** Не оригинал ($s_0 = +\infty$). **6.14.** $s_0 = 3$. **6.15.** Не оригинал ($s_0 = +\infty$). **6.16.** $s_0 = 0$. **6.17.** $s_0 = 4$. **6.18.** $s_0 = 0$. **6.19.** $s_0 = 1$. **6.20.** $s_0 = -\infty$.

6.28. $\frac{1-e^{-ap}}{p}$. **6.29.** $\frac{e^{-pt}}{p}$. **6.30.** $\frac{1}{p^2}$. **6.31.** $e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)$. **6.32.** $\frac{1}{p-1+i}$. **6.33.** $\frac{1}{a}\frac{1-e^{-ap}}{p^2}$, $\operatorname{Re} p > 0$. **6.40.** $\frac{2}{p(p+4)}$. **6.41.** $\frac{4!}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. **6.42.** $\frac{1}{2} \times$

$\times\left(\frac{8}{p^2+64} - \frac{6}{p^2+36}\right)$. **6.43.** $\frac{3p}{4(p^2+1)} + \frac{p}{4(p^2+9)}$. **6.44.** $\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{p+3} +$

$+\frac{1}{p}$. **6.45.** $\frac{1}{p+1} + \frac{3}{p+2} + \frac{2}{p^3}$. **6.46.** $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+9}\right)$. **6.47.** $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+25} +\right.$

$\left. + \frac{p}{p^2+1}\right)$. **6.48.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$. **6.49.** $\frac{15}{8} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{7}{2}}}$. **6.50.** $\frac{6}{p^3} + \frac{105}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{7}{2}}}$. **6.51.** $\frac{1}{2}e^{4p^2} \times$

$\times \operatorname{erf}(p)$. **6.56.** $\frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$. **6.57.** $-\frac{1}{p^2+1}$. **6.58.** $\frac{6e^{-2p}}{p^4}$. **6.59.** $e^{-3p}\frac{p}{p^2-1}$. **6.60.**

$e^{-ap}\frac{2}{p(p^2+4)}$. **6.61.** $e^{-ap}\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. **6.62.** $\frac{2}{p} = -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-2p}$. **6.64.** $\frac{a_1}{p} +$

$+\frac{(a_2-a_1)}{p}e^{-p\tau_1} + (a_3-a_2)\frac{e^{-p\tau_2}}{p} - \frac{a_3 e^{-p\tau_3}}{p}$. **6.66.** $\frac{n!a^n e^{-\frac{b}{a}p}}{n+1}$. **6.67.**

$e^{-\frac{5}{3}p}\frac{3}{p^2-9}$. **6.68.** $e^{-\frac{p}{5}}\frac{p}{p^2-25}$. **6.73.** $\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$. **6.74.** $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$.

6.75. $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$. **6.76.** $\frac{2}{(p-\lambda)[(p-\lambda)^2+4]}$. **6.77.** $\frac{(p+\lambda)^2+2}{(p+\lambda)[(p+\lambda)^2+4]}$.

6.78. $\frac{1}{2}\left[\frac{4}{(p-2)^2+4^2} + \frac{2}{(p-2)^2+2^2}\right]$. **6.79.** $\frac{1}{2}\left\{\frac{(p-3)^2+8}{(p-3)[(p-3)^2+16]} -\right.$

$\left. - \frac{(p+3)^2+8}{(p+3)[(p+3)^2+16]}\right\}$. **6.80.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)$. **6.92.** $\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{ap}{4}$.

6.93. $\frac{1}{p\left(1+e^{-\frac{ap}{2}}\right)}$. **6.94.** $\frac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2}$. **6.95.** $\frac{1}{p\left(1+e^{\frac{ap}{2}}\right)}$. **6.96.** $\frac{p}{p^2+n^2} +$

$+\frac{n}{p^2+n^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2n}}$. **6.97.** $\frac{2\left(1-e^{-\frac{ap}{4}}\right)\left(1-e^{-\frac{3ap}{4}}\right)}{ap^2(1-e^{-ap})}$. **6.98.** $\frac{2-2e^{-\frac{ap}{2}}-ape^{-ap}}{2ap^2(1-e^{-ap})}$.

6.99. $\frac{8-8e^{-\frac{ap}{4}}-2ape^{-\frac{ap}{2}}}{ap^2(1-e^{-ap})}$. 6.100. $\frac{4\left(1-e^{-\frac{ap}{2}}\right)}{ap^2\left(1+e^{-\frac{ap}{2}}\right)}$. 6.101. $\frac{\operatorname{ch}\frac{ap}{12}}{p\operatorname{ch}\frac{ap}{4}}$. 6.106. $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. 6.107. $\frac{p}{p^2-\lambda^2}$. 6.108. $\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$. 6.109. $\frac{p}{(p+a)^2+1}$. 6.110. $\frac{p(p+a)}{(p+a)^2-\lambda^2}-1$. 6.111. $\frac{\lambda p}{(p+a)^2-\lambda^2}$. 6.114. $(p^3-2p+1)x-\frac{1}{p}$. 6.115. $(p^2+5p-7)x-p-5+\frac{2}{p}$. 6.116. $(p^3+6p^2+p-2)x+3p^2+11p-40$. 6.121. $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$. 6.122. $\frac{1}{(p-i\omega)^3}+\frac{1}{(p+i\omega)^3}$. 1.123. $\frac{1}{2(p-\lambda)^2}-\frac{1}{2(p+\lambda)^2}$. 6.124. $\frac{1}{(p-\lambda)^3}+\frac{1}{(p+\lambda)^3}$. 6.125. $\frac{6}{(p-3)^4}$. 6.126. $\frac{p^2-7p+14}{(p-3)^3}$. 6.127. $\frac{6p^4-8}{(p^4+4)^2}$. 6.131. $\ln\frac{p-\beta}{p-\alpha}$. 6.132. $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(p+a)$. 6.133. $\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$. 6.134. $\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4}{p^2}\right)$. 6.135. $\frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{1}{(p+1)^2}\right]$. 6.136. $\operatorname{arctg}\frac{2}{p}-$ $-\frac{p}{4}\ln\left(1+\frac{4}{p^2}\right)$. 6.140. $\frac{2}{p^3}-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p}$. 6.141. $\frac{6}{p(p+1)^4}$. 6.142. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\times$ $\times\frac{\sqrt{p+i}+\sqrt{p-i}}{p\sqrt{p^2+1}}$. 6.143. $-\frac{1}{2p}\ln(p^2+1)$. 6.144. $-\frac{1}{p}\ln(p-1)$. 6.146. $\frac{1}{p}\ln\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$. 6.150. а) $\mathrm{L}t\cos t=\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$, б) $\mathrm{L}\frac{e^{2t}-3\cos 3t-2\sin 3t}{13}=$ $=\frac{3}{(p-2)(p^2+9)}$, в) $\mathrm{L}\frac{\sin t+t\cos t}{2}=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$, г) $\mathrm{L}(t-\sin t)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$, д) $\mathrm{L}\operatorname{sh}t=\frac{1}{p^2-1}$. 6.153. а) $1-\cos t$, б) $t-\sin t$, в) $\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$, г) $\operatorname{sh}t$, д) $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$, е) $1-t-\frac{t^2}{2}-e^t$. 6.156. $\frac{1}{2}(e^t+\cos t+\sin t)$. 6.157. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t+\cos t)$. 6.158. $\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$. 6.162. $\frac{1}{15}(8e^{3t}+12e^{-2t}-5)$. 6.163. $\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^{-t}+3te^t)$. 6.164. $\frac{e^t}{27}(t-1)+\frac{1}{18}e^{2t}\left(t^2+\frac{4}{3}t+\frac{2}{3}\right)$. 6.165. $\frac{e^{-t}}{8}-\frac{1}{8}e^{-3t}(2t^2+2t+1)$. 6.166. $\frac{1}{2}(2e^t+2e^{-t}\cos 2t+3e^{-t}\sin 2t)$. 6.167. $-\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{12}e^{-t}+\frac{te^t}{2}+\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 6.170. $1-e^{-t}-te^{-t}$. 6.171. $e^{-t}(1-t^2)$. 6.172. $\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^t+3te^t)$. 6.173. $t+2+2te^t-2e^t$. 6.176. $e^{-3t}\sin t$. 6.177. $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$. 6.178. $\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 6.179. $\frac{2}{3}e^t-\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 6.181. $\frac{e^t-e^{-t}}{t}$. 6.182. $\frac{1-\cos t}{t}$. 6.183. $\frac{1-\operatorname{ch}t}{t}$. 6.187. $x=e^{-t}-e^{-2t}$. 6.188. $x=\frac{t^3}{3}+2e^{-t}+2$. 6.189. $x=(1-2t)\cos 2t+$ $+\sin 2t$. 6.190. $x=\frac{1}{82}e^{-9t}+\frac{1}{82}(9\sin t-\cos t)$. 6.191. $x=2e^t+\frac{3}{5}e^{2t}-\frac{8}{5}e^t\times$

$\times \left(\cos \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2}\right)$. **6.192.** $x = \frac{1}{9} e^{3t} + \frac{4}{9} e^{-t} - \frac{4}{9} - \frac{2}{3} t$. **6.193.** $x = \frac{5}{2} \times$ $\times \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} e^{2t} + t^2 - 2$. **6.194.** $x = \frac{2}{9} [e^t - e^{-2t} (3t + 1)]$. **6.195.** $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} + e^t + e^{-t}$. **6.196.** $x = -\frac{83}{4} - \frac{1}{2} t + \frac{7}{20} e^{-2t} + 4e^t + 2t \cos t +$ $+6t \sin t + 16{,}4 \cos t - 4{,}8 \sin t$. **6.197.** $x = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-2t} + (t^2 + t - 1) e^{-t}$. **6.198.** $x = C_1 t^2 + C_2 t + C_3 + C_4 e^{-t} + \frac{1}{2} (\cos t - \sin t)$. **6.200.** $x = \frac{1}{13} (2 \sin 3t -$ $- 3 \cos 3t + 3e^{-2t})$. **6.201.** $x = e^t - e^{2t} + te^{2t}$. **6.202.** $x = \frac{1}{2} (e^{-t} - \cos t + \sin t)$. **6.203.** $\frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} te^t - \frac{1}{4} \operatorname{sh} t$. **6.204.** $x = \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right) e^t - 1$. **6.205.** $\frac{2}{\sqrt{\pi}} t \times$ $\times \operatorname{erf} t + \frac{1}{2} e^{-t^2} - \frac{1}{2}$. **6.206.** $x = te^t + 2e^t + \operatorname{sh} t - 2$. **6.210.** $x = e^{-2t} (1 - 2t)$, $y = e^{-2t} (1 + 2t)$. **6.211.** $x = -8e^{-2t} + 11e^{-8t}$, $y = 4e^{-2t} + 11e^{-8t}$. **6.212.** $x =$ $= \frac{28}{9} e^{3t} - e^{-t} - \frac{1}{3} t - \frac{1}{9}$, $y = \frac{28}{9} e^{3t} + e^{-t} - \frac{1}{3} t - \frac{1}{9}$. **6.213.** $x = 4t + 2 -$ $- 2 \cos t - 3 \sin t$, $y = -2t + 2 \sin t$. **6.214.** $x = \frac{7}{40} e^t + \frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-4t} +$ $+ \frac{7}{40} e^{-7t}$, $y = \frac{3}{40} e^t - \frac{3}{10} e^{-2t} - \frac{7}{30} e^{-4t} + \frac{11}{40} e^{-7t}$. **6.215.** $x = -t + t^2 - \frac{1}{6} t^3 +$ $+ e^t$, $y = 2t + t^2 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{t^4}{24} - e^t$. **6.216.** $x = e^t - \frac{11}{34} e^{4t} - \frac{3}{17} \cos t + \frac{5}{17} \sin t -$ $- \frac{1}{2}$, $y = -\frac{2}{3} + \frac{22}{51} e^{4t} + \frac{4}{17} \cos t - \frac{1}{17} \sin t$. **6.217.** $x = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$, $y =$ $= z = \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t}$. **6.218.** $x = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cos x\sqrt{5}$, $y = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cos x\sqrt{5} -$ $- \frac{2}{\sqrt{5}} \sin x\sqrt{5}$, $z = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cos x\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin x\sqrt{5}$. **6.219.** $x = 4e^t - 3e^{-3t}$, $y = 2e^t$, $z = 4e^{2t} - 4e^t$. **6.220.** $x = \frac{1}{2} (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)$, $y = \frac{1}{2} (\sin t \operatorname{ch} t -$ $- \cos t \operatorname{sh} t)$. **6.221.** $x = -6 - 4t - t^2 + \frac{100}{17} e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{17} \cos 2t + \frac{1}{34} \sin 2t$, $y = -$ $- 1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{25}{17} e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{34} \cos 2t + \frac{9}{68} \sin 2t$. **7.12.** а) $A = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, б) $B =$ $= \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, в) $C = A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3$, г) $D =$ $= A_1 A_2 A_3$, д) $E = B + C + D$, е) $F = C + D$. **7.13.** 1. $A = \bar{A}_1 A_3 + A_3 \bar{A}_2 +$ $+ A_1 A_2 A_3$. 2. $A = A_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. **7.14.** $\{A_i\}$, где A_i — выпадение i очков ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), $A = A_2 + A_4 + A_6$, $B = A_3 + A_6$. **7.21.** $\frac{1}{10}$. **7.22.** $\frac{1}{3}$. **7.23.** $\frac{2}{3}$. **7.24.** $\frac{1}{A_{30}^4}$. **7.25.** $\frac{1}{15}$. **7.26.** $\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. **7.27.** $\approx 0{,}39$. **7.28.** $\approx 0{,}04$. **7.29.** $\frac{4}{9}$. **7.36.** $\frac{1}{4}$. **7.37.** $1 - \frac{l}{L}$. **7.38.** $\frac{1}{2}$. **7.39.** $1 -$ $- \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$. **7.40.** $\frac{1}{2}$. **7.56.** $\frac{1}{3}$. **7.57.** 0,504. **7.58.** 0,28. **7.59.** 0,8. **7.60.** 0,41. **7.61.** $\frac{13}{14}$. **7.62.** 0,712. **7.63.** $1 - (1 - p_1 p_2)^3$. **7.67.** 0,22, 0,11. **7.68.** 0,225. **7.69.** Ко вто-

рому типу. **7.74.** $\xi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{Bmatrix}$, $F(x) = 0\ (x < 0)$; $0{,}7\ (0 \leqslant x < 1)$; $1\ (x \geqslant 1)$.

7.75. $P\{\xi = x_3\} = 0{,}4$. **7.76.** $\eta = \begin{Bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$, $\mu = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$. **7.77.** $\xi = \begin{Bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0{,}06 & 0{,}32 & 0{,}48 & 0{,}14 \end{Bmatrix}$, $\eta = \begin{Bmatrix} -4 & -2 & -1 & 0 \\ 0{,}06 & 0{,}32 & 0{,}42 & 0{,}20 \end{Bmatrix}$. **7.78.** $\xi = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{Bmatrix}$.

7.79. $\xi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}16 \end{Bmatrix}$. **7.80.** $\xi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}282 & 0{,}470 & 0{,}216 & 0{,}031 & 0{,}001 \end{Bmatrix}$. **7.81.** $\xi = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}8 & 0{,}16 & 0{,}038 & 0{,}008 \end{Bmatrix}$. **7.82.** $\xi = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n^2} & \frac{(n-1)^2}{n^3} & \dots & \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k} & \dots \end{Bmatrix}$.

7.89. $M\xi = 0{,}3$, $D\xi = 0{,}21$. **7.90.** $M\xi = 1{,}5$, $D\xi = 0{,}74$, $\sigma\xi = 0{,}87$. **7.91.** $M\xi = 1{,}018$, $D\xi = 0{,}66$, $\sigma\xi = 0{,}81$. **7.92.** 60. **7.93.** $M\xi = 2$, $D\xi = 103{,}5$. **7.94.** $M\xi = 1{,}9$, $D\xi = 51{,}2$. **7.95.** $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \frac{6}{25} & \frac{10}{25} & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} & \frac{2}{25} \end{Bmatrix}$, $M\xi = 2{,}42$, $D\xi = 2{,}50$. **7.102.** $\xi = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}24 & 0{,}41 & 0{,}26 & 0{,}08 & 0{,}01 \end{Bmatrix}$. **7.103.** $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k} \approx \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$, $\left(\alpha = \frac{nt}{T}\right)$. **7.104.** $k_0 = 36$. **7.105.** Вероятнее выиграть а) три партии из четырех, б) не менее пяти партий из восьми. **7.106.** $\approx 0{,}06$. $\approx 0{,}31$. **7.111.** а) $p(x) = 0\ (x < 0)$; $\frac{1}{2} \sin x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $0\ (x > \pi)$, б) $M\xi = \frac{1}{2}\pi$, $D\xi = \pi$, $\sigma\xi = \sqrt{\pi}$. **7.112.** а) $A = 4$, б) $F(x) = 1 - (2x^2 + 2x + 1)\, e^{-2x}$, в) $P\left\{0 < x < \frac{1}{2}\right\} \approx$ $\approx 0{,}086$. **7.113.** $M\nu = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}$, $D\nu = \frac{1}{h^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$. **7.120.** а) $\approx 0{,}1217$, б) $\approx 0{,}9722$, в) $l = 1{,}8$. **7.121.** $\approx 0{,}044$. **7.122.** 15,5 г. **7.123.** $\approx 0{,}018$. **7.124.** $M\xi = 1$, $D\xi = \frac{8}{3}$, $F(x) = \frac{x}{2}$. **7.132.** $P\{70 < \xi < 86\} = 0{,}927$. **7.133.** $l = 67{,}5$. **7.134.** $p = 0{,}588$. **7.135.** $n = 107$. **8.4.** $y = -\frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4}(1 + e^4) \cdot x e^{-x} + \frac{1}{4} e^x$. **8.5.** Нет. **8.6.** l — корень уравнения: $J_0(x) = 0$. **8.7.** При $\lambda \leqslant 0$ — неразрешима. $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$, $k = 1, 2, \dots$. **8.15.** а) $\operatorname{tg} \mu_k l = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\delta\beta\mu_k - \frac{\alpha\gamma}{\mu_k}}$; б) $\operatorname{tg} \mu_k l = 0$, $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, $\lambda_k = \mu_k^2$, $k = 1, 2, \dots$. **8.16.** $y_m(x) = J_\nu\left(\frac{l_m x}{b}\right)$, $\lambda_m = \left(\frac{l_m}{b}\right)^2$, где l_m — m-й положительный корень уравнения: а) $J_\nu'(x) = 0$; б) $\alpha b J_\nu(x) + \beta \cdot x \cdot J_\nu'(x) = 0$. **8.17.** а) $y_n(x) = P_{2n-1}(x)$, $\lambda_n = (2n-1) \cdot 2n$, $n = 1, 2, \dots$. б) $y_n(x) = P_{2n}(x)$, $\lambda_n = 2n(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. **8.18.** $y_n(x) = x^{-\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{l_n x}{b}\right)$, $\lambda_n = \left(\frac{l_n}{b}\right)^2$, где l_n — n-й положительный корень уравнения: а) $J_{m+\frac{1}{2}}(x) =$

$=0$, б) $2xJ'_{m+\frac{1}{2}}(x) - J_{m+\frac{1}{2}}(x) = 0$. **8.22.** а) $u_{n,m} = \sin\frac{n\pi y}{b}\cdot\cos\frac{m\pi x}{a}$; б) $u_{n,m} = \sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b}\cdot\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2a}$; в) $u_{n,m} = \sin\frac{n\pi y}{b}\left(\sin\frac{m\pi x}{a} + h\cdot\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\right)$; $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. **8.23.** а) $u_{n,m,k} = \sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\cdot\sin\frac{k\pi z}{c}$; б) $u_{n,m,k} = \cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}\cdot\cos\frac{k\pi z}{c}$; в) $u_{n,m,k} = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\times$ $\times\sin\frac{(2m+1)\pi y}{2b}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2c}$; **8.24.** $u_{n,m} = J_n\left(l_m^n\frac{\rho}{b}\right)\cdot\cos n\varphi$; $v_{n,m} =$ $= J_n\left(l_m^n\frac{\rho}{b}\right)\cdot\sin n\varphi$; l_m^n — m-й корень уравнения: $\alpha bJ_n(x) + \beta xJ'_n(x) = 0$. **8.25.** а) $u_{n,m} = J_\nu\left(l_m^\nu\cdot\frac{\rho}{b}\right)\cdot\cos\nu\varphi$, $\nu = \frac{n\pi}{\alpha}$, l_m^ν — m-й корень уравнения $J'_\nu(x) = 0$. б) $u_{n,m} = J_\nu\left(l_m^\nu\frac{\rho}{b^n}\right)\cdot\sin\nu\varphi$, $\nu = \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}$, l_m^ν — m-й корень уравнения: $J_\nu(x) = 0$. **8.26.** а) l_m — m-й корень уравнения: $J_n(ax)\cdot Y_n(bx) - J_n(xb)\times$ $\times Y_n(xa) = 0$. $\left.\begin{matrix}u_{n,m}\\ v_{n,m}\end{matrix}\right\} = \left[Y_n\left(l_m^n a\right)\cdot J_n\left(l_m^n\rho\right) - J_n\left(l_m^n a\right)Y_n\left(l_m^n\rho\right)\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}\right.$. **8.27.** $\left.\begin{matrix}u_{n,m,k}\\ v_{n,m,k}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(l_k^{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{r}{a}\right)\cdot P_n^m(\cos 0)\cdot\left\{\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\right.$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $n = m, m+1, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$; $l_k^{n+\frac{1}{2}}$ — k-й корень уравнения: $2xJ'_{n+\frac{1}{2}}(x) - J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$. **8.31.** а) $a_0 = h$, $a_n = \frac{2hl}{c(l-c)\pi^2n^2}\left[l\left(\cos\frac{n\pi c}{l} - 1\right) + c(1-(-1)^n)\right]$; б) $a_n = \frac{2hl^2}{c(l-c)\pi^2n^2}\cdot\sin\frac{n\pi c}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$. **8.32.** $a_0 = \frac{l^2}{3}$, $a_n = -\frac{2l^2}{\pi^2n^2}[1 + (-1)^n]$, $n = 1, 2, \ldots$. **8.33.** а) $a_n = \frac{2}{\varepsilon\pi n}\cdot\sin\frac{n\pi\varepsilon}{l}\times$ $\times\sin\frac{n\pi x_0}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$; б) $a_n = \frac{2}{\varepsilon\pi n}\cdot\sin\frac{n\pi\varepsilon}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x_0}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$. **8.34.** $a_{2k,2p} = \frac{a^2b^2}{\pi^4k^2p^2}$, $k, p = 1, 2, \ldots$; остальные коэффициенты $a_{n,m} = 0$. **8.35.** $\|u_{1,m}\|^2 = \frac{\pi b^2}{2}[J_1^2(l_m) - J_0^2(l_m)] = \frac{\pi b^2(l_m^2-1)}{2l_m^2}\cdot J_1^2(l_m)$; l_m — m-й корень урав-

нения $J'_1(x) = 0$. $a_{1,m} = \frac{2b\cdot l_m^2\cdot\int_0^1 t^2J_1(l_mt)\,dt}{(l_m^2-1)J_1^2(l_m)}$, $m = 1, 2, \ldots$; $a_{n,m} = 0$, если $n \neq 1$. **8.36.** $\|u_{0,0,k}\|^2 = 4\pi\int_0^a rJ_{\frac{1}{2}}^2\left(l_k\cdot\frac{r}{a}\right)dr = 2\pi a^2J_{\frac{1}{2}}^2(l_k)$ l_k — k-й корень уравнения $2xJ'_{\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) = 0$(*). $a_{0,0,k} = \frac{\int_0^a r^{\frac{5}{2}}J_{\frac{1}{2}}\left(l_k\cdot\frac{r}{a}\right)dr}{a^2J_{\frac{3}{2}}(l_k)} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2\pi l_k}}{l_k^3\cos l_k}\times$

$\times\left[1 + \frac{2}{l_k^2} - \frac{2}{l_k^2\cos l_k}\right]$.

Указание. Использовать формулу $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$ и уравнение $\sin l_k = l_k \cos l_k$. **8.37.** $\cos\theta$ является сферической функцией. **8.41.** $u(x, t) = \frac{4l^2}{a\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} \times$ $\times \sin \frac{(2k-1)a\pi t}{l}$. **8.42.** $u(x, t) = l^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{2k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{2ka\pi t}{l} \right]$.

8.43. $u(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \exp\left\{ -a^2 \left[\frac{(2k-1)\pi}{l} \right]^2 t \right\} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}$.

8.44. $u(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \exp\left\{ -a^2 \left[\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right]^2 t \right\} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$.

8.45. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\{-a^2\mu_n^2 t\} \cdot \sin \mu_n (x + l)$ μ_n – n-й корень $\operatorname{tg} \mu l =$ $= -\frac{\beta}{\alpha}\mu$ и $A_n = \frac{1}{\| \sin \mu_n (x+l) \|^2} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \mu_n (x + l)\, dx$. **8.46.**

$u(x, y, t) = \frac{Ad^2b^2}{\pi^4} \sum_{k, p=1}^{\infty} \frac{1}{k^2p^2} \sin \frac{2k\pi x}{d} \cdot \sin \frac{2p\pi y}{b} \cdot \cos\left(at\pi \sqrt{\frac{4k^2}{d^2} + \frac{4p^2}{b^2}} \right)$.

8.47. $u(x, t) = \frac{8Ad^3}{a\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi x}{d} \cdot \sin \frac{a(2k-1)\pi t}{d}$. **8.48.**

$u = \sum_{n=0,\ m=1}^{\infty} y_{n,m}(\rho) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) (A_{n,m} \cos(al_m^n t) + B_{n,m} \cdot \sin al_m^n t)$;
$y_{n,m}(\rho) = Y_n(l_m^n b_1) \cdot J_n(l_m^n \rho) - J(l_m^n b_1) \cdot Y_n(l_m^n \rho)$ (см. **8.26.**) **8.49.** $u(\rho, \varphi, t) =$
$= \sum_{n=0,\ m=1}^{\infty} A_{n,m} \cdot J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(l_m^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\rho}{b} \right) \cdot \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \cdot \cos \frac{al_m^{\frac{n\pi}{\alpha}} t}{b}$, $J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(l_m^{\frac{n\pi}{\alpha}} \right) = 0$. **8.50.** $u(r, t) =$
$= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \frac{al_m t}{b} \cdot \frac{J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{l_m r}{b} \right)}{\sqrt{r}}$, $A_m = \frac{b^{\frac{3}{2}} \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} \cdot J_{\frac{1}{2}}(l_m t)\, dt}{\left[J'_{\frac{1}{2}}(l_m) \right]^2}$ $J_{\frac{1}{2}}(l_m) = 0$. **8.51.**

$u = \frac{64T_0}{\pi^3} \sum_{n, m, k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi y}{b} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi z}{c}}{(2n+1)(2m+1)(2k+1)} \cdot e^{-\lambda_{n,m,k} t}$,

где $\lambda_{n,m,k} = \pi^2 \left[\left(\frac{2n+1}{a} \right)^2 + \left(\frac{2m+1}{b} \right)^2 + \left(\frac{2k+1}{c} \right)^2 \right]$. **8.52.** $u =$

$= \sum_{m, k=1}^{\infty} -\frac{8T_0}{\pi(2k+1) J'_0(l_m)} \cdot J_0\left(\frac{l_m \rho}{b} \right) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi z}{h} \cdot \exp\left\{ -a^2 \left[\frac{l_m^2}{b^2} + \right. \right.$

$+\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\Big]t\Big\}$, $J_0(l_m)=0$. **8.53.** $u(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{m=1}^{\infty}A_m\exp\left[-a^2\cdot\frac{l_m^2}{b^2}t\right]\times$

$\times J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{l_m r}{b}\right)$; определение l_m A_m (см. **8.50.**). **8.58.** $u(\rho,\varphi)=\frac{A}{4}\left(\frac{3\rho}{b}\sin\varphi-\right.$

$\left.-\frac{\rho^3}{b^3}\sin 3\varphi\right)$. **8.59.** $u(\rho,\varphi)=\frac{Ab_1^2}{b_1^2-b_2^2}\left(\rho+\frac{b_2^2}{\rho}\right)\sin\varphi+\frac{Bb_2^3}{2(b_1^4-b_2^4)}\cdot\left(\rho^2+\frac{b_1^4}{\rho^2}\right)\times$

$\times\sin 2\varphi$. **8.60.** $u(\rho,\varphi)=\frac{Ab_1}{2}(\ln\rho-\ln b_2)+\frac{Bb_2\cdot\cos\varphi}{b_1^2+b_2^2}\left(\rho+\frac{b_1^2}{\rho}\right)+\frac{Ab_1^3\cdot\cos 2\varphi}{4(b_1^4+b_2^4)}\times$

$\times\left(-\rho^2+\frac{b_2^4}{\rho^2}\right)$. **8.61.** $u(\rho,z)=u_1(\rho,z)+A$; $u_1=\sum_{m=1}^{\infty}J_0\left(l_m\cdot\frac{\rho}{b}\right)\left[A_m\operatorname{ch}\frac{l_m z}{b}+\right.$

$\left.+B_m\operatorname{sh}\frac{l_m z}{b}\right]$, $J_0(l_m)=0$, $A_m=\frac{8b^2}{l_m^3 J_1(l_m)}$, $B_m=\frac{-1}{\operatorname{sh}\frac{l_m h}{b}}\left[\frac{2A}{l_m J_1(l_m)}+\right.$

$\left.+A_m\cdot\operatorname{ch}\frac{l_m h}{b}\right]$. **8.62.** $u(r,\theta)=Ar\cos\theta$. **8.63.** $u(r,\theta,\varphi)=Ar\cos\theta\cdot\sin\varphi$. **8.66.**

а) $u(x,t)=A+\frac{B-A}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(A+(-1)^{n+1}B)}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{an\pi t}{l}$, б)

$u(x,t)=\frac{Bx^2}{2l}+Ax+\frac{Ba^2t^2}{2l}-l^2\left[\frac{A}{B}+\frac{1}{3}\right]+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A}{B}[1+(-1)^{n+1}]+\right.$

$\left.+(-1)^{n+1}\right\}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{an\pi t}{l}$. **8.67.** $u=\frac{Aa^2}{2}t^2$. **8.68.** $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left[\sin\omega t-\right.$

$\left.-\frac{2l\omega}{(2n+1)\pi}\sin\frac{a(2n+1)\pi t}{2l}\right]\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, $C_n=\frac{16A(-1)^n l^2}{\pi(2n+1)[(2n+1)^2\pi^2-4\omega^2 l^2]}$

и $\omega\neq\frac{(2n+1)\pi}{2l}$. **8.70.** $u(\rho,\varphi,t)=\rho\sin\varphi+\sin\varphi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2b}{l_m J_0(l_m)}J_1\left(l_m\frac{\rho}{b}\right)\times$

$\times\cos\frac{al_m t}{b}$; $J_1(l_m)=0$. **8.71.** $u(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}J_0\left(\frac{l_m\rho}{b}\right)\left[B_m\sin\frac{al_m t}{b}+C_m\sin\omega t\right]$;

$J_0(l_m)=0$, $\omega\neq\frac{al_m}{b}$, $C_m=\frac{2A}{l_m J_1(l_m)\left[\frac{l_m^2}{b^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right]}$, $B_m=-\frac{\omega b l_m}{a}\cdot C_m$. **8.72.**

$u(\varphi,\rho,t)=\cos\varphi\cdot\sum_{m=1}^{\infty}J_1\left(l_m\cdot\frac{\rho}{b}\right)\left[B_m\cdot\sin\frac{l_m a t}{b}+C_m\sin\omega t\right]$, $C_m=\frac{2b}{l_m\cdot J_c(l_m)}\times$

$\times\left[\left(\frac{l_m}{b}\right)^2-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]^{-1}$, $B_m=-\frac{b\omega}{al_m}C_m$, $J_1'(l_m)=0$, $\omega\neq\frac{al_m}{b}$. **8.73.** $u=w+$

$+u_1$; $\Delta u_1=0$, $u_1|_{z=0}=A$, $u_1|_{z=h}=B$, $u_1|_{\rho=b}=0$; $u_1=\sum_{m=0}^{\infty}J_0\left(\frac{l_m\rho}{b}\right)\times$

$\times\left[A_m\operatorname{ch}\frac{zl_m}{b}+B_m\operatorname{sh}\frac{zl_m}{b}\right]$, A_m, B_m определяются из разложений: $A=$

$=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(\frac{l_m\rho}{b}\right)$; $B=\sum_{m=1}^{\infty}J_0\left(\frac{l_m\rho}{b}\right)\left[A_m\operatorname{ch}\frac{l_m h}{b}+B_m\operatorname{sh}\frac{l_m h}{b}\right]$, $w=$

$= \sum_{m,k=1}^{\infty} A_{m,k} J_0\left(\frac{l_m \rho}{b}\right) \cdot \sin\frac{k\pi z}{h} \cdot \cos at \sqrt{\left(\frac{\pi k}{h}\right)^2 + \left(\frac{l_m}{b}\right)^2}$ $A_{m,k}$ определяются из условия $w(\rho, z, 0) = -u_1(\rho, z)$. **8.74.** $u = w + u_1$, $u_1 = Ar\cos\theta \cdot \sin\omega t$ $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta w +$ $+ \frac{A\omega^2}{a^2} r\cos\theta \cdot \sin\omega t$, $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$, $w|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{A\omega^3}{a^2} r\cos\theta$. **8.75.** $u =$ $= w + u_1$, $u_1 = Ar$, $\frac{1}{a^2}\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + \frac{2A}{r}$ $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b} = 0$, $w(r, 0) = B - Ar$. **8.76.** $u = w + u_1$, $u_1 = kt\sin\frac{\pi z}{h}$; $\frac{1}{a^2}\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + f$, где $f = -k\sin\frac{\pi z}{h}\left[\frac{\pi^2}{h^2} t + \right.$ $\left. + \frac{1}{a^2}\right]$. **8.77.** $u = w + u_1$, $\Delta u_1 = 0$, $u_1|_{x=a} = B$ и u_1 равно нулю на остальной части границы. $u_1 = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\frac{(2n-1)\pi y}{b} \sin\frac{(2m-1)\pi z}{c} \cdot \operatorname{sh}\pi x \times$ $\times \sqrt{\left(\frac{2n-1}{b}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{c}\right)^2}$; $w = \sum_{n,m,k=1}^{\infty} B_{n,m,k} \cdot \sin\frac{(2n-1)\pi y}{b} \times$ $\times \sin\frac{(2m-1)\pi z}{c} \cdot \sin\frac{(2k-1)\pi x}{a}$, $A_{n,m} = 4B\left[\pi^2 (2n-1)(2m-1)\operatorname{sh}\pi a \times\right.$ $\left. \times \sqrt{\left(\frac{2n-1}{b}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{c}\right)^2}\right]^{-1}$, $B_{n,m,k} = -64A\left[\pi^3 (2n-1)(2m-1) \times\right.$ $\left. \times (2k-1)\left\{\left(\frac{2n-1}{b}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{c}\right) + \left(\frac{2k-1}{a}\right)^2\right\}\right]^{-1}$. **8.78.** $u = w + u_1$; $\Delta u_1 = 0$, $u_1|_{z=h} = \rho\cos\varphi$ и u_1 равно нулю на остальной части поверхности $u_1 =$ $= \cos\varphi \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_1\left(\frac{l_m \rho}{b}\right) \operatorname{sh}\frac{l_m z}{b}$, $J_1'(l_m) = 0$, $w = \sum_{m,k=1}^{\infty} C_{m,k} \cdot J_0\left(\frac{l_m \rho}{b}\right) \times$ $\times \sin\frac{k\pi z}{h}$, где $C_{m,k}$ определяются из разложения: $A = -\sum C_{m,k}\left[\left(\frac{l_m}{b}\right)^2 + \right.$ $\left. + \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2\right] \cdot J_0\left(\frac{l_m \rho}{b}\right) \sin\frac{k\pi z}{h}$. **8.84.** $u(x, t) = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos\lambda}{\lambda}\right)\sin\lambda x \cdot \frac{\sin at\lambda}{\lambda} d\lambda =$ $= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f_{\text{н}}(\xi)\, d\xi$, где $f_{\text{н}}$ — нечетное продолжение функции $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ на отрицательную полуось. **8.85.** $u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2 a^2}[a\lambda\sin\omega t -$ $- \omega\sin a\lambda t]\sin\lambda x\, d\lambda$. **8.86.** $u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(\alpha^2 a^2 t)\left[e^{\alpha x}\left(1 - \Phi\left(\alpha a\sqrt{t} + \right.\right.\right.$ $\left.\left.\left. + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) + e^{-\alpha x}\left(1 - \Phi\left(\alpha a\sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)\right]$. **8.87.** $u(x, t) =$ $= \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\lambda y}{\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda b}\sin a\lambda \cdot \cos\lambda x\, d\lambda$. **8.88.** $u(x, t) = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2}[\operatorname{sh}\lambda y$ $- \operatorname{ch}\lambda y \cdot \operatorname{cth}\lambda b]\, d\lambda$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица гамма-функции $\Gamma(x)$
$(1 \leqslant x \leqslant 2)$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88959	74	0,91683	99	0,99581
						2,00	1,00000

Значения функций Бесселя

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	$-\infty$	$-\infty$	1,8	0,3400	0,5815	0,4774	—0,2237	3,6	—0,3918	0,0955	0,1477	0,4154
1	9975	0499	—1,5334	—6,4590	9	2818	5812	4968	—0,1644	7	3992	0538	1061	4167
2	9900	1000	—1,0811	—3,3238	2,0	2239	5767	5104	—0,1070	8	4026	0128	0645	4141
3	9776	1483	—0,8073	—2,2931	1	1666	5683	5183	—0,0517	9	4018	—0,0272	0234	4078
4	9604	1960	—0,6060	—1,7809	2	1104	5560	5209	0,0015	4,0	3971	0660	—0,0169	3979
5	9385	2423	—0,4445	—1,4715	3	0555	5399	5181	0523	1	3887	1033	0561	3846
6	9120	2867	—0,3085	—1,2604	4	0025	5202	5104	1005	2	3766	1387	0938	3680
7	8812	3290	—0,1907	—1,1033	5	—0,0484	4971	4981	1459	3	3610	1719	1296	3484
8	8463	3688	—0,0868	—0,9781	6	0968	4708	4813	1884	4	3423	2028	1633	3260
9	8075	4060	0,0056	—0,8731	7	1425	4416	4605	2276	5	3205	2311	1947	3010
1,0	7652	4401	0883	—0,7812	8	1850	4097	4359	2636	6	2961	2566	2235	2738
1	7196	4709	1622	—0,6981	9	2243	3754	4079	2959	7	2693	2790	2494	2445
2	6711	4983	2204	—0,6211	3,0	2601	3391	3769	3247	8	2404	2985	2723	2136
3	6201	5220	2865	—0,5485	1	2921	3009	3431	3496	9	2097	3147	2921	1813
4	5669	5420	3379	—0,4792	2	3202	2613	3071	3707	5,0	1776	3275	3085	1479
5	5118	5579	3825	—0,4123	3	3443	2207	2691	3879	1	1443	3371	3216	1137
6	4554	5699	4204	—0,3476	4	3643	1792	2296	4010	2	1103	3432	3313	0792
7	3980	5778	4520	—0,2847	5	3801	1374	1890	4102	3	0758	3460	3374	0445

Продолжение прилож. 2

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
4	—0,0412	—0,3452	—0,3402	0,0101	7,2	0,2951	0,0543	0,0339	—0,2934	9,0	—0,0903	0,2453	0,2499	0,1043
5	—0,0068	3414	3395	—0,0238	3	2882	0826	0628	2846	1	1142	2324	2383	1275
6	0,0270	3343	3354	0568	4	2786	1096	0907	2731	2	1368	2174	2245	1491
7	0599	3242	3282	0887	5	2663	1352	1173	2591	3	1577	2004	2086	1691
8	0917	3110	3178	1192	6	2516	1592	1424	2428	4	1768	1816	1907	1871
9	1220	2951	3043	1481	7	2346	1813	1658	2243	5	1939	1613	1712	2032
6,0	1507	2767	2882	1750	8	2154	2013	1872	2038	6	2090	1395	1501	2171
1	1773	2559	2694	1998	9	1944	2192	2065	1817	7	2218	1166	1278	2287
2	2018	2329	2483	2223	8.0	1717	2346	2235	1581	8	2323	0928	1045	2379
3	2238	2081	2251	2423	1	1475	2476	2381	1332	9	2403	0684	0804	2447
4	2433	1816	2000	2596	2	1222	2580	2501	1072	10,0	2459	0435	0557	2490
5	2601	1538	1732	2741	3	0960	2657	2595	0806	11,0	1712	—0,1768	—0,1689	1637
6	2740	1250	1452	2858	4	0692	2708	2662	0535	12,0	0,0477	2235	2252	—0,0571
7	2851	0953	1162	2945	5	0419	2731	2702	0262	13	2069	0703	0782	2101
8	2931	0652	0864	3002	6	0146	2728	2715	0.0011	14	1711	0,1334	0,1272	1616
9	2981	0349	0563	3029	7	—0,0125	2697	2700	0280	15	—0,0142	2051	2055	0,0211
7,0	3001	0047	0260	3028	8	0392	2641	2659	0544					
1	0,2991	0,0252	0,0042	—0,2995	9	0652	2559	2592	0798					

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3312	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2119	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0223	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0012	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции Лапласа $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,3108	0,80	0,5763	1,20	0,7699	1,60	0,8904	2,00	0,9545
01	0,0080	41	0,3182	81	0,5821	21	0,7737	61	0,8926	05	0,9596
02	0,0160	42	0,3255	82	0,5878	22	0,7775	62	0,8948	10	0,9643
03	0,0239	43	0,3328	83	0,5935	23	0,7813	63	0,8969	15	0,9684
04	0,0319	44	0,3401	84	0,5991	24	0,7850	64	0,8990	20	0,9722
0,05	0,0399	0,45	0,3473	0,85	0,6047	1,25	0,7887	1,65	0,9011	2,25	0,9756
06	0,0478	46	0,3545	86	0,6102	26	0,7923	66	0,9031	30	0,9786
07	0,0558	47	0,3616	87	0,6157	27	0,7959	67	0,9051	35	0,9812
08	0,0638	48	0,3688	88	0,6211	28	0,7995	68	0,9070	40	0,9836
09	0,0717	49	0,3759	89	0,6265	29	0,8029	69	0,9090	45	0,9857
0,10	0,0797	0,50	0,3829	0,90	0,6319	1,30	0,8064	1,70	0,9109	2,50	0,9876
11	0,0876	51	0,3899	91	0,6372	31	0,8098	71	0,9127	55	0,9892
12	0,0955	52	0,3969	92	0,6424	32	0,8132	72	0,9146	60	0,9907
13	0,1034	53	0,4039	93	0,6476	33	0,8165	73	0,9164	65	0,9920
14	0,1113	54	0,4108	94	0,6528	34	0,8198	74	0,9181	70	0,9931
0,15	0,1192	0,55	0,4177	0,95	0,6579	1,35	0,8230	1,75	0,9199	2,75	0,9940
16	0,1271	56	0,4245	96	0,6629	36	0,8262	76	0,9216	80	0,9949
17	0,1350	57	0,4313	97	0,6680	37	0,8293	77	0,9233	85	0,9956
18	0,1428	58	0,4381	98	0,6729	38	0,8324	78	0,9249	90	0,9963
19	0,1507	59	0,4448	99	0,6778	39	0,8355	78	0,9265	95	0,9968

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,20	0,1585	0,60	0,4515	1,00	0,6827	1,40	0,8385	1,80	0,9281	3,00	0,99730
21	0,1663	61	0,4581	01	0,6875	41	0,8415	81	0,9297	10	0,99806
22	0,1741	62	0,4647	02	0,6923	42	0,8444	82	0,9312	20	0,99863
23	0,1899	63	0,4713	03	0,6970	43	0,8473	83	0,9328	30	0,99903
24	0,1897	64	0,4778	04	0,7017	44	0,8501	84	0,9342	40	0,99933
0,25	0,1974	0,65	0,4843	1,05	0,7069	1,45	0,8529	1,85	0,9357	3,50	0,99953
26	0,2051	66	0,4907	06	0,7109	46	0,8557	86	0,9371	60	0,99968
27	0,2128	67	0,4971	07	0,7154	47	0,8584	87	0,9385	70	0,99978
28	0,2205	68	0,5035	08	0,7199	48	0,8611	88	0,9399	80	0,99986
29	0,2282	69	0,5098	09	0,7243	49	0,8638	89	0,9412	90	0,99990
0,30	0,2358	0,70	0,5161	1,10	0,7287	1,50	0,8664	1,90	0,9426	4,00	0,99994
31	0,2434	71	0,5223	11	0,7330	51	0,8690	91	0,9439	4,417	$1-10^{-5}$
32	0,2510	72	0,5285	12	0,7379	52	0,8715	92	0,9451	4,892	$1-10^{-6}$
33	0,2586	73	0,5346	13	0,7415	53	0,8740	93	0,9464	5,327	$1-10^{-7}$
34	0,2661	74	0,5407	14	0,7457	54	0,8764	94	0,9476		
0,35	0,2737	0,75	0,5467	1,15	0,7499	1,55	0,8789	1,95	0,9488		
36	0,2812	76	0,5527	16	0,7540	56	0,8812	96	0,9500		
37	0,2886	77	0,5587	17	0,7580	57	0,8836	97	0,9512		
38	0,2961	78	0,5646	18	0,7620	58	0,8859	98	0,9523		
39	0,3035	79	0,5705	19	0,7660	59	0,8882	99	0,9534		

Кручкович Георгий Ионович
Мордасова Галина Михайловна
Подольский Владимир Алексеевич
Римский-Корсаков Борис Сергеевич
Сулейманова Хафаза Разиевна
Чегис Инна Александровна

«СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

Редактор *Д. А. Тальский*
Художник *Л. В. Брылев*

Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
Технический редактор *З. В. Нуждина*
Корректор *С. К. Марченко*

Сдано в набор 4/III 1970 г. Подписано к печати 29/VII 1970 г. Формат $60\times90^1/_{16}$. Объем 32 печ. л. Уч.-изд. л. 27,75. Изд. № ФМ—396. Тираж 40 000 экз. Цена 88 коп. Заказ № 1040.

БЗ—35/10 от 1/VI-70 г.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.